This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

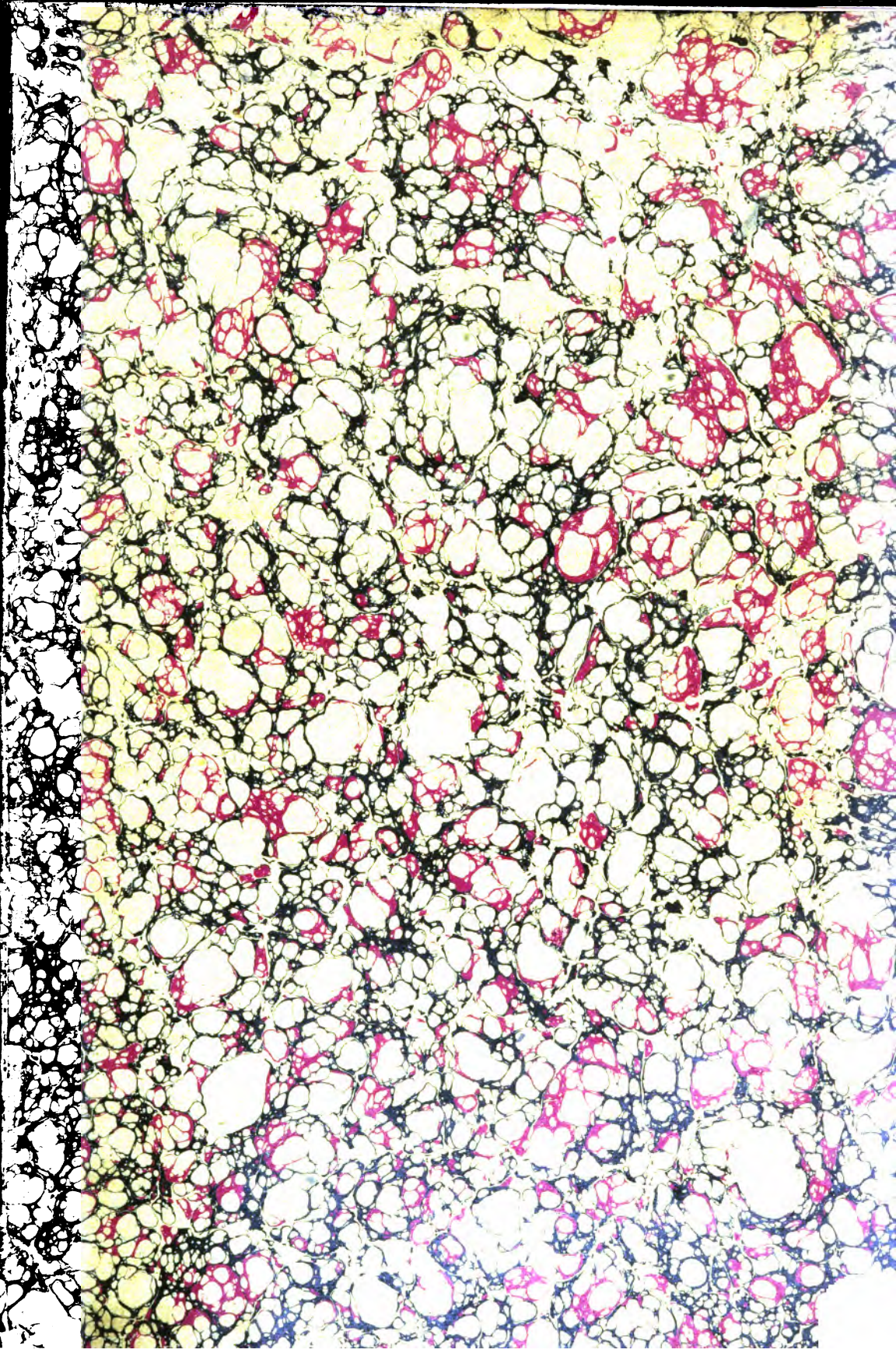
Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

GODFREY LOWELL CABOT SCIENCE LIBRARY
of the Harvard College Library

This book is
FRAGILE
and circulates only with permission.
Please handle with care
and consult a staff member
before photocopying.

Thanks for your help in preserving
Harvard's library collections.



Elementare Theorie und Berechnung

eiserner

Dach- und Brücken-Constructionen.

6

Elementare

Theorie und Berechnung

eiserner

Dach- und Brücken-Constructionen.

Von

August Ritter, Dr. phil.
Professor an der polytechnischen Schule zu Aachen.

Dritte Auflage.

Mit 495 Holzschnitten.

HANNOVER.
Carl Rümpler.
1873.

Eng 748.73.11

HARVARD UNIVERSITY
SCHOOL OF ENGINEERING
JUN 20 1917
TRANSFERRED TO
HARVARD COLLEGE LIBRARY

66.41

Uebersetzungsrecht vorbehalten.

Druck von August Grimpe in Hannover.

Vorrede zur ersten Auflage.

Die Bestimmung der Spannungen, welche in den einzelnen Constructionstheilen der Dach- und Brücken-Constructionen durch Belastungen derselben hervorgebracht werden, ist in neuerer Zeit, seit Einführung des Schmiedeisens als Baumaterials, eine der wichtigsten Aufgaben der Ingenieur-Mechanik geworden.

Das Gesetz des Hebels — in seiner allgemeineren Form: das Gesetz der statischen Momente — lässt sich auf einfache Weise zur allgemeinen Lösung dieser Aufgabe benutzen. Die auf dieses Gesetz sich gründende Methode der statischen Momente leistet eben so viel als irgend eine andere der bisher bekannten Methoden, übertrifft sie aber an Allgemeinheit und durch den für Practiker wichtigen Vorzug: dass sie so gut wie gar keine Vorkenntnisse voraussetzt und jene Aufgabe in eine der elementarsten Aufgaben der Mechanik verwandelt.

Die Resultate dieser ungemein fruchtbaren Methode sind klar und scharf wie die Resultate der Geometrie und von unmittelbarer practischer Anwendbarkeit. Es giebt kaum einen anderen Zweig der Ingenieur-Mechanik, der für die practische Verwerthung eines geringen Maasses von Kenntnissen ein so lohnendes Feld böte, und der so geeignet wäre, den Anfänger mit dieser Wissenschaft zu befreunden, wie eine auf jene Methode gegründete Theorie der Dach- und Brücken-Constructionen.

Diese Gründe veranlassten den Verfasser, die nachfolgenden — ursprünglich für eine Reihe von Zeitschrift-Artikeln bestimmten — Anwendungen jener Methode in einem besonderen Werke zu veröffentlichen und damit einem grösseren Leserkreise zur Benutzung zu überweisen.

Die beiden ersten Abschnitte, welche die Grundzüge jener Methode erklären, sind ihrem wesentlichen Inhalte nach schon früher veröffentlicht.*) Die Methode selbst

*) Zeitschrift des Architecten- und Ingenieur-Vereins für das Königreich Hannover, Band VII. Heft 4.

ist so einfach, dass es für den Kundigen nur eines Blicks auf Seite 5 bedarf, um den Geist derselben zu erfassen; es liegt daher in der Natur der Sache, dass Aufgaben-Berechnungen und Anwendungen auf ausgeführte Constructionen den bei weitem grösseren Theil des Inhalts bilden.

Die in den Rechnungen vorkommenden Gleichungen sind fast ausschliesslich numerische Gleichungen vom ersten Grade, bei denen von Schwierigkeiten keine Rede sein kann; überhaupt beschränken sich die zum Verständniss dieses Werks erforderlichen Vorkenntnisse etwa auf dasjenige Maass, welches der Bauhandwerker von einer guten Baugewerkschule mitbringt.

Wenn die Rechnungen beim ersten Anblick weitläufig erscheinen, so erklärt sich das aus der grossen Ausführlichkeit und Vollständigkeit, mit welcher der Verfasser die Berechnung jedes einzelnen Constructionstheils mittheilen zu müssen glaubte, um auch ungeübte Rechner, namentlich Practiker, in den Stand zu setzen, die Aufgaben vollständig nachzurechnen. Wo gleichartige Rechnungs-Operationen mehrfach wiederkehren, sind dieselben mit kleiner Schrift gedruckt, um dem Geübteren das Ueberschlagen des für ihn Ueberflüssigen zu erleichtern.

Der Verfasser glaubt, dass in dieser Form das vorliegende Werk von dem ausführenden Ingenieur wie auch beim Unterrichte auf höheren und niederen technischen Lehranstalten als Hülfsbuch mit Nutzen wird gebraucht werden können, und darf sich dabei sowohl auf seine eigenen Erfahrungen, als auch auf diejenigen seines Collegen v. Kaven berufen, der in seinen Vorträgen über Eisenbahnbau die hier entwickelten Principien bereits anzuwenden Gelegenheit hatte, und dem der Verfasser für vielfache anregende Mittheilungen und nützliche Rathschläge zu grossem Danke verpflichtet ist.

Hannover, den 6. October 1862.

A. Ritter.

Vorrede zur zweiten Auflage.

Bei der Bearbeitung dieser neuen Auflage hat der Verfasser durch Hinzufügung neuer Zahlenbeispiele die Brauchbarkeit des Buches zu erhöhen gesucht; daneben auch die Gelegenheit nicht unbenutzt gelassen, einzelne Lücken auszufüllen und Mängel, die sich inzwischen beim Gebrauche des Buches herausgestellt hatten, zu beseitigen.

Die Art und Weise, in welcher die Methode der statischen Momente in der ersten Auflage zur Berechnung von Dach- und Brücken-Constructionen benutzt wurde, konnte zu Zweifeln hinsichtlich der allgemeinen Anwendbarkeit dieser Methode Veranlassung geben. Es konnte der Einwand erhoben werden: dass die Anwendung derselben als eine aus „Construction" und „Rechnung" gemischte Operation sich darstellte, insofern bei der Berechnung der Spannungszahlen stets das Vorhandensein einer in grossem Maassstabe ausgeführten Zeichnung vorausgesetzt wurde, auf welcher die Lage der Drehpunkte und die Längen der Hebelarme hinlänglich genau abgemessen werden konnten. Als ein fernerer Mangel konnte der Umstand erscheinen: dass bei allen in der ersten Auflage gegebenen Anwendungen stets nur gezeigt wurde, wie man bei einem der Form nach bereits fertig gegebenen Träger die Spannungszahlen berechnet — nicht aber, wie man zum Auffinden jener Form selbst gelangt.

Diesen beiden Einwänden zu begegnen ist der Zweck des XI. Abschnitts in der neuen Auflage. Der erste Paragraph dieses Abschnitts zeigt, wie man in solchen Fällen, wo auf die Hülfe der Construction verzichtet werden muss, die Bestimmung der Spannungszahlen ausschliesslich auf dem Wege der Rechnung zu Ende führen kann, insofern die Drehpunkte und Hebelarme ebenfalls in sehr einfacher Weise auf dem Wege der Rechnung gefunden werden können. In den hierauf

folgenden Paragraphen dieses Abschnitts ist alsdann gezeigt, wie man die Methode der statischen Momente auch zum Auffinden rationeller Constructionsformen benutzen kann — solcher Formen nämlich, welche die Träger haben müssen, um gewissen vorgeschriebenen Bedingungen Genüge zu leisten.

Es sind ausserdem einige in der ersten Auflage etwas dürftig ausgestattete Abschnitte bei der neuen Bearbeitung in grösserer Ausführlichkeit behandelt worden, wie z. B. in der ersten Abtheilung die Berechnung der „Gitterbrücken", und in der zweiten Abtheilung die Theorie der „combinirten Systeme". Die letztere ist durch Berücksichtigung des Einflusses der Temperatur-Aenderungen vervollständigt, und überdies giebt der XVI. Abschnitt in der Berechnung einer „combinirten Gitter- und Hänge-Brücke" eine Anwendung jener Theorie in grösserem Maassstabe.

Da in diesem letzten Abschnitte einige Sätze aus der „Biegungstheorie" und der Theorie der „elastischen Linie" zur Anwendung kommen, so erschien es zweckmässig, im XV. Abschnitte die betreffenden Hülfssätze einzuschalten, welche zum Theil des Verfassers „Lehrbuche der Mechanik" entlehnt wurden.

Wenn in den letzteren beiden Abschnitten hier und da Anwendungen der Differenzial- und Integral-Rechnung vorkommen, obwohl der Titel des Buches eine „elementare Theorie" ankündigt, so glaubt der Verfasser sich mit der Voraussetzung entschuldigen zu dürfen: dass trotz jener kleinen Ungehörigkeit die Hinzufügung des im letzten Abschnitte berechneten umfangreichen Zahlenbeispiels dem grösseren Theile der Leser nicht unwillkommen sein würde, und hofft derselbe, dass das in seinen übrigen Theilen wiederum ganz elementar gehaltene Buch auch in dieser neuen mannigfach veränderten Gestalt als nützlich sich erweisen wird.

Hannover, den 1. November 1869.

A. Ritter.

Vorrede zur dritten Auflage.

Die vorliegende dritte Auflage ist — abgesehen von einigen unwesentlichen Verbesserungen und Berichtigungen — ein unveränderter Abdruck der zweiten Auflage und bedarf daher keiner weiteren Vorrede. Der Verfasser glaubt jedoch die ihm hier gebotene Gelegenheit benutzen zu müssen, um den Untersuchungen des sechzehnten Abschnitts an dieser Stelle einige erläuternde Bemerkungen beizufügen, zu welchen ihm eine inzwischen unter dem Titel: „Beiträge zur Theorie der combinirten Gitter- und Hänge-Brücken von Hugo B. Buschmann“ erschienene Broschüre Veranlassung giebt.

In der genannten Abhandlung wird die Zulässigkeit der Beweisführung angefochten, mittelst welcher in den Paragraphen 56 ... 61 die Gleichungen abgeleitet werden für die von der mobilen Last hervorgebrachten Spannungen des Gitterbalkens. Herr B. behauptet: dieselbe beruhe auf ganz willkürlichen Voraussetzungen, und glaubt die Unzulässigkeit derselben nachzuweisen, indem er hinzufügt: es würde aus jener Beweisführung folgen, dass bei gewissen Belastungszuständen — nämlich bei Belastung der beiden Endstrecken der Brückenbahn — in der Mitte des Gitterbalkens ein negatives Biegungsmoment hervorgebracht werde, d. h. eine solche Biegung, bei welcher die Convexität der Biegungscurve nach oben gerichtet ist; hierdurch werde aber für den mittleren Theil der hängenden Kette eine Vergrösserung des Krümmungshalbmessers, und damit zugleich eine Verkürzung des Kettentheiles selbst bedingt, von welcher letzteren doch vernünftiger Weise nicht die Rede sein könne.

Diese Schlussfolgerung beruht jedoch in ihrem letzteren Theile auf einem Irrthum. Herr B. übersieht, dass bei den unendlich kleinen Formänderungen der Kettenlinie — und von unendlich kleinen Formänderungen kann

Seite

§ 16. Abgeleitete Formen 85
§ 17. Scheinbare Mängel der Methode 92
§ 18. Theorie der sichelförmigen Träger 94

Fünfter Abschnitt.

§ 19. Hängendes Perron-Dach von 6m Vorsprungsweite 106
§ 20. Perron-Dach ohne Hängestange 112

Sechster Abschnitt.

§ 21. Sprengwerkbrücke von 24m Spannweite 114
§ 22. Bogenbrücke von 40m Spannweite. (Theissbrücke bei Szegedin) . 126
§ 23. Stabilität der Pfeiler 149
§ 24. Theorie der Scharnier-Brücken 153

Siebenter Abschnitt.

§ 25. Transformation der Spannungszahlen für veränderte Spannweiten . 158
a. Parabolische Träger 160
b. Fachwerkbrücken mit parallelen Gurtungen 161
c. Bogen- und Hänge-Brücken 163

Achter Abschnitt.

§ 26. Hängebrücke von 120m Spannweite der Haupt-Oeffnung und je 60m Spannweite der Neben-Oeffnungen 165
§ 27. Stabilität der Mittelpfeiler 183
§ 28. Stabilität der Landpfeiler 186

Neunter Abschnitt.

§ 29. Kuppelförmige Dach-Constructionen 189
§ 30. Kuppel von 100m Spannweite 190
§ 31. Vortheilhaftestes Krümmungsprofil der Kuppeln 203
§ 32. Kuppel mit gegliederten Rippen und Ringen 205

Zehnter Abschnitt.

§ 33. Balken-Brücken mit mehreren Oeffnungen 214
§ 34. Balken-Brücke von 160m Spannweite der Mittel-Oeffnung und je 130m Spannweite der Seiten-Oeffnungen 219
§ 35. Vortheilhafteste Eintheilung der Spannweite 230

Elfter Abschnitt.

§ 36. Bestimmung der Drehpunkte und Hebelarme auf dem Wege der Rechnung 236
§ 37. Anwendung der Methode der statischen Momente zur Ermittelung einer gewisse vorgeschriebene Bedingungen erfüllenden Form des Trägers 242

Seite
§ 38. Schwedler'scher Träger 245
§ 39. Träger mit gleichen Maximalspannungen der Diagonalen 251
§ 40. Träger mit gleichen Spannungen im Bogen. (Pauli'scher Träger) . 257

Zweite Abtheilung.

Bestimmung der erforderlichen Querschnittsdimensionen nebst Untersuchungen über die Elasticitätswiderstände belasteter Träger.

Zwölfter Abschnitt.

§ 41. Bestimmung der Querschnitte für die Theile der Haupt-Construction 269
§ 42. Absteifung gegen Seitendruck des Windes, und horizontale Stösse . 271
§ 43. Berechnung der Zwischenträger 275

Dreizehnter Abschnitt.

§ 44. Durchbiegung belasteter Träger 288
§ 45. Senkung des Scheitels bei parabolischen Trägern 292
§ 46. Durchbiegung der Fachwerk- und Gitter-Brücken 295

Vierzehnter Abschnitt.

§ 47. Theorie der zusammengesetzten Systeme 298
§ 48. Fachwerk-Träger ohne Diagonalen 306
§ 49. Einfluss der Temperatur-Aenderungen 310

Funfzehnter Abschnitt.

§ 50. Widerstand des prismatischen Balkens gegen Biegung 314
§ 51. Elastische Linie 324
§ 52. Widerstand gegen Zerknicken 338

Sechzehnter Abschnitt.

Berechnung einer combinirten Gitter- und Hänge-Brücke von 60^{m} Spannweite.

§ 53. Voruntersuchung zur Ermittelung des vortheilhaftesten Höhenverhältnisses 345
§ 54. Berechnung der durch Temperatur-Aenderungen hervorgebrachten Spannungen 349
§ 55. Berechnung der von der permanenten Belastung hervorgebrachten Spannungen 352
§ 56. Berechnung der von einer ungleichförmig über die Brückenlänge vertheilten Belastung hervorgebrachten Spannungen 353
§ 57. Ermittelung der ungünstigsten Belastungszustände für den Gitterbalken 358
§ 58. Berechnung der von der mobilen Last in den Gurtungen des Gitterbalkens hervorgebrachten Spannungen 361

Seite

§ 59. Berechnung der Maximalspannungen in den Gurtungen des Gitterbalkens 364
§ 60. Berechnung der von der mobilen Last hervorgebrachten Abscheerungskraft 365
§ 61. Berechnung der Maximalspannungen in den Gitterstäben 366
§ 62. Berechnung der Spannungen in den Windketten und Windstreben 367
§ 63. Einfluss der Dehnung der Spannketten 371
§ 64. Recapitulation der Rechnungs-Resultate 374
§ 65. Vortheilhafteste Aufhängungsweise für den Gitterbalken 377
§ 66. Rechtfertigung der angewendeten Methode 381

Erste Abtheilung.

Berechnung der Spannungszahlen.

Erster Abschnitt.

§ 1.

Vorbemerkungen.

Bei grösseren Dach- und Brücken-Constructionen ist richtige und möglich sparsamste Vertheilung des Materials Haupterforderniss, nicht allein, weil die Kosten des Materials vergleichsweise gross sind gegen die Arbeitskosten bei solchen Bauwerken, vielmehr besonders deshalb: weil das verwendete Material eine todte Last bildet, von deren Kleinheit oft die Möglichkeit des ganzen Unternehmens abhängt. Eine gute Construction soll der Forderung genügen: dass überall die Widerstandsfähigkeit des Materials vollkommen ausgenutzt und nirgends überflüssiges Material verwendet sei. Diese Bedingung lässt sich auch so formuliren: alle Theile der Construction sollen — ein jeder bei dem für ihn ungünstigsten Belastungszustande — das Maximum der für zulässig erachteten Spannung erreichen.

Bei Stäben, welche der Länge nach gezogen oder gedrückt werden, ist diese Bedingung erfüllbar, weil in allen Punkten der Querschnittsfläche eines solchen Stabes stets gleiche Spannung stattfindet. Bei Stäben, deren Biegungswiderstand in Anspruch genommen wird, hingegen nie, da die von der Biegung herrührenden Spannungen immer ungleichmässig im Innern des Stabes sich vertheilen. Eine gute Construction soll daher wo möglich aus Theilen zusammengesetzt sein, in denen nur Längsspannungen — keine Biegungsspannungen — vorkommen, also aus gezogenen und gedrückten Stangen.

In der Praxis hat sich das Streben nach diesem Ziele bereits bemerkbar gemacht; in dem Maasse wie man zu immer grösseren

Unternehmungen vorschritt, hat man derartigen Constructionen mehr und mehr sich angenähert. Das Streben, Material zu sparen, führte vom massiven rechteckigen Balken zum I- und Π-förmigen Querschnitt, und indem man ferner die massive Blechwand durch einzelne Stangen ersetzen lernte, gelangte man schliesslich zu jenen Stangenverbindungen, in denen nur Längsspannungen vorkommen. Die eisernen Dächer so wie die Gitter- und Fachwerk-Brücken der neueren Zeit sind Beispiele derartiger Constructionen.

Die oben genannte Bedingung erfordert: dass die Stangen in den Verbindungspunkten durch einfache Gelenkbolzen (Scharniere) verbunden werden. Wenn statt des einfachen Gelenkbolzens, welcher die Drehung der Stange um ihren Endpunkt nicht hindert, mehrfache Vernietung angewendet wird, wie man das noch gegenwärtig bei vielen Gitter- und Fachwerk-Brücken sieht, so wird der Zweck theilweise verfehlt, da in diesem Falle Biegungsspannungen unvermeidlich den Längsspannungen sich zugesellen. Abgesehen von der unvortheilhafteren Materialverwendung tritt dann noch der bei grösseren, wichtigen Bauten nicht unerhebliche Uebelstand ein, dass die wirklichen Maximalspannungen der Controle mehr oder weniger sich entziehen, während bei theoretisch richtigen Constructionen die Spannung in jedem Theile auf das Genaueste ermittelt werden kann. Es ist bemerkenswerth, dass gerade die den Anforderungen der Theorie entsprechenden Constructionen auch zugleich auf die einfachste Weise sich berechnen lassen.

Bei allen nachfolgend gewählten Beispielen wird durchweg vorausgesetzt, dass je zwei Stangen da, wo sie zusammentreffen, durch einen Gelenkbolzen verbunden sind. Zugleich wird angenommen, dass diese Gelenkpunkte ausschliesslich die Belastungspunkte bilden. Eine solche Lastvertheilung kann immer verwirklicht werden durch Einschaltung besonderer Zwischenträger, welche gleichsam als kleinere Brücken die Abtheilungen zwischen den einzelnen Gelenkpunkten überbrücken. Wie weit es zweckmässig ist, diese Zwischenträger als gesonderte Theile zu construiren, oder vielmehr sie mit der Hauptconstruction nachher zu verschmelzen: diese Frage wird in einem späteren Abschnitt erörtert werden.

Was das Eigengewicht der Construction betrifft, so soll dasselbe wie eine gleichförmig über die ganze Spannweite ausgebreitete Belastung angesehen werden, welche ebenfalls nach dem obigen Gesetze auf die einzelnen Belastungspunkte sich ver-

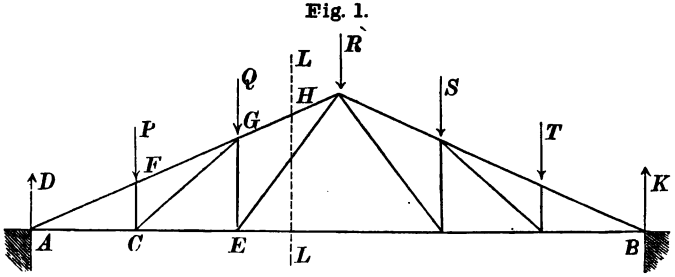
theilt — eine Annahme, deren Zulässigkeit gleichfalls gelegentlich einer näheren Prüfung unterzogen werden soll.

§ 2.

Methode der statischen Momente.

Die Totalbelastung der in Fig. 1 dargestellten Dach-Construction soll aus den fünf einzelnen Belastungen P, Q, R, S, T bestehen,

Fig. 1.

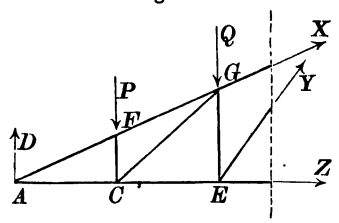


welche als an den oberen Knotenpunkten aufgehängte Gewichte zu betrachten sind. Diese fünf Belastungen erzeugen an den beiden Auflagerpunkten A und B die Gegendrücke D und K, welche zusammen so viel wie die ganze Belastung betragen und nach den bekannten Regeln der Statik leicht berechnet werden können. Wenn z. B. die ganze Spannweite AB durch die Verticalen der Belastungspunkte in 6 gleiche Theile zerlegt wird, so ergeben sich für diese Gegendrücke die Werthe:

$$D = \tfrac{1}{6}T + \tfrac{2}{6}S + \tfrac{3}{6}R + \tfrac{4}{6}Q + \tfrac{5}{6}P$$
$$K = \tfrac{5}{6}T + \tfrac{4}{6}S + \tfrac{3}{6}R + \tfrac{2}{6}Q + \tfrac{1}{6}P.$$

Trennt man durch einen Schnitt nach der Linie LL die ganze Stangenverbindung in zwei Theile, so wird jeder der beiden Theile, z. B. der Theil A (Fig. 2), nur dann im Gleichgewichte bleiben, wenn bei jeder der durchschnittenen Stangen an der Schnittstelle eine Kraft hinzugefügt wird, welche die Wirkung des abgeschnittenen Theils genau ersetzt. **Diese Kraft muss allemal mit der Richtung der Stange zusammenfallen,** da sie sonst die Stange um ihren Endpunkt drehen würde; sie ist eben das, was man die Spannung der Stange nennt.

Fig. 2.



Die Spannungen X, Y, Z der drei durchschnittenen Stangen sind also Kräfte, welche in Verbindung mit den übrigen Kräften D, P, Q den Theil A im Gleichgewicht erhalten. Die Richtungen sämmtlicher Kräfte liegen in einer und derselben verticalen Ebene, und für solche Kräfte gelten bekanntlich folgende drei Gleichgewichtsbedingungen: erstens, die Summe der vertical aufwärts wirkenden Kräfte muss gleich der Summe der vertical abwärts wirkenden Kräfte sein; zweitens: die Summe der nach rechts wirkenden Horizontalkräfte muss gleich der Summe der nach links wirkenden Horizontalkräfte sein; drittens: muss (indem das ganze Stück als ein Hebel angesehen wird, der an einer beliebigen Stelle in der Ebene seinen festen Drehpunkt hat) die Summe der statischen Momente der rechts drehenden Kräfte gleich der Summe der statischen Momente der links drehenden Kräfte sein. Diese drei Bedingungen lassen sich kürzer durch folgende drei Gleichungen ausdrücken:

$$\sum(H) = 0, \quad \sum(V) = 0, \quad \sum(M) = 0,$$

worin allgemein: H die horizontale Seitenkraft, V die verticale Seitenkraft, M das statische Moment einer Kraft bedeutet, und das Zeichen Σ ausdrückt: dass die Kräfte oder Momente mit Berücksichtigung ihrer Richtungen als positive und negative Grössen zu einer algebraischen Summe zusammengefasst werden sollen. Da auch jene Spannungen zu diesen Grössen ihre Beiträge liefern, so lassen sich aus diesen drei Gleichungen die drei unbekannten Grössen X, Y, Z berechnen. In gleicher Weise können durch andere Schnitte und Wiederholung desselben Verfahrens die Spannungen der übrigen Stangen bestimmt werden.

Diese Methode führt zwar immer sicher zum Ziele, leidet aber an zwei wesentlichen Mängeln. Erstlich enthalten die Grössen H und V in jenen Gleichungen die Cosinus und Sinus der Winkel, welche die Stangen mit der Horizontalen einschliessen, und müssen diese Grössen also zuvor bestimmt werden. Zweitens — und das ist der Hauptübelstand — muss man, um irgend **eine** der Spannungen zu bestimmen, im Allgemeinen allemal **drei** Gleichungen auflösen.

Es giebt eine einfache Methode von allgemeinster Anwendbarkeit, welche frei von diesen Uebelständen ist. Dieselbe besitzt ausserdem den Vorzug, dass sie nur das Gesetz des Hebels (in seiner allgemeineren Form das Gesetz der statischen Momente)

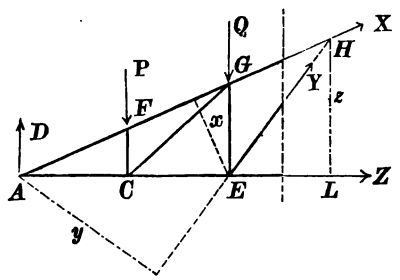
als bekannt voraussetzt, somit von Jedem, der die Anfangsgründe der Mechanik kennt, mit Verständniss angewendet werden kann. Diese Methode besteht darin, dass man von jenen drei Gleichungen ausschliesslich die dritte, nämlich die **Gleichung der statischen Momente,** zur Lösung der Aufgabe benutzt. Man kann nämlich die Freiheit der Wahl des Drehpunktes für die statischen Momente sich zu Nutze machen in der Weise: dass man zur Bestimmung der einen unbekannten Kraft allemal den Durchschnittspunkt der beiden anderen unbekannten Kräfte als Drehpunkt wählt. Dadurch fallen die statischen Momente der beiden anderen unbekannten Kräfte weg, weil ihre Hebelarme Null sind, und man erhält eine Gleichung, aus welcher die gesuchte Spannung als einzige unbekannte Grösse genau bestimmt werden kann.

Als Hülfsgrössen kommen in der Rechnung nur die Hebelarme der einzelnen Kräfte vor und diese brauchen nicht berechnet zu werden, sondern lassen sich mit hinlänglicher Genauigkeit in der Zeichnung direct abmessen.

Die allgemeine Regel, welche sich hieraus ergiebt, lässt sich in folgenden Worten aussprechen:

Man denke sich die Construction in zwei Theile zerlegt durch einen Schnitt, welcher wo möglich nur drei Stangen trifft, und denke sich an den Schnittstellen die Kräfte X, Y, Z **angebracht, welche die Spannungen der drei durchschnittenen Stangen bilden. Man stelle für Einen jener beiden Theile die Gleichung der statischen Momente auf und wähle, wenn man** X **bestimmen will, den Durchschnittspunkt von** Y **und** Z **als Drehpunkt. Will man** Y **bestimmen, so wähle man den Durchschnittspunkt von** X **und** Z **als Drehpunkt. Will man** Z **bestimmen, so wähle man den Durchschnittspunkt von** X **und** Y **als Drehpunkt.**

Fig. 3.



Bei der oben gewählten Aufgabe würde man also z. B. zur Bestimmung der Kraft X den Durchschnittspunkt E (Fig. 3) der beiden Kräfte Y, Z als Drehpunkt wählen und erhielte dann die Gleichung:

$$X.x - P.\overline{CE} + D.\overline{AE} = 0,$$

oder $$X = \frac{P.\overline{CE} - D.\overline{AE}}{x}.$$

Zur Bestimmung von Y wählt man den Durchschnittspunkt A der beiden Kräfte X, Z als Drehpunkt und erhält die Gleichung:

$$-Y.y + P.\overline{AC} + Q.\overline{AE} = 0,$$

oder

$$Y = \frac{P.\overline{AC} + Q.\overline{AE}}{y}.$$

Zur Bestimmung von Z wählt man den Durchschnittspunkt H der beiden Kräfte X, Y als Drehpunkt und erhält die Gleichung:

$$-Z.z - Q.\overline{EL} - P.\overline{CL} + D.\overline{AL} = 0,$$

oder

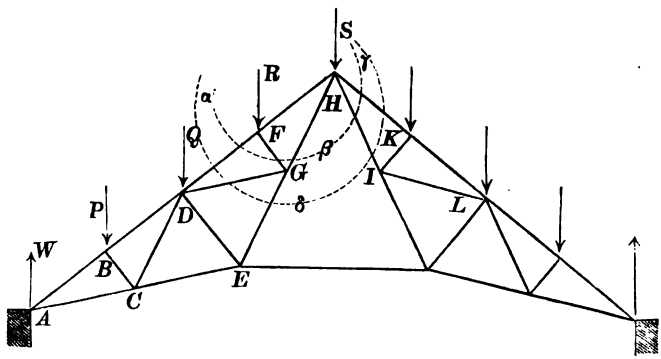
$$Z = \frac{-Q.\overline{EL} - P.\overline{CL} + D.\overline{AL}}{z}.$$

Es ist überflüssig, nachzuweisen, dass in gleicher Weise jede der übrigen Spannungen bestimmt werden kann.

Diese Methode führt direct zum Ziele bei allen solchen Stangenverbindungen, in denen jede einzelne Stange sich erreichen lässt durch einen Schnitt, welcher nicht mehr als drei Stangen trifft.

Bei complicirteren Constructionen, wie die in Fig. 4 dargestellte, kann der Fall eintreten, dass einzelne Stangen übrig

Fig. 4.

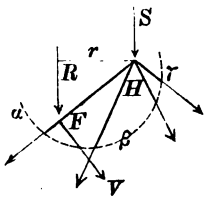


bleiben, wie z. B. FG, DG, DE, welche nur durch Schnitte zu erreichen sind, die mehr als drei Stangen treffen. Auch in solchen Fällen kann man direct zum Ziele kommen, wenn es gelingt, den Schnitt — der nach Belieben geradlinig oder krummlinig geführt werden kann — so zu legen, dass sämmtliche geschnittene Stangen bis auf die Eine, deren Spannung man bestimmen will, in **einem** Punkte zusammentreffen.

So z. B. kann man die Spannung V in der Stange FG bestimmen, indem man den Schnitt $\alpha\,\beta\,\gamma$ führt und für das heraus-

geschnittene Stück (Fig. **5**) die Momentengleichung in Bezug auf H als Drehpunkt aufstellt:

Fig. 5.



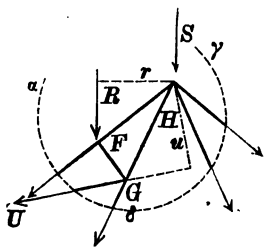
$$-V.\overline{FH}-R.r=0,$$

oder

$$V=-\frac{R.r}{\overline{FH}}.$$

Ebenso die Spannung U in dem Stück DG, indem man den Schnitt $\alpha\delta\gamma$ führt und für das herausgeschnittene Stück (Fig. **6**) die Momentengleichung in Bezug auf H als Drehpunkt bildet:

Fig. 6.



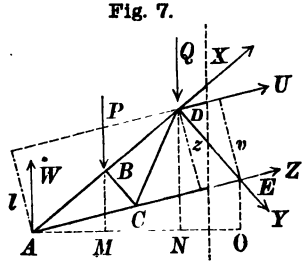
$$U.u-R.r=0,$$

oder

$$U=\frac{R.r}{u}.$$

Auf gleiche Weise sind KJ und LJ zu bestimmen. Die übrigen Stangen lassen sich sämmtlich erreichen entweder durch Schnitte, welche nicht mehr als drei Stangen treffen, oder durch Schnitte, welche vier Stangen treffen, darunter Eine, deren Spannung bereits vorher bestimmt werden konnte. In beiden Fällen ist das frühere Verfahren anwendbar.

Fig. 7.



So z. B. nachdem U bekannt ist, ergeben sich für die Spannungen X, Y, Z der drei Stücke DF, DE, CE die Gleichungen (s. Fig. **7**):

$$X.\overline{DE}+U.v-Q.\overline{NO}-P.\overline{MO}+W.\overline{AO}=0 \text{ (Drehpunkt } E)$$

$$Y.\overline{AD}+U.l+Q.\overline{AN}+P.\overline{AM}=0 \text{ (Drehpunkt } A)$$

$$-Z.z+W.\overline{AN}-P.\overline{MN}=0 \text{ (Drehpunkt } D).$$

Aus jeder dieser Gleichungen lässt sich die darin vorkommende Unbekannte direct bestimmen.

Die Vorzüge der angegebenen Methode machen sich somit auch bei den complicirteren Aufgaben, wie die zuletzt als Beispiel gewählte, noch geltend. Sie springen noch mehr in die Augen, wenn man erwägt, dass nur der Anfänger nöthig haben wird, für

die einzelnen Berechnungen besondere Figuren sich zu machen. Der Geübtere wird mit Leichtigkeit sämmtliche Gleichungen direct aus der Hauptfigur abschreiben lernen.

Nachdem an den obigen Beispielen die Methode in ihren allgemeinen Grundzügen erklärt worden ist, werden die Einzelheiten der Anwendung am besten an bestimmten Zahlenbeispielen zu erläutern sein. Zum Verständniss der nachfolgenden Rechnungen wird es ausreichen: wenn für einzelne Stangen, die als Repräsentanten anderer gleichliegender zu betrachten sind, die Construction und Berechnung ausführlich mitgetheilt, für die übrigen dagegen nur die allgemeine Momentengleichung aufgestellt wird.

Was die Bedeutung des Vorzeichens der Momente betrifft, so ist es zwar an sich gleichgültig, ob man den rechtsdrehenden oder den linksdrehenden Momenten das positive Vorzeichen giebt. Um Irrungen zu vermeiden, empfiehlt es sich jedoch, eine gewisse Consequenz in der Wahl des Vorzeichens zu beobachten, und sollen deshalb in den nachfolgenden Rechnungen durchweg die Momente der **rechts** herum drehenden Kräfte*) als positive, die der **links** herum drehenden Kräfte als negative Grössen aufgeführt werden.

Es sollen ferner — wie schon bei den vorigen Beispielen geschehen ist — sämmtliche Spannungen als Zug-Spannungen aufgefasst werden. Positive Spannungen bedeuten also wirkliche Zug-Spannungen. Negative Spannungen bedeuten Druck-Spannungen.

§ 3.

Dach von hundert Fuss Spannweite.

(Exercierhaus der Kaserne am Welfenplatz in Hannover.)

Das Gewicht des ganzen Daches beträgt pro Quadratfuss der Grundrissfläche 11,3 ℔. Für Schnee- und Wind-Druck werden 20 ℔ pro Quadratfuss gerechnet. Die Totalbelastung beträgt demnach 31,3 ℔ pro Quadratfuss.

Die Entfernung der einzelnen Binder von einander beträgt $15\frac{1}{3}$ Fuss, die Spannweite 100 Fuss; auf jeden Binder kommen also:

$15\frac{1}{3} \cdot 100$ Quadratfuss der Grundrissfläche,

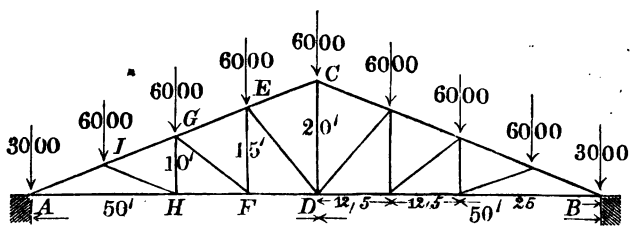
folglich

$15\frac{1}{3} \cdot 100 \cdot 31{,}3$ ℔ Druck

*) d. h. derjenigen Kräfte, welche das Stück so zu drehen streben, wie der Zeiger einer Uhr sich dreht.

oder in runder Summe 48000 ℔ Totalbelastung. Für jede der 8 Abtheilungen (s. Fig. **8**) beträgt daher die Belastung 6000 ℔.

Fig. 8.

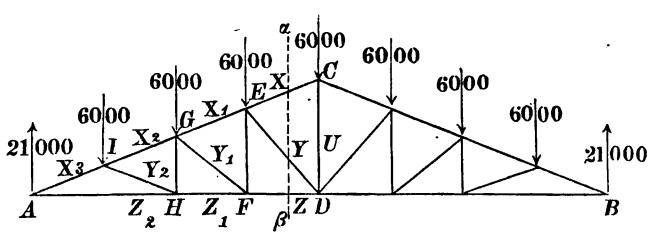


Wenn man sich — der in der Einleitung erwähnten Voraussetzung gemäss — in jeder Abtheilung diese 6000 ℔ mittelst eines besonderen Zwischenträgers zur Hälfte auf jeden der beiden angrenzenden Knotenpunkte übertragen denkt, so kommen auf jeden der 7 mittleren Knotenpunkte 6000 ℔ Belastung, auf jeden der beiden Endpunkte 3000 ℔, welche letzteren beiden Gewichte von den Auflagerpunkten direct aufgenommen werden. Jeder der beiden Auflagerpunkte trägt im Ganzen 24000 ℔, und ist also mit Abrechnung der direct aufgenommenen 3000 ℔ der Gegendruck derselben gegen die Stangenverbindung 21000 ℔.

Es wirken also überhaupt 9 äussere Kräfte auf die Stangenverbindung: 7 abwärtswirkende von je 6000 ℔ auf die 7 mittleren Knotenpunkte, und 2 aufwärtswirkende von je 21000 ℔ an den beiden Auflagerpunkten.

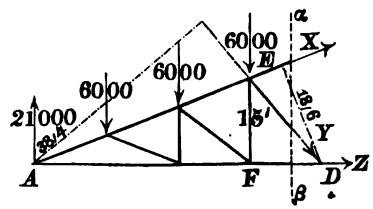
Um die Spannungen *X, Y, Z* im Mittelfelde (s. Fig. **9**) zu bestimmen, denkt man sich durch einen Schnitt $\alpha\ \beta$ den

Fig. 9.



einen Theil (Fig. **10**) von dem anderen getrennt und durch die an den Schnittstellen angebrachten Kräfte *X, Y, Z* den Gleichgewichtszustand wieder hergestellt. Sieht man das ganze Stück

Fig. 10.



(Fig. **10**) als einen Hebel an, der in D seinen festen Drehpunkt hat, so erhält man als Gleichung der statischen Momente in Beziehung auf diesen Drehpunkt*):

$$0 = X \,.\, 18{,}6 + 21000 \,.\, 50 - 6000 \,.\, 12{,}5 - 6000 \,.\, 25 - 6000 \,.\, 37{,}5$$

woraus sich ergiebt:

$$X = -\,32300 \text{ ℔}.$$

Um Y zu bestimmen, wählt man den Durchschnittspunkt A der beiden Kräfte X, Z als Drehpunkt und erhält die Gleichung:

$$0 = Y \,.\, 38{,}4 + 6000 \,.\, 12{,}5 + 6000 \,.\, 25 + 6000 \,.\, 37{,}5$$

$$Y = -\,11700 \text{ ℔}.$$

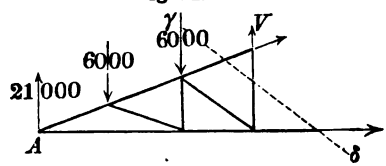
Zur Bestimmung von Z dient die Momentengleichung in Beziehung auf den Punkt E:

$$0 = -\,Z \,.\, 15 + 21000 \,.\, 37{,}5 - 6000 \,.\, 12{,}5 - 6000 \,.\, 25$$

$$Z = +\,37500 \text{ ℔}.$$

Um die Spannung V der angrenzenden Vertical-Stange zu ermitteln, legt man den Schnitt schräg in der Richtung $\gamma\,\delta$ (s. Fig. **11**) und wählt den Durchschnittspunkt A der beiden mit durchschnittenen Stangen als Drehpunkt. Man erhält dann die Momentengleichung:

Fig. 11.



$$0 = -\,V \,.\, 37{,}5 + 6000 \,.\, 12{,}5 + 6000 \,.\, 25$$

$$V = +\,6000 \text{ ℔}.$$

Auf gleiche Weise erhält man für die gleichliegenden Stücke der übrigen Abtheilungen die Gleichungen:

$0 = X_1 \,.\, 13{,}9 + 21000 \,.\, 37{,}5 - 6000 \,.\, 12{,}5 - 6000 \,.\, 25$ (Drehpunkt F)

$X_1 = -\,40400 \text{ ℔}.$

$0 = Y_1 \,.\, 23{,}5 + 6000 \,.\, 12{,}5 + 6000 \,.\, 25$ (Drehpunkt A)

$Y_1 = -\,9570 \text{ ℔}.$

$0 = -\,Z_1 \,.\, 10 + 21000 \,.\, 25 - 6000 \,.\, 12{,}5$ (Drehpunkt G)

$Z_1 = +\,45000 \text{ ℔}.$

$0 = -\,V_1 \,.\, 25 + 6000 \,.\, 12{,}5$ (Drehpunkt A)

$V_1 = +\,3000 \text{ ℔}.$

$0 = X_2 \,.\, 9{,}3 + 21000 \,.\, 25 - 6000 \,.\, 12{,}5$ (Drehpunkt H)

$X_2 = -\,48400 \text{ ℔}.$

---

*) Die Bestimmung der Hebelarme auf dem Wege der **Rechnung** findet man im 11. Abschnitte dieses Buches.

$0 = Y_2 \cdot 9{,}3 + 6000 \cdot 12{,}5$ (Drehpunkt A)

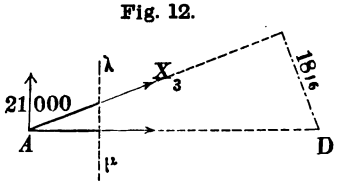
$Y_2 = -8100$ ℭ.

$0 = -Z_2 \cdot 5 + 21000 \cdot 12{,}5$ (Drehpunkt J)

$Z_2 = +52500$ ℭ.

Zur Bestimmung von X_3 endlich wäre der Schnitt nach der Linie $\lambda\,\mu$ (s. Fig. **12**) zu führen, welche ausnahmsweise nur zwei Stangen trifft. In solchen Fällen kann man einen beliebigen Punkt in der Richtung der mitdurchschnittenen Stange als Drehpunkt wählen, z. B. hier den Punkt D; man erhält somit die Gleichung:

Fig. 12.



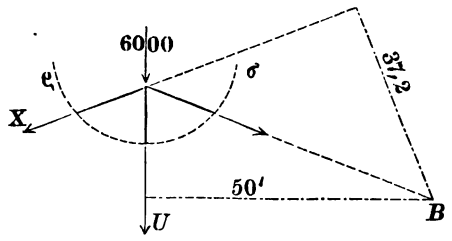
$0 = X_3 \cdot 18{,}6 + 21000 \cdot 50$

$X_3 = -56500$ ℭ.

Die einzige Stange, deren Spannung nicht **unmittelbar** nach der vorigen Methode bestimmt werden kann, ist die Vertical-Stange in der Mitte.

Um die Spannung U zu berechnen, muss die Spannung einer der angrenzenden Stangen schon vorher bestimmt sein. Nachdem nun $X = -32300$ ℭ bereits gefunden ist, kann man zur Bestimmung von U z. B. den Schnitt $\rho\,\sigma$ (s. Fig. **13**) führen und den Punkt B als Drehpunkt wählen. Es führt dies zu der Momenten-Gleichung:

Fig. 13.

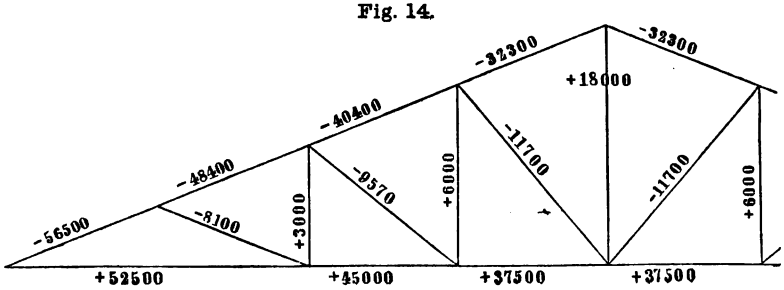


$$0 = -U \cdot 50 - 6000 \cdot 50 - (-32300) \cdot 37{,}2,$$

woraus sich ergiebt: $U = +18000$ ℭ.

Die Resultate der obigen Rechnung sind in Fig. **14** übersichtlich zusammengestellt.

Fig. 14.

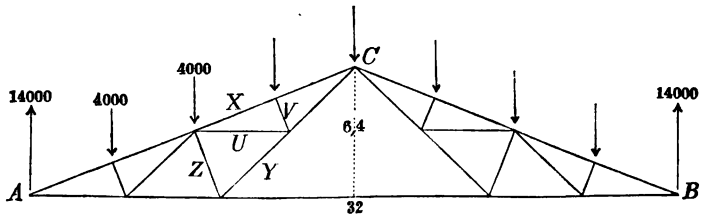


§ 4.

Dach von 32m Spannweite.

Als Totalbelastung der in Fig. **15** dargestellten Dach-Contruction sind 32000 Kil., also für jeden Meter der Spannweite 1000 Kil.

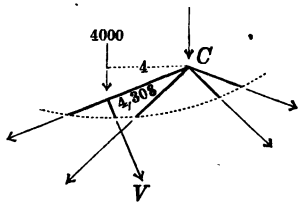
Fig. 15.



angenommen. Man erhält demnach auf dieselbe Art wie an dem vorigen Beispiele gezeigt wurde, für jeden der 7 Belastungspunkte 4000 Kil. Belastung und an jedem der beiden Auflagerpunkte einen Gegendruck von 14000 Kil.

Bei der Berechnung der in Fig. **15** mit *V, U, X, Y, Z* bezeichneten Spannungen würde die bei dem vorigen Zahlenbeispiele angewendete Methode nicht unmittelbar zum Ziele führen. Es ist hier daher das am Schlusse des § 2 erklärte Verfahren anzuwenden.

Fig. 16.

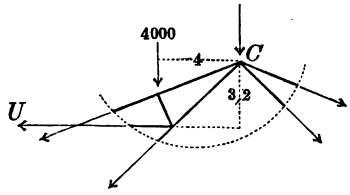


Um die Spannung *V* zu berechnen, hat man sich den in Fig. **16** dargestellten Theil aus der ganzen Stangenverbindung herausgeschnitten zu denken und die Gleichung der statischen Momente aufzustellen in Bezug auf den Punkt *C* als Drehpunkt; man erhält dann die Gleichung:

$$0 = -V.4{,}308 - 4000.4,$$

oder $V = -3714$ Kil.

Fig. 17.

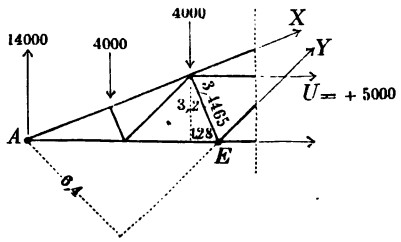


Auf ähnliche Weise findet man die Spannung *U*, indem man für den in Fig. **17** dargestellten Theil die Gleichung der statischen Momente aufstellt, nämlich aus der Gleichung:

$$0 = U.3{,}2 - 4000.4 \quad \text{oder} \quad U = +5000 \text{ Kil.}$$

Nachdem die Spannung U gefunden ist, kann man nunmehr die Spannung X aus Fig. **18** bestimmen, indem man den Punkt E als Drehpunkt wählt und für U den gefundenen Werth substituirt, aus der Gleichung:

Fig. 18.



$$0 = X \,.\, 3{,}4465 + 14000 \,.\, 9{,}28 - 4000\,(1{,}28 + 5{,}28) + 5000 \,.\, 3{,}2$$

oder

$$X = -\,34725 \text{ Kil.}$$

Ebenso findet man die Spannung Y, indem man den Punkt A als Drehpunkt wählt, aus der Gleichung:

$$0 = -\,Y \,.\, 6{,}4 + 4000\,(4 + 8) + 5000 \,.\, 3{,}2$$

oder

$$Y = +\,10000 \text{ Kil.}$$

Zur Bestimmung der in Fig. **15** mit Z bezeichneten Spannung würde man den Schnitt in schräger Richtung links an dem Punkte E vorbeizuführen haben und in Bezug auf den Punkt A als Drehpunkt die Gleichung erhalten:

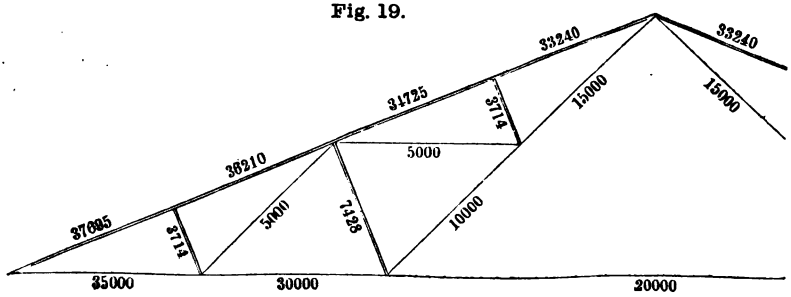
$$0 = Z \,.\, 8{,}616 + 4000\,(4 + 8) + 5000 \,.\, 3{,}2$$

oder

$$Z = -\,7428 \text{ Kil.}$$

Von den übrigen neun Stangen (der linken Hälfte) kann eine jede erreicht werden durch einen Schnitt, welcher nicht mehr als drei Stangen trifft. Die Spannungen derselben können daher ohne Weiteres mittelst des bei dem vorigen Zahlenbeispiele angewendeten Verfahrens berechnet werden. Die Resultate dieser Berechnung sind in Fig. **19** zusammengestellt. Da negative Spannungszahlen Druckspannungen bedeuten, so sind in der Figur diejenigen Stangen, deren Spannungszahlen negativ sind, durch Doppellinien als gedrückte Stangen gekennzeichnet, und dafür die Minus-Zeichen vor jenen Zahlen weggelassen.

Fig. 19.



Zweiter Abschnitt.

§ 5.

Anwendung der Methode auf die Berechnung von Brücken-Constructionen.

Ein Hauptvorzug der empfohlenen Methode besteht, wie oben bereits hervorgehoben wurde, darin, dass man aus der Construction ein beliebiges Stück herausgreifen und sofort durch eine einzige Gleichung die Spannung in demselben bestimmen kann. Dazu kommt aber noch ein zweiter, welcher sie zu der Berechnung der Brückenträger ganz besonders geeignet macht. Jene **eine** Gleichung lässt nämlich aus ihrem Bau sogleich erkennen, welche von den Belastungen auf Vermehrung und welche von den Belastungen auf Verminderung der Spannung in dem betreffenden Stücke hinwirken. Um also das Maximum der Spannung zu finden, braucht man nur alle diejenigen Belastungen aus der Gleichung fortzulassen, welche auf Verminderung hinwirken. Um das Minimum zu finden (welches event. als negative Grösse Maximum der Druckspannung bedeutet), lässt man alle diejenigen Belastungen fort, welche auf Vermehrung der Spannung hinwirken. Selbstverständlich bezieht sich das lediglich auf die veränderlichen Belastungen.

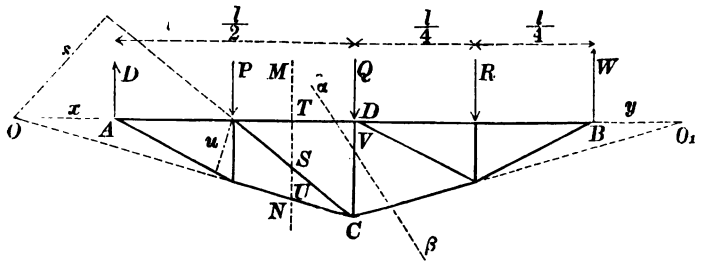
Bei dem vorigen Beispiel kam dieser Umstand nicht in Betracht, weil bei jener Construction — wie man sich leicht überzeugen kann — das Hinwegnehmen irgend einer der Belastungen in keinem Constructionstheile eine Verstärkung der (Zug- oder Druck-) Spannung hervorbringen konnte. Bei solchen Constructionsformen dagegen, wie sie für Brückenträger meistens gewählt werden — auch bei manchen Dach-Constructionen, wie später gezeigt werden soll — ist es von Wichtigkeit, die Veränderlichkeit der Belastung*) zu berücksichtigen, weil nicht allemal bei voller

*) Wie z. B. die temporären Belastungen, welche bei der Fahrt eines Bahnzuges über eine Eisenbahnbrücke oder für Dach-Constructionen bei einseitigem Schnee- und Wind-Druck eintreten.

Belastung die stärkste Spannung in jedem Constructionstheile eintritt.

So z. B. erhält man zur Bestimmung der Spannung S in nebenstehender Construction (Fig. **20**), wenn man den Schnitt $M\,N$

Fig. 20.



führt und O als Drehpunkt nimmt, die Momentengleichung:

$$S \,.\, s - D \,.\, x + P\left(x + \frac{l}{4}\right) = 0$$

oder, wenn man für D seinen Werth $\frac{3}{4}\ P + \frac{Q}{2} + \frac{R}{4}$ setzt:

$$S = \frac{-\ P \,.\left(\frac{x}{4} + \frac{l}{4}\right) + \frac{Q}{2} \,.\, x + \frac{R}{4} \,.\, x}{s}.$$

Das Glied, welches P enthält, ist negativ; die Glieder, welche Q und R enthalten, sind positiv. Man erkennt daran sofort: dass P auf Verminderung, Q und R dagegen auf Vermehrung der Spannung S hinwirken und findet, indem man das negative Glied, welches P enthält, fortlässt:

$$S\,(\max) = \frac{\frac{Q}{2}x + \frac{R}{4} \,.\, x}{s}$$

als grösste Zugspannung, und indem man die positiven Glieder, welche Q und R enthalten, fortlässt:

$$S\,(\min) = \frac{-\ P \,.\left(\frac{x}{4} + \frac{l}{4}\right)}{s}$$

als kleinste Zugspannung oder grösste Druckspannung.

Der Einfachheit wegen sind hier die Stangen selbst als gewichtlos und die Gewichte P, Q, R als temporäre Belastungen angesehen.

Die beiden Gleichungen für T und U:

$$T \cdot \overline{CD} - P \cdot \frac{l}{4} + D \frac{l}{2} = 0$$

$$- U \cdot u + D \cdot \frac{l}{4} = 0,$$

welche, wenn man für D seinen Werth setzt und sie auflöst, die Form annehmen:

$$T = \frac{- P \cdot \frac{l}{8} - Q \cdot \frac{l}{4} - R \cdot \frac{l}{8}}{\overline{CD}}$$

$$U = \frac{P \cdot \frac{3}{16} l + Q \cdot \frac{l}{8} + R \cdot \frac{l}{16}}{u}$$

lassen sogleich erkennen, dass diese beiden Constructionstheile bei voller Belastung am stärksten in Anspruch genommen werden.

Ebenso erhält man für V die Gleichung (Schnitt $\alpha\,\beta$, Drehpunkt O_1):

$$- V \cdot \left(y + \frac{l}{2}\right) - Q\left(y + \frac{l}{2}\right) - R\left(y + \frac{l}{4}\right) + W \cdot y = 0$$

oder, wenn man für W seinen Werth $\frac{3}{4} R + \frac{Q}{2} + \frac{P}{4}$ substituirt, und sie für V auflöst:

$$V = \frac{- R\left(\frac{y+l}{4}\right) - Q\left(\frac{y+l}{2}\right) + P \cdot \frac{y}{4}}{y + \frac{l}{2}}$$

und hieraus ergiebt sich:

$$V(\max) = + \frac{P \cdot \frac{y}{4}}{y + \frac{l}{2}}$$

als grösste Zugspannung,

$$V(\min) = \frac{- R \cdot \left(\frac{y+l}{4}\right) - Q\left(\frac{y+l}{2}\right)}{y + \frac{l}{2}}$$

als kleinste Zugspannung oder grösste Druckspannung.

Die Regel, welche sich hieraus ergiebt, lässt sich in folgenden Worten aussprechen:

Man nehme zunächst sämmtliche Punkte belastet an, stelle die Momentengleichung für den betreffenden Constructionstheil auf und ordne dieselbe so an, dass der Einfluss einer jeden Belastung durch ein einzelnes Glied von leicht erkennbarem Vorzeichen dargestellt wird. Man lasse alsdann von den temporären Belastungen das eine Mal alle

diejenigen fort, welche negativ in der Gleichung vorkommen, das andere Mal alle diejenigen, welche positiv darin vorkommen.

Oder kürzer: **in der Gleichung für die stärkste (Zug- oder Druck-) Spannung sollen die von den temporären Belastungen herrührenden Glieder immer einerlei Vorzeichen haben.**

Nur in dem **einen** Falle, wenn es sich trifft, dass schon in jener allgemeinen Gleichung sämmtliche temporäre Belastungen mit **einerlei** Vorzeichen vorkommen, führt die Auflösung derselben direct zu dem Werthe für die stärkste Spannung.

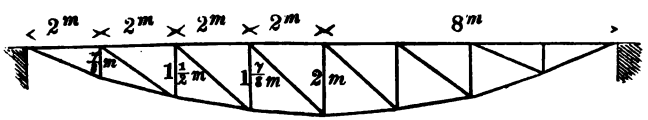
Nach dieser Regel wird bei Berechnung des nachfolgenden Zahlenbeispiels verfahren werden. Für jeden Constructionstheil soll zunächst die allgemeine Momenten-Gleichung aufgestellt werden (d. h. für volle Belastung), sodann mit Weglassung der dem Maximum (oder Minimum) entgegenwirkenden Belastungen die Gleichung der stärksten Spannung.

§ 6.

Parabolischer Träger von 16m Spannweite mit einfachem Diagonalen-System.

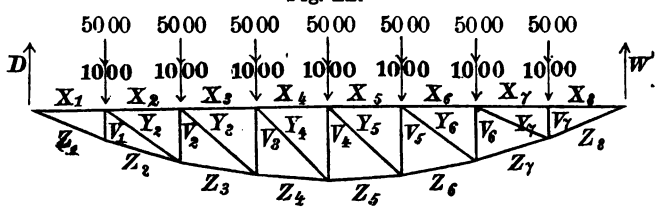
Die Dimensionen des Trägers sind in Fig. **21** eingeschrieben. Als Eigengewicht der Brücke sind 1000^k, als temporäre oder mobile Last 5000^k pro laufenden Meter für ein Gleis angenommen,

Fig. 21.



wovon auf jede der beiden Tragwände die Hälfte kommt. Da die Länge jedes der 8 Felder 2 Meter beträgt, so kommen auf

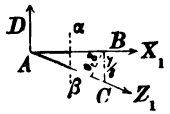
Fig. 22.



jeden Knotenpunkt 1000^k permanente und 5000^k mobile Belastung (s. Fig. **22**).

Um die Spannung X_1 zu bestimmen, legt man den Verticalschnitt $\alpha\,\beta$ durch das erste Feld und stellt für den Theil Fig. **23** die Momenten-Gleichung auf in Bezug auf den Punkt C als Drehpunkt:*)

Fig. 23.



$$0 = X_1 \,.\, \tfrac{7}{8} + D \,.\, 2.$$

Bei voller Belastung des Trägers ist der Gegendruck des Auflagerpunktes A:

$$D = 1000\,(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{7}{8}) + 5000\,(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{7}{8}).$$

Die Substitution dieses Werthes ergiebt für X_1 die Gleichung:

$$0 = X_1 \,.\, \tfrac{7}{8} + 1000\,(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{7}{8}) \,.\, 2 + 5000\,(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{7}{8}) \,.\, 2.$$

Sämmtliche 7 Glieder, welche von den temporären Belastungen herrühren, haben schon einerlei Vorzeichen. Die Auflösung dieser Gleichung ergiebt also direct die stärkste Spannung, und man erhält:

$$X_1\ (\min) = -\ 48000^{k}.$$

Für Z_1 ergiebt sich (ebenfalls aus Fig. **23**) als Momenten-Gleichung in Bezug auf den Drehpunkt B:

$$0 = -\ Z_1 \,.\, 0{,}8 + D \,.\, 2$$

oder nach Substitution des Werthes für D:

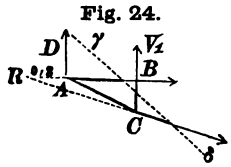
$$0 = -\ Z_1 \,.\, 0{,}8 + 1000\,(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{7}{8}) \,.\, 2 + 5000\,(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{7}{8}) \,.\, 2.$$

Auch hier haben sämmtliche mit 5000 multiplicirten Glieder einerlei Vorzeichen, die Auflösung der Gleichung führt also direct zu dem Werthe der stärksten Spannung, nämlich:

$$Z_1\ (\max) = +\ 52500^{k}.$$

Zur Bestimmung von V_1 wird der Schnitt $\gamma\ \delta$ geführt und für den Theil Fig. **24** die Momenten-Gleichung aufgestellt in Bezug auf den Durchschnittspunkt R der beiden mitdurchschnittenen Stangen:

Fig. 24.



$$0 = -\ V_1 \,.\, 2{,}8 - D \,.\, 0{,}8.$$

Die Substitution des Werthes für D ergiebt:

*) Die Bestimmung der Hebelarme auf dem Wege der Rechnung findet man im 11. Abschnitte dieses Buches.

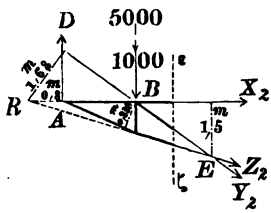
$$0 = -V_1 \cdot 2{,}8 - 1000\,(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{7}{8}) \cdot 0{,}8 - 5000\,(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{7}{8}) \cdot 0{,}8.$$

Sämmtliche mit 5000 multiplicirten Glieder haben einerlei Vorzeichen; die Gleichung ist also direct für V_1 aufzulösen, und man erhält:

$$V_1\,(\min) = -6000^{k}.$$

Zur Bestimmung von X_2, Y_2, Z_2 wird der Schnitt $\varepsilon\,\zeta$ geführt, und sind für den Theil Fig. **25** die Momenten-Gleichungen aufzustellen. Für X_2 wählt man E als Drehpunkt und erhält die Gleichung:

Fig. 25.



$$0 = X_2 \cdot 1{,}5 + D \cdot 4 - 1000 \cdot 2 - 5000 \cdot 2$$

oder nach Substitution des Werthes für D:

$$0 = X_2 \cdot 1{,}5 + 1000\,(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \ldots \tfrac{7}{8})\,4 + 5000\,(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \ldots \tfrac{7}{8})\,4 - 1000 \cdot 2 - 5000 \cdot 2.$$

In dieser Gleichung äussert sich der Einfluss der Belastung 5000^k des Punktes B in 2 Gliedern: das Eine $+ 5000 \cdot \frac{7}{8} \cdot 4$ enthält den Beitrag zum Auflagerdruck, das andere $- 5000 \cdot 2$ stellt die directe Einwirkung dar. Nach der oben gegebenen Regel sollen diese beiden Glieder zu einem einzigen, nämlich $5000 \cdot (\frac{7}{8} \cdot 4 - 2)$ vereinigt werden, und ist der Gleichung folgende Form zu geben:

$$0 = X_2 \cdot 1{,}5 + 1000\,[(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8})\,4 + (\tfrac{7}{8} \cdot 4 - 2)] + 5000\,[(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8})\,4 + (\tfrac{7}{8} \cdot 4 - 2)].$$

Man erkennt nun sogleich, dass sämmtliche mit 5000 multiplicirten Glieder positiv sind, dass also die Gleichung direct aufzulösen ist, um die stärkste Spannung zu erhalten, woraus sich ergiebt:

$$X_2\,(\min) = -48000^{k}.$$

Für Y_2 nimmt man den Punkt R als Drehpunkt und erhält, wenn man sogleich für D seinen Werth einführt, die Momenten-Gleichung:

$$0 = Y_2 \cdot 1{,}68 - 1000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8}) \cdot 0{,}8 - 5000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8}) \cdot 0{,}8 + 1000 \cdot 2{,}8 + 5000 \cdot 2{,}8,$$

welcher, um den Einfluss jeder Belastung durch ein einziges Glied darzustellen, folgende Form zu geben ist:

$$0 = Y_2 \,.\, 1{,}68 - 1000\,[(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8})\, 0{,}8 - (2{,}8 - \tfrac{7}{8} \,.\, 0{,}8)]$$
$$- 5000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8})\, 0{,}8 \quad + 5000\,(2{,}8 - \tfrac{7}{8} \,.\, 0{,}8).$$

Unter den 7 mit 5000 multiplicirten Gliedern, welche die Wirkung der temporären Last darstellen, befinden sich 6 negative und 1 positives. Man lässt also der oben gegebenen Regel gemäss ein Mal das positive Glied fort und erhält dann:

$$0 = Y_2 \,.\, 1{,}68 - 1000\,[(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8})\, 0{,}8 - (2{,}8 - \tfrac{7}{8} \,.\, 0{,}8)]$$
$$- 5000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8}) \,.\, 0{,}8$$
$$Y_2\,(\max) = + 6250^{\mathrm{k}}.$$

Das andere Mal lässt man die 6 negativen Glieder fort und erhält:

$$0 = Y_2 \,.\, 1{,}68 - 1000\,[(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8})\, 0{,}8 - (2{,}8 - \tfrac{7}{8} \,.\, 0{,}8)]$$
$$+ 5000\,(2{,}8 - \tfrac{7}{8} \,.\, 0{,}8)$$
$$Y_2\,(\min) = - 6250^{\mathrm{k}}.$$

(Es ergiebt sich zugleich, dass $Y_2 = 0$ wird, wenn sämmtliche Glieder beibehalten werden, also bei voller Belastung, ein Umstand, welcher weiter unten in der Theorie der parabolischen Träger seine Erklärung finden wird.)

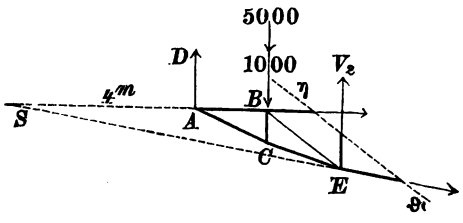
Für Z_2 wählt man den Punkt B als Drehpunkt und erhält, wenn man von vornherein die einzelnen Glieder in der eben erklärten Weise anordnet, die Momenten-Gleichung:

$$0 = - Z_2 \,.\, 0{,}835 + 1000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8}) \,.\, 2 + 5000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8}) \,.\, 2,$$

in welcher sämmtliche mit 5000 multiplicirten Glieder einerlei Vorzeichen haben. Die Gleichung ist also direct aufzulösen und giebt:

$$Z_2\,(\max) = + 50300^{\mathrm{k}}.$$

Fig. 26.



Zur Bestimmung von V_2 ist der Schnitt $\eta\,\vartheta$ zu führen (s. Fig. **26**) und der Punkt S als Drehpunkt zu wählen. Die allgemeine Momenten-Gleichung für V_2 erscheint, nachdem sie geordnet, in folgender Form:

$$0 = - V_2 \,.\, 8 - 1000\,[(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8})\, 4 - (6 - \tfrac{7}{8} \,.\, 4)]$$
$$- 5000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8})\, 4 \quad + 5000\,(6 - \tfrac{7}{8} \,.\, 4).$$

Von den mit 5000 multiplicirten Gliedern ist das eine Mal das positive Glied fortzulassen, man erhält dann:

$$0 = -V_2 . 8 - 1000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8}) 4 - (6 - \tfrac{7}{8} . 4)] - 5000 (\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8}) 4$$
$$V_2 \text{ (min)} = -7560^k.$$

Das andere Mal sind die 6 negativen Glieder fortzulassen und man erhält:

$$0 = -V_2 . 8 - 1000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8}) 4 - (6 - \tfrac{7}{8} . 4)] + 5000 (6 - \tfrac{7}{8} . 4)$$
$$V_2 \text{ (max)} = +560^k.$$

Diese Beispiele werden genügen, um die Anwendung der oben gegebenen Regeln zu erklären, und scheint es nicht erforderlich, auch die ferneren Rechnungen mit gleicher Ausführlichkeit zu behandeln. Für diejenigen Leser, welche die Aufgabe vollständig nachzurechnen beabsichtigen, wird es ausreichen, wenn in Betreff der übrigen Stangen nur die Hauptgleichungen und die Resultate zum Vergleich mitgetheilt werden.

$$0 = X_3 . 1{,}875 + 1000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}) 6 + (\tfrac{6}{8} . 6 - 2) + (\tfrac{7}{8} . 6 - 4)]$$
$$+ 5000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}) 6 + (\tfrac{6}{8} . 6 - 2) + (\tfrac{7}{8} . 6 - 4)]$$
$$X_3 \text{ (min)} = -48000^k.$$

$$0 = Y_3 . 5{,}47 - 1000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}) 4 - (8 - \tfrac{6}{8} . 4) - (6 - \tfrac{7}{8} . 4)]$$
$$- 5000 (\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}) 4 + 5000 (8 - \tfrac{6}{8} . 4) + 5000 . (6 - \tfrac{7}{8} . 4)$$
$$Y_3 \begin{cases} \text{(maximum)} = +6850^k \\ \text{(minimum)} = -6850^k. \end{cases}$$

$$0 = -Z_3 . 1{,}474 + 1000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8}) 4 + (\tfrac{7}{8} . 4 - 2)]$$
$$+ 5000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8}) 4 + (\tfrac{7}{8} . 4 - 2)]$$
$$Z_3 \text{ (max)} = +48900^k.$$

$$0 = -V_3 . 30 - 1000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}) 24 - (28 - \tfrac{6}{8} . 24) - (26 - \tfrac{7}{8} . 24)]$$
$$- 5000 (\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}) 24 + 5000 (28 - \tfrac{6}{8} . 24) + 5000 (26 - \tfrac{7}{8} . 24)$$
$$V_3 \begin{cases} \text{(max)} = +1500^k \\ \text{(min)} = -8500^k. \end{cases}$$

$$0 = X_4 . 2 + 1000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{4}{8}) 8 + (\tfrac{5}{8} . 8 - 2) + \tfrac{6}{8} . 8 - 4) + (\tfrac{7}{8} . 8 - 6)]$$
$$+ 5000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{4}{8}) 8 + (\tfrac{5}{8} . 8 - 2) + \tfrac{6}{8} . 8 - 4) + (\tfrac{7}{8} . 8 - 6)]$$
$$X_4 \text{ (min)} = -48000^k.$$

$$0 = Y_4 . 21{,}2 - 1000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{4}{8}) 24 - (30 - \tfrac{5}{8} . 24) - (28 - \tfrac{6}{8} . 24) - (26 - \tfrac{7}{8} . 24)]$$
$$- 5000 (\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{4}{8}) 24 + 5000 [(30 - \tfrac{5}{8} . 24) + (28 - \tfrac{6}{8} . 24) + (26 - \tfrac{7}{8} . 24)]$$
$$Y_4 \begin{cases} \text{(max)} = +7080^k \\ \text{(min)} = -7080^k. \end{cases}$$

$$0 = -Z_4 . 1{,}873 + 1000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}) 6 + (\tfrac{6}{8} . 6 - 2) + (\tfrac{7}{8} . 6 - 4)]$$
$$+ 5000 [(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}) 6 + (\tfrac{6}{8} . 6 - 2) + (\tfrac{7}{8} . 6 - 4)]$$
$$Z_4 \text{ (max)} = +48100^k.$$

(Die nun folgenden Momenten-Gleichungen beziehen sich allemal auf den Theil der Figur, welcher rechts von der betreffenden Schnittlinie liegt.)

$$0 = -V_4 \cdot 32 + 1000[(\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{3}{8})24 - (32-\tfrac{4}{8}\cdot 24) - (30-\tfrac{5}{8}\cdot 24) - (28-\tfrac{6}{8}\cdot 24) - (26-\tfrac{7}{8}\cdot 24)] + 5000(\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{3}{8})24 - 5000[(32-\tfrac{4}{8}\cdot 24) + (30-\tfrac{5}{8}\ 24) + (28-\tfrac{6}{8}\cdot 24) + (26-\tfrac{7}{8}\cdot 24)]$$

$$V_4 \begin{cases} (\max) = +1800^{k} \\ (\min) = -8800^{k}. \end{cases}$$

$$0 = -X_5 \cdot 1{,}875 - 1000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{5}{8})6 + (\tfrac{6}{8}\cdot 6-2) + (\tfrac{7}{8}\cdot 6-4)] - 5000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{5}{8})6 + (\tfrac{6}{8}\cdot 6-2) + (\tfrac{7}{8}\cdot 6-4)]$$

$$X_5\,(\min) = -48000^{k}.$$

$$0 = Y_5 \cdot 21{,}88 + 1000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{4}{8})24 - (30-\tfrac{5}{8}\cdot 24) - (28-\tfrac{6}{8}\cdot 24) - (26-\tfrac{7}{8}\cdot 24)] + 5000\ (\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{4}{8})\ 24 - 5000[(30-\tfrac{5}{8}\cdot 24) + (28-\tfrac{6}{8}\cdot 24) + (26-\tfrac{7}{8}\cdot 24)]$$

$$Y_5 \begin{cases} (\max) = +6850^{k} \\ (\min) = -6850^{k}. \end{cases}$$

$$0 = Z_5 \cdot 1{,}996 - 1000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{4}{8})8 + (\tfrac{5}{8}\cdot 8-2) + (\tfrac{6}{8}\cdot 8-4) + (\tfrac{7}{8}\cdot 8-6)] - 5000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{4}{8})8 + (\tfrac{5}{8}\cdot 8-2) + (\tfrac{6}{8}\cdot 8-4) + (\tfrac{7}{8}\cdot 8-6)]$$

$$Z_5\,(\max) = +48100^{k}.$$

$$0 = -V_5 \cdot 10 + 1000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{4}{8})4 - (10-\tfrac{5}{8}\cdot 4) - (8-\tfrac{6}{8}\cdot 4) - (6-\tfrac{7}{8}\cdot 4)] + 5000\ (\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{4}{8})4 - 5000[(10-\tfrac{5}{8}\cdot 4) + (8-\tfrac{6}{8}\cdot 4) + (6-\tfrac{7}{8}\cdot 4)]$$

$$V_5 \begin{cases} (\max) = +1500^{k} \\ (\min) = -8500^{k}. \end{cases}$$

$$0 = -X_6 \cdot 1{,}5 - 1000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{6}{8})4 + (\tfrac{7}{8}\cdot 4-2)] - 5000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{6}{8})4 + (\tfrac{7}{8}\cdot 4-2)]$$

$$X_6\,(\min) = -48000^{k}.$$

$$0 = Y_6 \cdot 6 + 1000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{5}{8})4 - (8-\tfrac{6}{8}\cdot 4) - (6-\tfrac{7}{8}\cdot 4)] + 5000\ (\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{5}{8})4 - 5000[(8-\tfrac{6}{8}\cdot 4) + (6-\tfrac{7}{8}\cdot 4)]$$

$$Y_6 \begin{cases} (\max) = +6250^{k} \\ (\min) = -6250^{k}. \end{cases}$$

$$0 = Z_6 \cdot 1{,}84 - 1000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{5}{8})6 + (\tfrac{6}{8}\cdot 6-2) + (\tfrac{7}{8}\cdot 6-4)] - 5000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{5}{8})6 + (\tfrac{6}{8}\cdot 6-2) + (\tfrac{7}{8}\cdot 6-4)]$$

$$Z_6\,(\max) = +48900^{k}.$$

$$0 = -V_6 \cdot 4{,}8 + 1000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{5}{8})0{,}8 - (4{,}8-\tfrac{6}{8}\cdot 0{,}8) - (2{,}8-\tfrac{7}{8}\cdot 0{,}8)] + 5000\ (\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{5}{8})0{,}8 - 5000[(4{,}8-\tfrac{6}{8}\cdot 0{,}8) + 2{,}8-\tfrac{7}{8}\cdot 0{,}8)]$$

$$V_6 \begin{cases} (\max) = +\ 560^{k} \\ (\min) = -7560^{k}. \end{cases}$$

$$0 = -X_7 \cdot 0.875 - 1000(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{7}{8})2 - 5000(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{7}{8})2$$

$$X_7\,(\min) = -48000^{k}.$$

$$0 = Y_7 \cdot 1{,}92 + 1000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{6}{8})0{,}8 - (2{,}8-\tfrac{7}{8}\cdot 0{,}8)] + 5000\ (\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{6}{8})0{,}8 - 5000\,(2{,}8-\tfrac{7}{8}\cdot 0{,}8)$$

$$Y_7 \begin{cases} (\max) = +5470^{k} \\ (\min) = -5470^{k}. \end{cases}$$

$$0 = Z_7 \cdot 1{,}43 + 1000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{6}{8})4 + (\tfrac{7}{8}\cdot 4-2)] - 5000[(\tfrac{1}{8}+\ldots\tfrac{6}{8})4 + (\tfrac{7}{8}\cdot 4-2)]$$

$$Z_7\,(\max) = +50300^{k}.$$

$$0 = -V_7 \cdot 2 - 1000 \cdot 2 - 5000 \cdot 2$$

$$V_7\,(\min) = -6000^{k}.$$

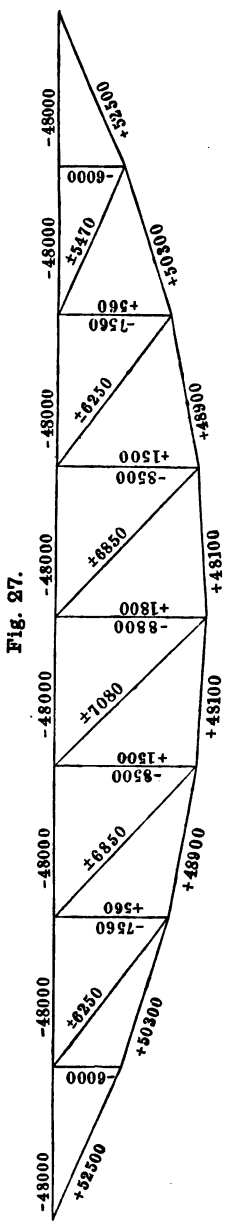


Fig. 27.

$$0 = -X_8 \cdot 0{,}875 - 1000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8})\,2 - 5000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8})\,2$$
$$X_8\,(\min) = -48000^{k}.$$
$$0 = Z_8 \cdot 0{,}8 - 1000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8})\,2 - 5000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8})\,2$$
$$Z_8\,(\max) = +52500^{k}.$$

Die Resultate sind in Fig. **27** übersichtlich zusammengestellt.

§ 7.

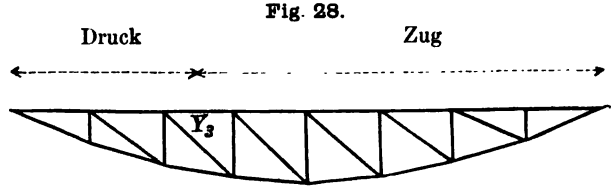
Abgeleitete Formen.

Ein Rückblick auf die vorstehenden Rechnungen zeigt, dass namentlich in Betreff der Diagonal- und Vertical-Stangen die Befolgung der oben gegebenen Regel von Nutzen war, weil gerade diese es sind, welche bei partieller Belastung des Trägers am stärksten gespannt werden. Um sich das Gesetz zu veranschaulichen, nach welchem die Spannungen derselben von der Belastungsweise abhängen, braucht man nur die allgemeinen Momenten-Gleichungen zu betrachten und den Träger allemal in demjenigen Belastungszustande zu zeichnen, welcher dem Fortlassen der positiven oder negativen Glieder entspricht. Man erkennt alsbald, dass irgend eine Diagonal-Stange, z. B. Y_3 (im dritten Felde) am stärksten gezogen wird, wenn alle rechts liegenden Punkte belastet sind, am stärksten gedrückt dagegen, wenn alle links liegenden Punkte belastet sind, wie dies in Fig. **28** durch die Ueberschriften „Zug“ und „Druck“ angedeutet ist.

Wenn in demselben Felde statt der links ansteigenden eine rechts ansteigende Diagonale sich befände, so wären die Ueberschriften mit einander zu vertauschen. Denn: wenn man den Träger von der Rückseite (oder sein Spiegelbild) betrachtet, so

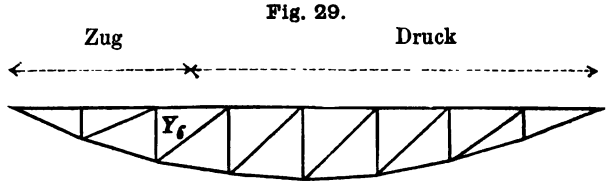
erscheint die Diagonale Y_6 in der gleichen Lage, und für diese ergeben sich aus den Momenten-Gleichungen die in Fig. **29** eingeschriebenen Abtheilungen.

Fig. 28.



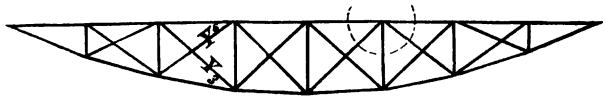
Sind gleichzeitig beide Diagonalen vorhanden und sind dieselben als **Zug**bänder construirt, welche eine Druckspannung anzunehmen unfähig sind, so wird jede von beiden nur bei derjenigen

Fig. 29.



Belastungsweise in Thätigkeit versetzt, welche Zugspannung in ihr erzeugt, während die andere gleich einem schlaff gewordenen Faden in spannungslosen Zustand geräth. Es kommen in diesem Falle also nur die Maxima der oben für die Grössen Y gefundenen Werthe zur Geltung, im dritten Felde z. B. für die links ansteigende Diagonale Y_3 (max), für die rechts ansteigende dagegen Y_6 (max) (s. Fig. **30**). In gleicher Weise kann man in den übrigen Feldern die Spannungen der gekreuzten Diagonalbänder aus Fig. **27** abschreiben.

Fig. 30.



Für die Verticalständer eines solchen Trägers kommen dagegen nur die Minima der oben für die Grössen V gefundenen Werthe in Betracht, weil niemals Zugspannung in einem solchen entstehen kann, wenn jede der beiden oben angrenzenden Diagonalen unfähig ist, Druckspannung anzunehmen.

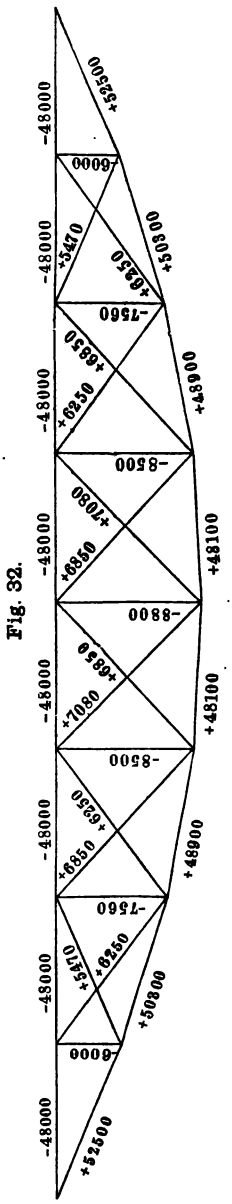
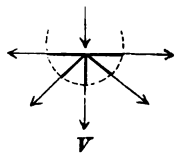


Fig. 32.

Ein Blick auf Fig. **31** zeigt sofort, dass dies unmöglich ist, da sonst die vertical abwärts gerichtete Kraft V durch keine Gegenkraft aufgehoben würde. Dass aber jene Minima auch für einen Träger mit gekreuzten Diagonalbändern unmittelbare Geltung haben, folgt daraus, dass bei einseitiger Belastung eines solchen immer nur Eins der beiden Diagonalen-Systeme in gespanntem Zustande sich befindet, das andere also gleichzeitig als nicht vorhanden betrachtet werden darf.

Fig. 31.



Hiernach kann man, ohne erst eine neue Rechnung anstellen zu müssen, mit Hülfe der oben gefundenen Resultate sofort für einen solchen Träger mit gekreuzten Diagonal-Zugbändern die Grössen der stärksten Spannungen in die Figur hineinschreiben, wie das in Fig. **32** geschehen ist.

Wenn umgekehrt die Diagonalstangen so construirt sind, dass sie nur **Druck**-Spannung annehmen können — wie das z. B. bei Holz-Constructionen vorkommt — so führt eine der vorigen ganz ähnliche Beweisführung zu dem Ergebniss: dass für die Diagonalstangen nur die Minima und für die Verticalstangen eines solchen Trägers nur die Maxima der oben berechneten Werthe ihre Gültigkeit behalten. Was dagegen die Minima der letzteren betrifft, so überzeugt man sich durch den blossen Anblick eines der Belastungspunkte leicht, dass, wenn die Diagonalen nicht ziehen können, die unmittelbare Belastung des Punktes die einzige ist, welche Druckspannung in der Verticalen erzeugen kann. Diese variirt zwischen 1000^k und $1000^k + 5000^k$; es ist also überall

$$V(\min) = -6000^{k}$$

zu setzen. In Fig. **33** sind die Spannungszahlen eines solchen Trägers eingeschrieben und ist die Unfähigkeit der Diagonalen, Zugspannung anzunehmen, durch Doppellinien angedeutet.

Bei Trägern mit einfachem Diagonalen-System, welche aber von dem Schema Fig. **27** dadurch sich unterscheiden, dass sie symmetrisch in Bezug auf die verticale Mittellinie geformt sind, handelt es sich nur um die Spannung des mittleren Verticalständers; denn für die übrigen Stücke können die Spannungszahlen unmittelbar aus Fig. **27** abgeschrieben werden.

Fig. 33.

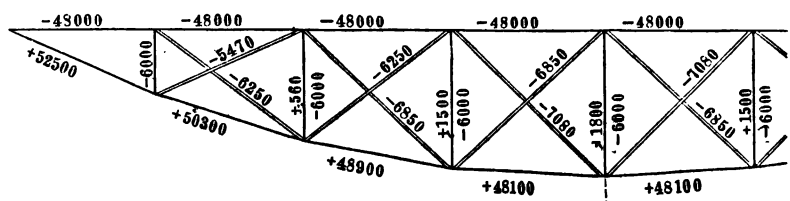


Fig. 34.

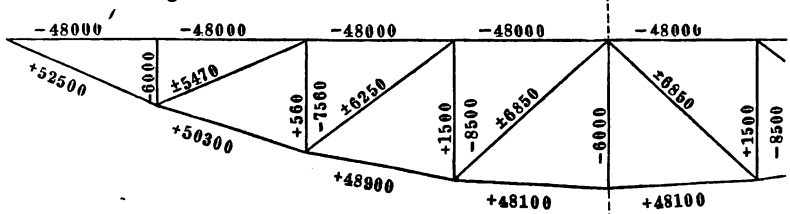
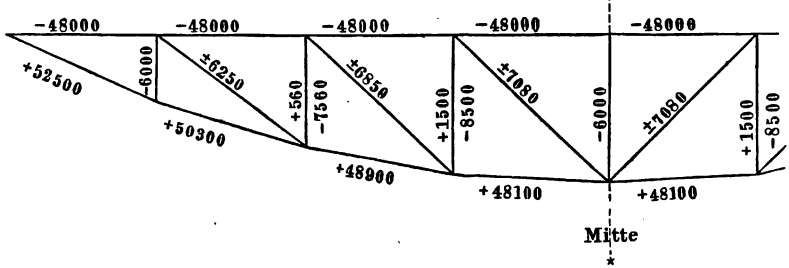


Fig. 35.



Was nun den mittleren Verticalständer zunächst in Fig. **34** betrifft, so braucht man nur den Fusspunkt desselben zu betrachten, um zu erkennen, dass seine Spannung ausschliesslich von den angrenzenden Parabel-Sehnen abhängt. Diese haben

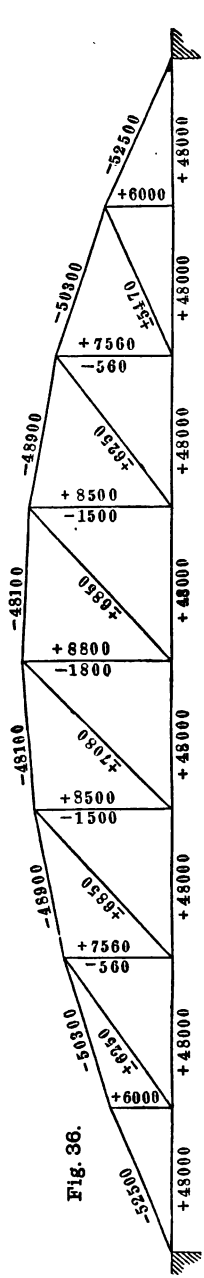


Fig. 36.

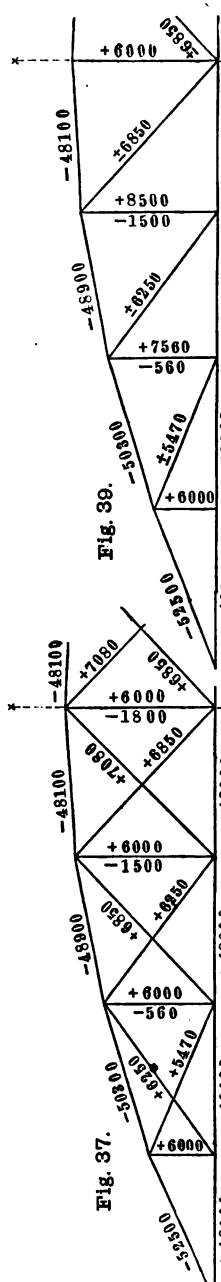


Fig. 37.

Fig. 39.

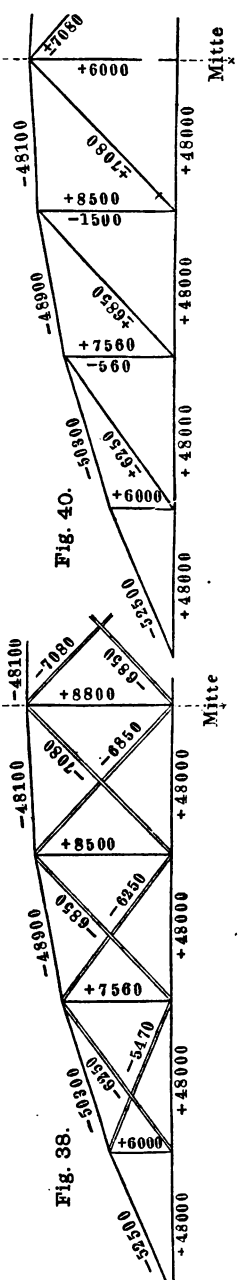


Fig. 38.

Fig. 40.

stets Zugspannung, können also in dem Verticalständer **nur Druckspannung** erzeugen. Am grössten wird dieselbe, wenn die volle Spannung von 48100^k in den Sehnen eintritt, d. h. bei voller Belastung, wo jeder Verticalständer 6000^k trägt. Also ist für den Mittelständer

$$V(\min) = -6000^k$$

zu setzen.

Bei dem in Fig. **35** dargestellten Falle ist die Spannung des mittleren Verticalständers noch leichter zu erkennen. Denn hier ist es offenbar nur die unmittelbare Belastung des Kopfes, welche überhaupt Spannung in dem Ständer hervorbringen kann, also Druckspannung. Mithin ist auch hier:

$$V(\min) = -6000^k.$$

Wenn man endlich in dem Schema Fig. **27** überall die Plus- und Minus-Zeichen mit einander vertauscht, so erhält man die Spannungszahlen für einen parabolischen Träger, dessen convexe Seite nach oben gewendet ist (s. Fig. **36**). Die ganze Beweisführung und Rechnung nämlich, aus welcher die Zahlen von Fig. **27** hervorgingen, lässt sich Zeile für Zeile auf diese neue Construction übertragen, sobald man consequent alle Kraftrichtungen umkehrt, dem entsprechend Plus- und Minus-Zeichen, Maximum und Minimum mit einander vertauscht und die ganze Figur auf den Kopf gestellt zeichnet. Man erhält damit eine neue schematische Figur (**36**), aus welcher dann durch eine der vorigen ganz analoge Betrachtung die vier abgeleiteten Formen Figg. **37**, **38**, **39** und **40** sich bilden lassen.

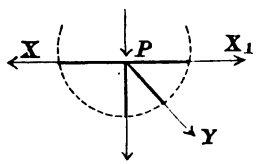
§ 8.

Theorie der parabolischen Träger.

An dem vorigen Beispiel ist gezeigt, dass man mittelst der Methode der statischen Momente einen gegebenen parabolischen Träger berechnen kann, ohne von der eigentlichen Theorie der parabolischen Träger Etwas zu verstehen. Zwei Eigenschaften derselben wurden bei dieser Berechnung auf empirischem Wege gefunden, erstens: die Spannungen der horizontalen Stangen sind bei voller Belastung am grössten und überall gleich; zweitens: die Spannungen der Diagonal-Stangen sind bei voller Belastung überall gleich Null. Letztere ist übrigens schon in der ersteren

enthalten, denn, wenn $X = X_1$ ist (s. Fig. 41), so folgt daraus, dass $Y = 0$ sein muss, weil sonst die Horizontalkräfte an dem Punkte P sich nicht aufheben würden.

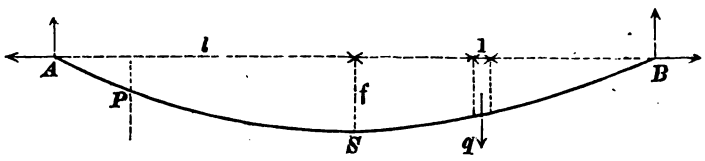
Fig. 41.



Es ist nützlich zu untersuchen, von welchen Bedingungen jene Eigenschaften abhängen. Die Kenntniss dieser Bedingungen ist nöthig — zwar nicht um in einem gegebenen Träger die Spannungen zu berechnen — wohl aber um für einen erst zu construirenden Träger, der diese Eigenschaften besitzen soll, die richtige Form zu finden.

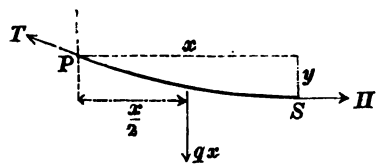
Zu diesem Zwecke denke man sich eine an den beiden festen Punkten A und B in ihrer Gleichgewichtslage hängende Kette (s. Fig. 42), deren Belastung gleichmässig über die Spannweite AB

Fig. 42.



vertheilt ist und pro Längeneinheit derselben q beträgt. An dem tiefsten Punkte S der Kette — also da, wo sie horizontal gerichtet ist — denke man sich die Kette durchschnitten und an der Schnittstelle eine Kraft H angebracht, welche den Gleichgewichtszustand wieder herstellt. Diese Kraft muss eine horizontale Richtung haben, weil sie sonst dem Ketten-Ende eine von der horizontalen abweichende Richtung ertheilen würde. An einer beliebigen anderen Stelle P denke man sich die Kette ebenfalls durchschnitten und durch die Kraft T den Gleichgewichtszustand wieder hergestellt.

Fig. 43.



Das Stück SP (Fig. 43) wird von drei Kräften im Gleichgewicht gehalten: die erste ist H, die zweite T, die dritte ist die Mittelkraft sämmtlicher Gewichte, welche das Stück SP belasten. Letztere Kraft ist $q.x$, wenn mit x die

Horizontal-Entfernung der beiden Endpunkte S und P von einander bezeichnet wird; sie wirkt im Abstande $\frac{x}{2}$ von jedem derselben, weil die Belastung gleichförmig über die Strecke x vertheilt sein sollte.

Die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Punkt P als Drehpunkt ist:

$$1) \quad H.y = qx.\frac{x}{2}.$$

Da der Punkt P beliebig gewählt war, so gilt diese Gleichung auch für jeden anderen, z. B. den Punkt A, für welchen l statt x und f statt y zu setzen ist, also:

$$2) \quad H.f = ql.\frac{l}{2}.$$

Die Division der ersten Gleichung durch die zweite führt zu der dritten:

$$3) \quad \frac{y}{f} = \frac{x^2}{l^2}.$$

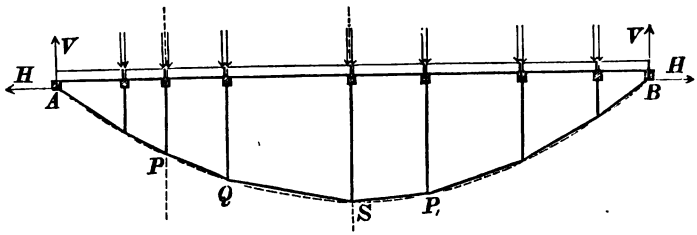
Für den Theil SB gelten genau dieselben Bedingungen. Man kann also mittelst der Gleichung 3) die Lage sämmtlicher Punkte der Kette bestimmen, indem man für x beliebige Werthe substituirt und die Gleichung allemal für y auflöst. Diese Punkte liegen in einer Parabel, deren Form nur von den beiden Grössen f und l abhängt.

Als weitere Folgerungen aus der obigen Untersuchung ergeben sich noch folgende Sätze; erstens: die horizontale Seitenkraft von T ist in allen Punkten $= H$, also auch an den beiden Aufhängepunkten A und B; zweitens: die verticale Seitenkraft von T ist gleich qx, an den Aufhängepunkten also gleich ql; drittens: die Spannung T selbst ist allemal gleich $\sqrt{H^2 + V^2}$.

Auch dann noch werden einzelne Punkte der Kette in der Parabel bleiben, wenn durch andere Belastungsweise bewirkt wird, dass für sie die Gleichungen 1) und 2) ihre Gültigkeit behalten. Dieser Fall tritt ein, wenn zu beiden Seiten des Punktes S die Belastungen in einzelnen Punkten concentrirt werden und zwar so, dass ein solcher Punkt von jeder der beiden angrenzenden Abtheilungen die Hälfte zu tragen bekommt (s. Fig. **44**). Denn für den Theil SP (s. Fig. **45**) wird auch jetzt noch die Belastung (oder die Mittelkraft der 4 Verticaldrücke) $= qx$, und der Hebelarm dieser Kraft $= \frac{x}{2}$ sein, weil der Schwerpunkt in der Mitte liegt.

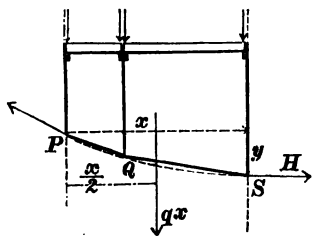
Eine solche Belastungsweise kann durch Verticalständer bewirkt werden, welche steifen, gleichförmig belasteten Zwischen-

Fig. 44.



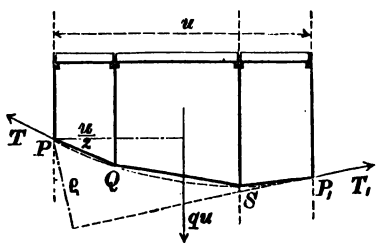
trägern als Stützen dienen und deren Drücke auf die Kette übertragen (s. Fig. **44**). Da ein unbelasteter Theil einer gespannten Kette immer geradlinig ist, so nimmt die ganze Kette ASB die Form eines der Parabel eingeschriebenen Polygons an. Dies gilt auch noch für den Fall, wenn der Scheitelpunkt S nicht mit zu den Belastungspunkten gehört. Denn: denkt man sich aus Fig. **44** das Stück PP_1 herausgeschnitten (s. Fig. **46**) und durch die Kräfte T, T_1 den Gleichgewichtszustand wieder hergestellt, so erfordert das Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt P, dass:

Fig. 45.



$$T_1 \cdot \rho = q u \cdot \frac{u}{2},$$

Fig. 46.

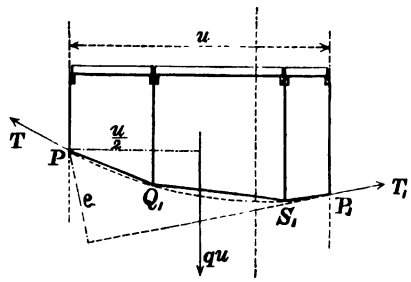


und diese Gleichgewichtsbedingung wird dadurch nicht verändert, dass statt der Zwischenpunkte S und Q andere Punkte z. B. S_1 und Q_1 (s. Fig. **47**) als Belastungspunkte angenommen werden.

Sollen die beiden Punkte A und B nur verticale Widerstände leiten, so müssen die beiden Horizontalkräfte H auf andere Weise, z. B. durch die Gegendrücke einer zwischen die Auflager gestemmten Horizontalstange dargestellt werden, die übrigens auch aus einzelnen Stücken zusammengesetzt sein darf.

So erhält man einen parabolischen Träger von der nebenstehenden Form (s. Fig. **48**), der auch ohne Diagonalstangen eine gleichförmig über die Spannweite vertheilte Belastung tragen kann.

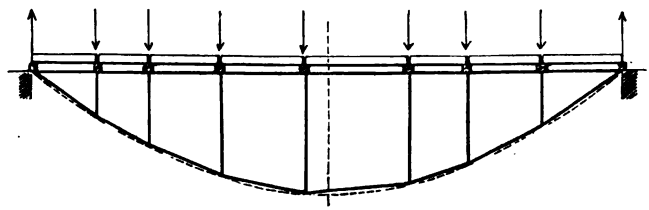
Fig. 47.



Die Bedingung also, welche erfüllt sein muss, wenn der Träger die genannten Eigenschaften besitzen soll, lässt sich einfach in folgenden Worten aussprechen:

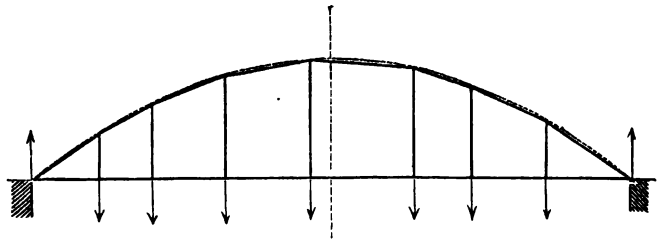
Die Stützpunkte der Verticalstangen müssen in einer Parabel liegen, deren Achse mit der verticalen Mittellinie der Construction zusammenfällt.

Fig. 48.



Die ganze obige Beweisführung endlich lässt sich, wenn die betreffenden Figuren umgekehrt und sämmtliche Kräfte in entgegengesetzter Richtung gedacht werden, unmittelbar übertragen auf einen parabolischen Träger, dessen Bogen nach oben hin seine convexe Seite kehrt (s. Fig. **49**) und braucht daher für diesen nicht wiederholt zu werden.

Fig. 49.



Eine weitere Fortsetzung und Verallgemeinerung der Theorie der parabolischen Träger findet sich weiter unten in der „Theorie der sichelförmigen Träger".

Dritter Abschnitt.

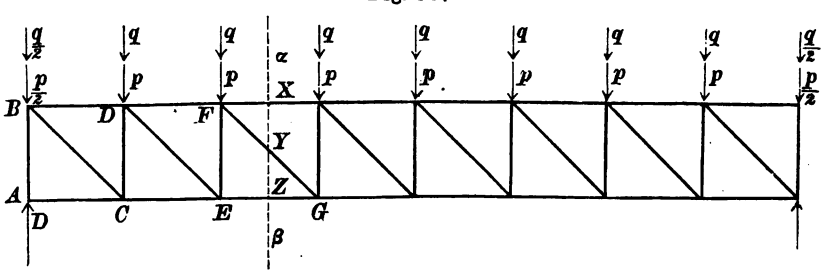
§ 9.

Anwendung der Methode auf die Berechnung von Fachwerkbrücken mit parallelen Gurtungen.

Die Methode der statischen Momente kann auch bei der Berechnung gewöhnlicher Fachwerkbrücken mit Rechteckfeldern angewendet werden. Es ist kaum nöthig, darauf hinzuweisen, dass die consequente Durchführung des Princips auch dann noch zu richtigen Resultaten führen muss, wenn unter den durchschnittenen drei Stangen zwei parallele sich befinden, also der Drehpunkt für die Momenten-Gleichung der dritten in unendliche Ferne rückt. Zwar werden in diesem Falle die Hebelarme sämmtlicher in der Gleichung vorkommenden Kräfte unendlich gross, doch ist die hieraus entstehende Schwierigkeit nur eine scheinbare, da die unendlichen Grössen sogleich gegen einander wegfallen und die Auflösung der Gleichung dann den richtigen endlichen Werth für die zu bestimmende Spannung ergiebt.

Um z. B. die Spannung Y der Diagonalstange FG bei dem in Fig. **50** dargestellten Träger zu bestimmen, würde man nach

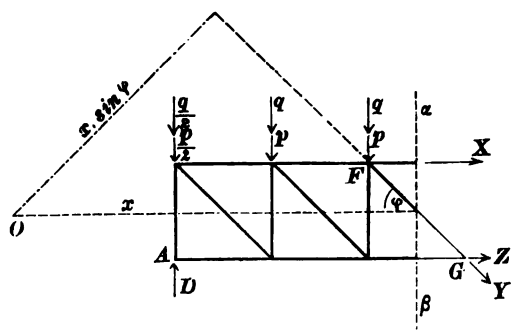
Fig. 50.



den früher gegebenen Regeln zunächst durch den Schnitt $\alpha\beta$ die Construction in zwei Theile zerlegen und nach Hinzufügung der

Kräfte X, Y, Z dann für den einen Theil Fig. 51 die Momenten-Gleichung aufstellen in Bezug auf den Durchschnittspunkt der beiden Kräfte X und Z als Drehpunkt. Diesen Punkt hat man sich auf der horizontalen Mittellinie in unendlicher Entfernung zu denken. Die Richtungen der Kräfte X, Z gehen durch den Drehpunkt selbst hindurch, also sind ihre Hebelarme Null.

Fig. 51.



Für sämmtliche Verticalkräfte, welche auf das abgeschnittene Stück wirken, werden die Hebelarme unendlich gross. Die Kraft Y endlich würde, wenn der Drehpunkt O in der endlichen Entfernung x von der Schnittstelle läge, an dem Hebelarme $x \cdot \sin \varphi$ wirken. Denkt man sich den Punkt O immer weiter nach links bis ins Unendliche fortrückend, so wird $x = \infty$, der Hebelarm von Y also $= \infty \cdot \sin \varphi$.

Die Momenten-Gleichung zur Bestimmung von Y würde daher zunächst in folgender Gestalt erscheinen:

$$0 = Y \cdot \infty \sin \varphi - D \cdot \infty + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right) \infty + (p+q) \infty + (p+q) \cdot \infty$$

und mit Weglassung des gemeinschaftlichen Factors ∞ die Form annehmen:

$$0 = Y \cdot \sin \varphi - D + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right) + (p+q) + (p+q).$$

Hierin bedeutet $Y \cdot \sin \varphi$ die verticale Seitenkraft der Kraft Y. Diese Gleichung drückt also nichts Anderes aus, als die Bedingung: es muss für das abgeschnittene Stück die Summe der vertical aufwärts wirkenden Kräfte gleich der Summe der vertical abwärts wirkenden Kräfte sein. Der Hauptzweck der Momenten-Methode — nämlich der: eine Gleichung zu erhalten, aus welcher die gesuchte Grösse als einzige Unbekannte direct bestimmt werden kann — würde also in diesem speciellen Falle auch durch unmittelbare Anwendung der Gleichung für die Verticalkräfte erreicht worden sein.

Es zeigt sich bei dieser Gelegenheit aufs Neue die allgemeine Brauchbarkeit des Princips, welches jener Methode zum Grunde liegt, sofern sie selbst in solchen vereinzelten Fällen, wo eine andere Betrachtungsweise die kürzeste Lösung der Aufgabe zu bieten scheint, ihre Dienste nicht versagt, vielmehr mit dieser zusammentreffend direct auf diesen kürzesten Weg hinweist.

Führt man in der obigen Gleichung für den Gegendruck des Auflagers seinen Werth:

$$D = (p+q)\left[\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8}+\tfrac{5}{8}+\tfrac{6}{8}+\tfrac{7}{8}+\tfrac{1}{2}\right]$$

ein, und stellt man — wie bei den vorigen Beispielen schon geschehen — die von den einzelnen Belastungen zu dem Druck D gelieferten Beiträge mit den direct von ihnen hervorgebrachten Verticalkräften an der gehörigen Stelle so zusammen, dass der Einfluss einer jeden Belastung durch ein einzelnes Glied von leicht erkennbaren Vorzeichen dargestellt wird, so erhält man die Gleichung:

$$0 = Y.\sin\varphi - (p+q)\left[\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8}+\tfrac{5}{8}-(1-\tfrac{6}{8})-(1-\tfrac{7}{8})-(\tfrac{1}{2}-\tfrac{4}{8})\right]$$

oder endlich, wenn zur bequemeren Uebersicht die Glieder, welche die permanente Last p enthalten, von denjenigen, welche die veränderliche Last q enthalten, getrennt, und letztere wiederum in positive und negative Gruppen gesondert werden:

$$\begin{aligned} 0 = Y.\sin\varphi &- p\left[\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8}+\tfrac{5}{8}-(1-\tfrac{6}{8})-(1-\tfrac{7}{8})\right] \\ &- q\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8}+\tfrac{5}{8}\right) \quad + q\left[(1-\tfrac{6}{8})+(1-\tfrac{7}{8})\right], \end{aligned}$$

woraus sofort wie früher durch Weglassen — ein Mal der positiven, ein Mal der negativen Gruppe, resp. Maximum und Minimum von Y bestimmt werden können.

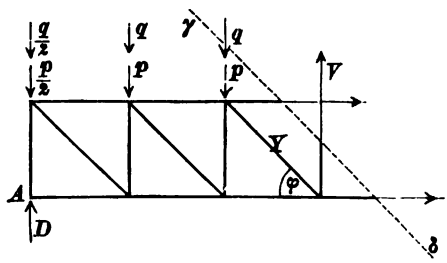
Hinsichtlich der beiden mit durchschnittenen Stangen X und Z (Fig. **51**) bietet dieser Fall zu keinen neuen Bemerkungen Veranlassung. Bezeichnet man die Länge eines Feldes mit λ und die Höhe des Trägers mit h, so ergeben sich, wenn einmal der Punkt G und ein anderes Mal der Punkt F als Drehpunkt gewählt wird, die beiden Momenten-Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 &= X.h + (p+q)\left[\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8}+\tfrac{5}{8}\right).3\lambda + \left(\tfrac{6}{8}.3\lambda - \lambda\right) + \left(\tfrac{7}{8}.3\lambda - 2\lambda\right)\right] \\ 0 &= -Z.h + (p+q)\left[\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\tfrac{3}{8}+\tfrac{4}{8}+\tfrac{5}{8}+\tfrac{6}{8}\right).2\lambda + \left(\tfrac{7}{8}.2\lambda - \lambda\right)\right], \end{aligned}$$

aus denen man sofort erkennt, dass diese beiden Stangen bei voller Belastung des Trägers am stärksten gespannt werden.

Was endlich die Spannung V des rechts angrenzenden Verticalständers betrifft, so führt der Schnitt $\gamma\,\delta$ (s. Fig. **52**) und die Wahl des unendlich entfernt liegenden Durchschnittspunktes der beiden mit durchschnittenen Horizontalstangen als Drehpunktes zu einer Momenten-Gleichung:

Fig. 52.



$$0 = -V.\infty - D.\infty + \left(\frac{p}{2} + \frac{q}{2}\right)\infty + (p+q)\infty + (p+q)\infty,$$

welche von der zuerst für $Y.\sin\varphi$ aufgestellten offenbar nur dadurch sich unterscheidet, dass hier $-V$ an die Stelle von $+Y.\sin\varphi$ tritt. Man erhält folglich für V die Gleichung:

$$0 = -V - p\left[\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8} - (1 - \tfrac{6}{8}) - (1 - \tfrac{7}{8})\right]$$
$$- q\left(\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8}\right) + q\left[(1 - \tfrac{6}{8}) + (1 - \tfrac{7}{8})\right].$$

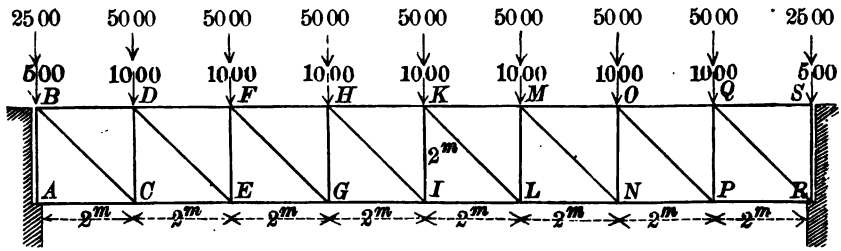
Die Werthe $+Y.\sin\varphi$ und $-V$ sind also identisch, und man kann daher die Berechnungen der Grössen Y und V in der Weise mit einander verbinden: dass man erst V berechnet, dann den gefundenen Werth durch $-\sin\varphi$ dividirt gleich Y setzt. Diese Regel lässt sich auch so aussprechen: **Diagonalstange und Verticalstange haben da, wo sie an einem unbelasteten Knotenpunkte zusammenstossen, Verticalspannungen von einerlei Grösse und entgegengesetztem Vorzeichen.**

§ 10.

Fachwerkbrücke von 16^{m} Spannweite mit einfachem Diagonalen-System.

Abgesehen von den durch die veränderte Form bedingten Abweichungen sind hier dieselben Maasse wie bei dem im zweiten Abschnitt berechneten parabolischen Träger gewählt, auch dieselben Belastungen, nämlich 1000^{k} permanente und 5000^{k} mobile Last für jedes Feld angenommen. Es ist ferner auch hier die Annahme gemacht, dass die Fahrbahn oben liegt, also die Belastungen unmittelbar auf die oberen Knotenpunkte wirken (s. Fig. **53**).

Fig. 53.

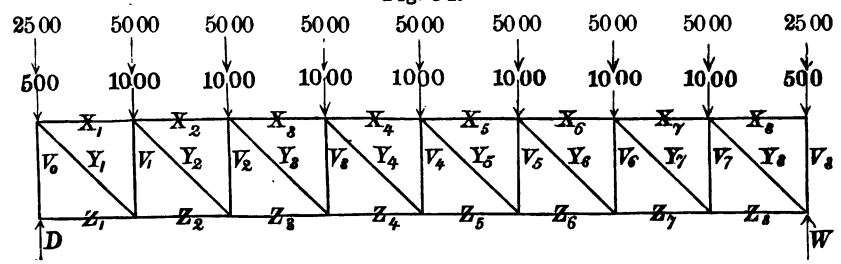


Berechnung der Grössen V_0 und Z_1.

Da V_0 und D die einzigen in dem Punkte A angreifenden Verticalkräfte sind (s. Fig. **54**), so ist immer:

$$V_0 + D = 0, \text{ also } V_0 = -D.$$

Fig. 54.



Es erreicht demnach V_0 seinen grössten negativen Werth, wenn der Gegendruck des Auflagers am grössten wird, d. h. bei voller Belastung des Trägers. Für diesen Fall wird $D = \frac{48000}{2}$ Kilg., folglich ist:

$$V_0\,(\min) = -\,24000^{k}.$$

Da ferner Z_1 die einzige in dem Punkte A angreifende Horizontalkraft ist, so bleibt bei jeder Belastungsweise:

$$Z_1 = 0.$$

Berechnung der Grössen X_8 und V_8.

In dem Punkte S greifen immer nur zwei Verticalkräfte an, nämlich erstens: die Belastung dieses Punktes, welche im Maximum 3000^{k} beträgt und zweitens: die Kraft V_8. Es ist folglich:

$$V_8\,(\min) = -\,3000^{k}.$$

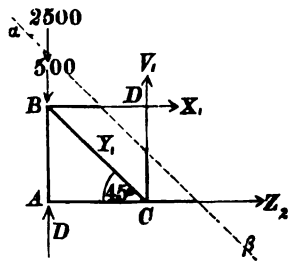
Da ferner ausser X_8 keine Horizontalkraft in dem Punkte S angreift, so ist in allen Fällen:

$$X_8 = 0.$$

Berechnung der Grössen X_1, Z_2, V_1, Y_1.

(Schnitt α β Fig. **55**.)

Fig. 55.



Die Gleichung der statischen Momente für den Theil Fig. **55** in Beziehung auf den Punkt C als Drehpunkt ist:

$$0 = X_1 \,.\, 2 + (1000 + 5000) \,.\, (\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \ldots \tfrac{7}{8}) \,.\, 2,$$

woraus sich ergiebt:

$$X_1 \text{ (min)} = -\ 21000^{k}.$$

Wählt man den Punkt D als Drehpunkt, so erhält man die Momenten-Gleichung:

$$0 = -\ Z_2 \,.\, 2 + (1000 + 5000)\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8}) \,.\, 2.$$

Also ist:

$$Z_2 \text{ (max)} = +\ 21000^{k}.$$

Die Gleichung der Verticalkräfte für den Theil Fig. **55** ist:

$$0 = -\ V_1 - 1000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8}) - 5000\,(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8})$$

und giebt für V_1 den Werth:

$$V_1 \text{ (min)} = -\ 21000^{k}.$$

Die Diagonale Y_1 bildet mit der Horizontalen einen Winkel von 45^0. Die verticale Seitenkraft von Y_1 oder

$$Y_1 \,.\, \sin 45^0 = Y_1 \,.\, \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ist gleich $-\ V_1$ zu setzen, also:

$$Y_1 = -\ V_1 \,.\, \sqrt{2} = +\ 21000 \,.\, \sqrt{2}$$

$$Y_1 \text{ (max)} = +\ 29700^{k}.$$

Bestimmung der Grössen X_2, Z_3, V_2, Y_2.

(Schnitt γ δ Fig. **56**.)

Die Momenten-Gleichung des Stücks Fig. **56** in Bezug auf den Punkt E ist:

$$0 = X_2 \,.\, 2 + (1000 + 5000)\,[(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8})\,4 + (\tfrac{7}{8} \,.\, 4 - 2)],$$

woraus sich ergiebt:

$$X_2 \text{ (min)} = -\ 36000^{k}.$$

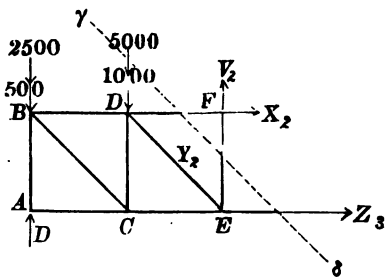
Zur Bestimmung von Z_3 wählt man den Punkt F als Drehpunkt und erhält:

$$0 = -Z_3 \cdot 2 + (1000 + 5000)\left[\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8}\right) 4 + \left(\tfrac{7}{8} \cdot 4 - 2\right)\right]$$
$$Z_3 \text{ (max)} = +\,36000^{k}.$$

Die Gleichung der Verticalkräfte für das Stück Fig. **56** ist:

$$0 = -V_2 - 1000\left[\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8} - \left(1 - \tfrac{7}{8}\right)\right]$$
$$- 5000\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8}\right) + 5000\left(1 - \tfrac{7}{8}\right).$$

Fig. 56.



Wenn man in dieser Gleichung einmal das negative und einmal das positive von den beiden mit 5000 multiplicirten Gliedern fortlässt, so erhält man:

$$V_2 \text{ (max)} = -\ 1875^{k}.$$
$$V_2 \text{ (min)} = -\ 15625^{k}.$$

Wenn man diese Werthe mit $\sqrt{2}$ multiplicirt und mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versieht, so erhält man:

$$Y_2 \text{ (max)} = +\ 22100^{k}.$$
$$Y_2 \text{ (min)} = +\ 2650^{k}.$$

In gleicher Weise erhält man für die Stücke in den übrigen Feldern folgende Gleichungen:

$$0 = X_3 \cdot 2 + (1000 + 5000)\left[\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}\right) 6 + \left(\tfrac{6}{8} \cdot 6 - 2\right) + \left(\tfrac{7}{8} \cdot 6 - 4\right)\right]$$
$$X_3 \text{ (min)} = -\ 45000^{k}.$$

$$0 = -Z_4 \cdot 2 + (1000 + 5000)\left[\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}\right) 6 + \left(\tfrac{6}{8} \cdot 6 - 2\right) + \left(\tfrac{7}{8} \cdot 6 - 4\right)\right]$$
$$Z_4 = +\,45000^{k}.$$

$$0 = -V_3 - 1000\left[\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8} - \left(1 - \tfrac{6}{8}\right) - \left(1 - \tfrac{7}{8}\right)\right]$$
$$- 5000\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}\right) + 5000\left[\left(1 - \tfrac{6}{8}\right) + \left(1 - \tfrac{7}{8}\right)\right]$$

$$V_3 \begin{cases} \text{(max)} = +\ 375^{k} \\ \text{(min)} = -\ 10875^{k} \end{cases}$$

$$Y_3 \begin{cases} \text{(max)} = +\ 15400^{k} \\ \text{(min)} = -\ 530^{k}. \end{cases}$$

$$0 = X_4 \cdot 2 + (1000 + 5000)\left[\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{4}{8}\right) 8 + \left(\tfrac{5}{8} \cdot 8 - 2\right) + \left(\tfrac{6}{8} \cdot 8 - 4\right) + \left(\tfrac{7}{8} \cdot 8 - 6\right)\right]$$
$$X_4 = -\ 48000^{k}.$$

$$0 = -Z_5 \cdot 2 + (1000 + 5000)\left[\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{4}{8}\right) 8 + \left(\tfrac{5}{8} \cdot 8 - 2\right) + \left(\tfrac{6}{8} \cdot 8 - 4 + \left(\tfrac{7}{8} \cdot 8 - 6\right)\right]\right.$$
$$Z_5 = +\,48000^{k}.$$

$$0 = -V_4 - 1000\left[\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{4}{8} - \left(1 - \tfrac{5}{8}\right) - \left(1 - \tfrac{6}{8}\right) - \left(1 - \tfrac{7}{8}\right)\right]$$
$$- 5000\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{4}{8}\right) + 5000\left[\left(1 - \tfrac{5}{8}\right) + \left(1 - \tfrac{6}{8}\right) + \left(1 - \tfrac{7}{8}\right)\right]$$

$$V_4 \begin{cases} (\max) = +3250^k \\ (\min) = -6750^k \end{cases}$$

$$Y_4 \begin{cases} (\max) = +9550^k \\ (\min) = -4600^k. \end{cases}$$

Die nun folgenden Momenten-Gleichungen beziehen sich allemal auf den Theil der Construction, welcher rechts von der betreffenden Schnittlinie liegt.

$$0 = -X_5 \cdot 2 - (1000 + 5000)\left[\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8}\right)6 + \left(\tfrac{8}{8} \cdot 6 - 2\right) + \left(\tfrac{7}{8} \cdot 6 - 4\right)\right]$$

$$X_5 (\min) = -45000^k.$$

$$0 = Z_6 \cdot 2 - (1000 + 5000)\left[\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8}\right)6 + \left(\tfrac{8}{8} \cdot 6 - 2\right) + \left(\tfrac{7}{8} \cdot 6 - 4\right)\right]$$

$$Z_6 (\max) = +45000^k.$$

$$0 = -V_5 + 1000\left[\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{4}{8} - \left(1 - \tfrac{5}{8}\right) - \left(1 - \tfrac{6}{8}\right) - \left(1 - \tfrac{7}{8}\right)\right]$$
$$+ 5000\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{4}{8}\right) \quad - 5000\left[\left(1 - \tfrac{5}{8}\right) + \left(1 - \tfrac{6}{8}\right) + \left(1 - \tfrac{7}{8}\right)\right]$$

$$V_5 \begin{cases} (\max) = +6750^k \\ (\min) = -3250^k \end{cases}$$

$$Y_5 \begin{cases} (\max) = +4600^k \\ (\min) = -9550^k. \end{cases}$$

$$0 = -X_6 \cdot 2 - (1000 + 5000)\left[\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{8}{8}\right)4 + \left(\tfrac{7}{8} \cdot 4 - 2\right)\right]$$

$$X_6 (\min) = -36000^k.$$

$$0 = Z_7 \cdot 2 - (1000 + 5000)\left[\left(\tfrac{1}{8} \ldots \tfrac{8}{8}\right)4 + \left(\tfrac{7}{8} \cdot 4 - 2\right)\right]$$

$$Z_7 (\max) = +36000^k.$$

$$0 = -V_6 + 1000\left[\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8} - \left(1 - \tfrac{6}{8}\right) - \left(1 - \tfrac{7}{8}\right)\right]$$
$$+ 5000\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{5}{8}\right) \quad - 5000\left[\left(1 - \tfrac{6}{8}\right) + \left(1 - \tfrac{7}{8}\right)\right]$$

$$V_6 \begin{cases} (\max) = +10875^k \\ (\min) = -375^k \end{cases}$$

$$Y_6 \begin{cases} (\max) = +530^k \\ (\min) = -15400^k. \end{cases}$$

$$0 = -X_7 \cdot 2 - (1000 + 5000)\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8}\right) \cdot 2$$

$$X_7 (\min) = -21000^k.$$

$$0 = Z_8 \cdot 2 - (1000 + 5000)\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{7}{8}\right) \cdot 2$$

$$Z_8 (\max) = +21000^k.$$

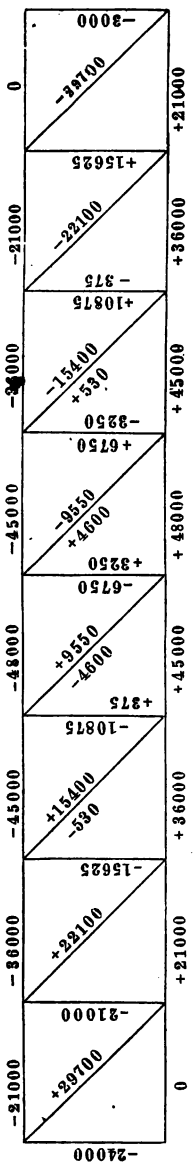
$$0 = -V_7 + 1000\left[\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8} - \left(1 - \tfrac{7}{8}\right)\right] + 5000\left(\tfrac{1}{8} + \ldots \tfrac{6}{8}\right) \quad - 5000\left(1 - \tfrac{7}{8}\right)$$

$$V_7 \begin{cases} (\max) = +15625^k \\ (\min) = +1875^k \end{cases}$$

$$Y_7 \begin{cases} (\max) = -2650^k \\ (\min) = -22100^k. \end{cases}$$

Die Diagonale Y_8 trifft mit keinem Verticalständer an einem unbelasteten Knotenpunkte zusammen, da der Punkt R wegen des hier angreifenden Auflagerdrucks W als ein solcher nicht angesehen werden darf. Es ist folglich die bei der Bestimmung der übrigen Grössen Y befolgte Regel hier nicht anwendbar. Man erkennt indess leicht, dass die verticale Seitenkraft von Y_8 also $\frac{Y_8}{V2}$ ausser dem Gegendruck W des Auflagers und der Spannung des letzten Verticalständers die einzige Verticalkraft ist, welche

Fig. 57.



an dem Punkte R angreift. Es ist folglich bei voller Belastung:

$$\frac{Y_8}{\sqrt{2}} + W - 3000 = 0$$

und erreicht demnach Y_8 seinen grössten negativen Werth, wenn W am grössten wird, d. h. bei voller Belastung des Trägers, wobei $W = \frac{48000^k}{2}$ wird. Es ist daher:

$$Y_8 \text{ (min)} = -\ 21000 \,.\, \sqrt{2} = -\ 29700^k.$$

Die Resultate sind in Fig. **57** zusammengestellt.

§ 11.
Abgeleitete Formen.

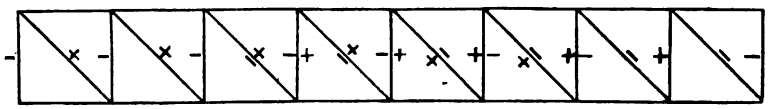
Die Betrachtung der oben gefundenen Momenten-Gleichungen und Vergleichung der dem Fortlassen der positiven und negativen Glieder entsprechenden Belastungszustände mit den Resultaten lässt erkennen: dass das früher bei der Berechnung des parabolischen Trägers gefundene Gesetz hinsichtlich der Diagonal-Spannungen auch für einen Fachwerk-Träger gültig ist. Die Spannung der Diagonale eines bestimmten Feldes wird immer dann ein Maximum resp. Minimum, wenn die eine Seite des Trägers (von diesem Felde an gerechnet) belastet ist.

Betrachtet man ferner den obigen Träger Fig. **57** von der Kehrseite, so erhält man die Spannungszahlen für einen Träger, dessen Diagonalen von links nach rechts ansteigen (statt von rechts nach links). Sollen die Diagonalen als Zugbänder construirt werden, welche unfähig sind, eine Druckspannung anzunehmen, so müssen in der Anordnung des Diagonalen-Systems folgende Aenderungen vorgenommen werden: erstens, in allen den Feldern des obigen Trägers, wo

die Diagonale immer gedrückt wird, muss dieselbe vertauscht werden mit einer Diagonale des entgegengesetzten Systems; zweitens: in allen den Feldern, wo die Diagonale abwechselnd gezogen und gedrückt wird, muss eine Diagonale des entgegengesetzten Systems hinzugefügt werden.

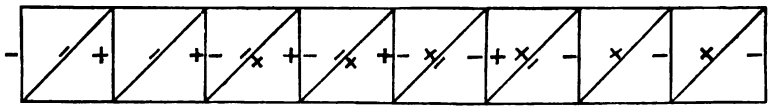
Um diese Aenderungen leicht übersehen zu können, sind in Fig. **58** und Fig. **59** zwei Träger mit entgegengesetzten Diagonalen-

Fig. 58.



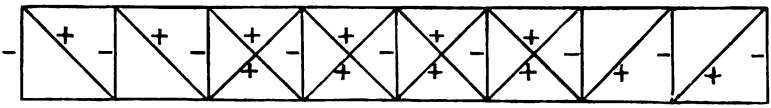
Systemen übereinander gestellt und durch eingeschriebene Plus- und Minus-Zeichen die Arten der Spannungen angedeutet. Man

Fig. 59.



erkennt sogleich, dass die Ausführung jener Aenderung zu der in Fig. **60** dargestellten Construction führt, in welcher sämmtliche

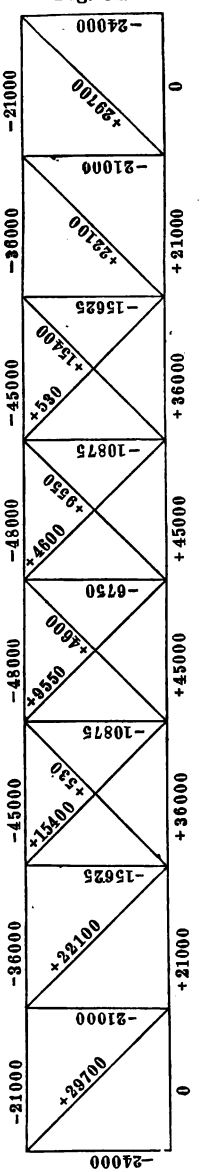
Fig. 60.



Diagonalen nur Zugspannungen annehmen. Die grössten Werthe dieser Zugspannungen kann man aus den Figuren **58** und **59** sofort abschreiben, wenn man sich zu den betreffenden Plus-Zeichen allemal den Betrag des Maximum aus Fig. **57** hinzugefügt denkt.

Da in einem Verticalständer nur dann Zugspannung entstehen kann, wenn die an den unbelasteten Endpunkt (Fusspunkt) derselben anstossende Diagonale Druckspannung annimmt, letzterer Fall aber in Fig. **60** nicht vorkommt, so kann hinsichtlich der Verticalständer in Fig. **60** nur von Druckspannungen die Rede sein. Es kommen also nur die Werthe $V(\min)$ in Betracht und zwar

Fig. 61.



diejenigen, welche der neuen Anordnung des Diagonalen-Systems entsprechen, d. h. für die linke Seite die Werthe aus Fig. **58**, für die rechte Seite die Werthe aus Fig. **59**.

Was endlich die horizontalen Stangen *X, Z* betrifft, welche bei voller Belastung des Trägers am stärksten gespannt werden, so ist leicht zu erkennen, dass auf der linken Seite die links ansteigenden, auf der rechten Seite die rechts ansteigenden Diagonalen bei voller Belastung in Thätigkeit gerathen und sind demnach für die linke Seite die Werthe aus Fig. **58**, für die rechte Seite die Werthe aus Fig. **59** als die für den neuen Träger geltenden anzusehen.

Auf diese Weise kann man die oben gefundenen Resultate benutzen, um ohne neue Rechnung für einen Träger von der Form Fig. **60** die Spannungszahlen in die Figur einzutragen, wie das in Fig. **61** geschehen ist.

Wenn umgekehrt die Diagonalstangen so construirt sind, dass sie nur Druckspannung annehmen können — wie das z. B. bei Holz-Construction zu geschehen pflegt — so muss der Träger die Form Fig. **62** erhalten, für welche die Spannungszahlen auf eine der vorigen ganz ähnliche Weise aus Fig. **57** abgeleitet werden können.

Liegt die Fahrbahn unten statt oben, so kann man die **unteren** Knotenpunkte sowohl für die mobile als für die permanente Last als Belastungspunkte ansehen. Die Spannungszahlen der Horizontal- und Diagonal-Stangen werden dadurch nicht geändert. Nur für die Verticalstangen ergeben sich andere Werthe, welche mittelst des in § 9 gefundenen Satzes: „Diagonalstange und Verticalstange haben da, wo sie an einem unbelasteten Punkte zusammentreffen, Verticalspannungen von gleicher Grösse und entgegen-

Fig. 62.

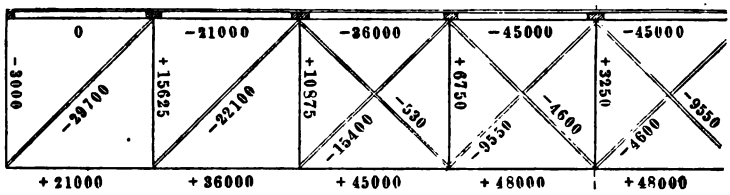


Fig. 64.

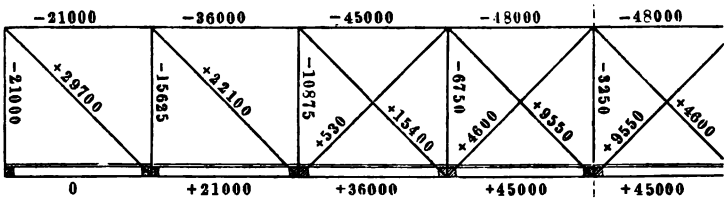


Fig. 65.

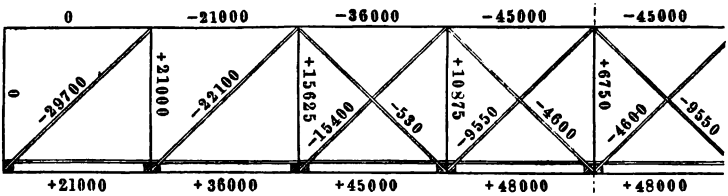


Fig. 67.

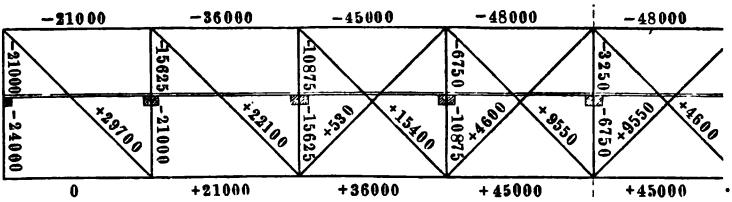


Fig. 68.

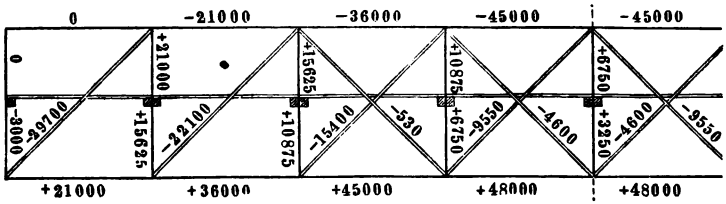
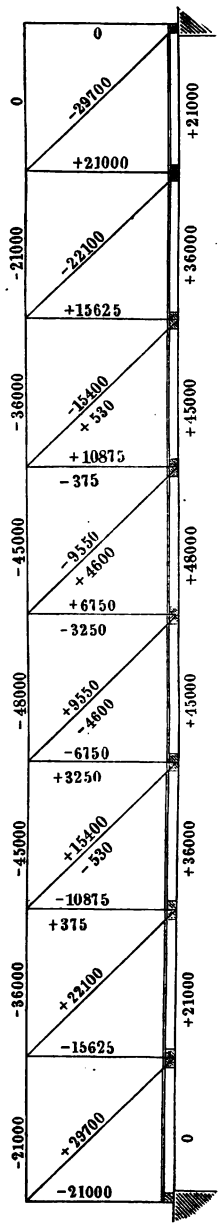


Fig. 63.



gesetztem Vorzeichen“ leicht bestimmt werden können. Die unbelasteten Punkte sind hier die **oberen**, also findet man in Fig. **63** die Spannungszahl irgend eines Verticalständers, indem man die Spannungszahl der **rechts** anstossenden Diagonale durch $\sqrt{2}$ dividirt, und das Vorzeichen umkehrt. Aus Fig. **63** lassen sich dann gerade wie bei dem vorigen Fall die beiden abgeleiteten Formen Fig. **64** und Fig. **65** bilden.

Ist die Fahrbahn **zwischen** Kopf und Fuss an den Verticalständern befestigt, so kann man diese Zwischenpunkte als Angriffspunkte für die permanenten und mobilen Belastungen ansehen. Es sind dann die oberen sowohl als die unteren Knotenpunkte als unbelastete anzusehen, mithin hat jede Diagonalstange mit den angrenzenden Theilen der beiden benachbarten Verticalständer gleiche Verticalspannung, nur von entgegengesetztem Vorzeichen. In Fig. **66** hat z. B. die Diagonale des dritten Feldes die beiden Spannungszahlen

$$+ 15400 \text{ und } - 530.$$

Diese Werthe durch $\sqrt{2}$ dividirt und mit entgegengesetzten Vorzeichen versehen, geben

$$- 10875 \text{ und } + 375$$

als Spannungszahlen für den oberen Theil des links angrenzenden und den unteren Theil des rechts angrenzenden Verticalständers. Die consequente Befolgung dieser in § 9 gefundenen Regel führt, sowohl für diese, als auch für die beiden abgeleiteten Formen Fig. **67** und Fig. **68** ohne Schwierigkeit zu den richtigen Spannungszahlen der Verticalständer. Hinsichtlich der Horizontal- und Diagonalstangen aber

Fig. 66.

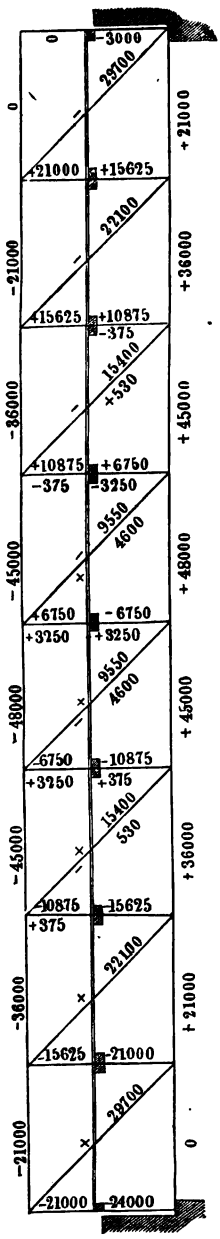


Fig. 69.

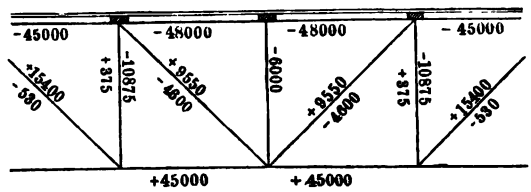


Fig. 70.

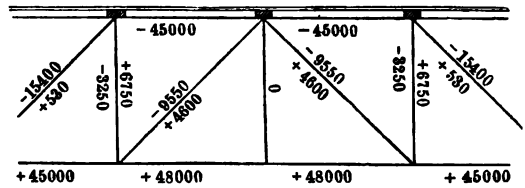


Fig. 71.

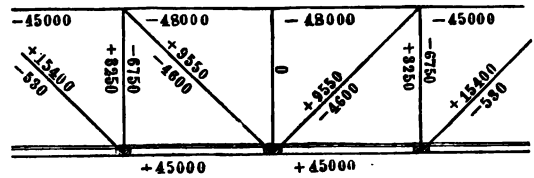


Fig. 72.

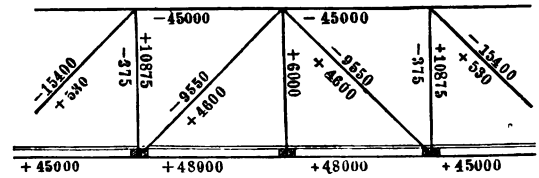
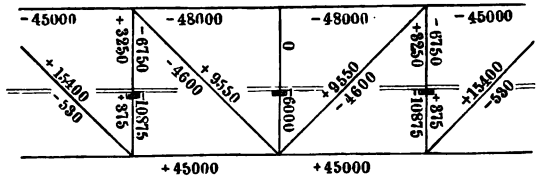
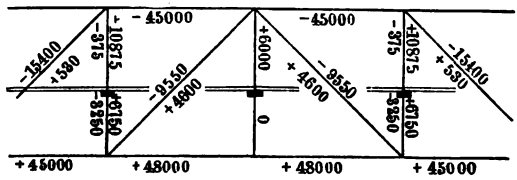


Fig. 73.



macht es durchaus keinen Unterschied, ob die Fahrbahn oben, unten oder in der Mitte liegt.

Fig. 74.



Endlich bei symmetrischen Trägern mit einfachem Diagonalen-System kommt nur der **mittlere** Verticalständer in Frage, da für alle übrigen Stücke die Zahlen unmittelbar aus den Figuren **57, 63** und **66** abgeschrieben werden können. Es ist deshalb in den Figuren **69, 70, 71, 72, 73** und **74** allemal nur das Mittelstück des Trägers dargestellt. Man erkennt bei Betrachtung dieser Figuren leicht, dass die Spannungszahl für den mittleren Verticalständer entweder 6000 oder 0 sein muss, je nachdem derjenige seiner beiden Endpunkte, an welchen keine Diagonale grenzt, ein Belastungspunkt ist oder nicht.

§ 12.

Bemerkungen über die Zulässigkeit der in Bezug auf die Belastungsweise gemachten Voraussetzungen.

Es ist hier der Ort, einiger Bedenken zu erwähnen, welche gegen die obige Berechnungsweise erhoben werden könnten, und auf welche schon im Eingange dieser Abhandlung hingewiesen wurde. Die den vorhergehenden Rechnungen zum Grunde gelegten Annahmen in Betreff der Wirkungsweise der Belastungen entsprechen der Wirklichkeit nicht ganz genau, vielmehr bedürfen streng genommen die Resultate noch einer kleinen Correction.

Erstens: wirkt das Eigengewicht des Trägers wie eine Last, welche über die oberen sowohl als die unteren Knotenpunkte vertheilt ist und nicht, wie oben angenommen wurde, ausschliesslich in denjenigen Knotenpunkten, welche in der Fahrbahn-Linie liegen.

Um den Einfluss des hiermit begangenen Fehlers zu ermitteln, hat man sich zunächst klar zu machen, dass die anzubringende

Correction **nur** auf die Verticalständer sich beziehen kann, weil die Spannungen aller übrigen Theile ganz unabhängig sind von der Höhenlage der Belastungspunkte. Fasst man einen solchen Verticalständer in Fig. **53** oder Fig. **54** ins Auge und denkt sich den von ihm zu tragenden Antheil an der permanenten Last in **richtigem** Verhältniss auf Kopf- und Fusspunkt desselben vertheilt, so überzeugt man sich leicht, dass auch in diesem Falle, bei der jetzigen Lage der Lasten, die unmittelbare Anwendung der Methode der statischen Momente auf einfache und sichere Weise zu den entsprechenden Werthen für die Spannungszahlen der Verticalständer führen würde. Einfacher ist es indessen, die Rechnung so zu führen, wie in § 9 und § 10 geschehen — also die in der Fahrbahnlinie liegenden Angriffspunkte der mobilen Last allemal auch als Angriffspunkte der permanenten Last anzusehen, und erst hinterher — wenn dies nöthig erscheint — in folgender Weise die Correction hinzuzufügen: Man denke sich unmittelbar zur Seite jenes Verticalständers noch einen Nebenständer, dessen Function es ist, die gemachten Annahmen in aller Strenge zu verwirklichen. Dieser Nebenständer muss also den vorher unrichtiger Weise zu der Belastung des Fahrbahnpunktes gerechneten Theil der permanenten Last nunmehr wirklich auf denselben übertragen. Er wird als Stütze fungiren, wenn diese Last von oben nach unten, als Hängestange dagegen, wenn diese Last von unten nach oben übertragen werden soll. Seine Spannung ist also negativ, wenn er über der Fahrbahn, positiv, wenn er unter der Fahrbahn liegt, und dem absoluten Werthe nach immer gleich dem zu übertragenden Gewicht. Denkt man sich nachher diesen Nebenständer mit dem Hauptständer zu einem Stück verschmolzen, so ist klar, dass die Hinzufügung der Spannungszahl des Nebenständers zu der vorher gefundenen Zahl des Hauptständers für die totale Spannung nunmehr den richtigen Werth liefern muss.

Um dies an einem Beispiel deutlich zu machen: sei die **wahre** Massen-Vertheilung in der Construction Fig. **57** so beschaffen, dass von den 1000^k permanenter Last zwei Drittel auf den Kopfpunkt und ein Drittel auf den Fusspunkt jedes Verticalständers zu rechnen sind — während früher alle drei Drittel auf den Kopfpunkt gerechnet wurden, da die Fahrbahn oben liegt —. Der hinzu zu denkende Nebenständer hat die Aufgabe, diese frühere Annahme zu verwirklichen, muss also das unten befind-

liche Drittel nach oben übertragen und bildet in diesem Falle eine Hängestange, an welcher 333^k hängen. Es findet daher eine permanente Spannung von $+ 333^k$ in demselben statt und diese wäre zu den vorher gefundenen Spannungszahlen der Verticalständer überall hinzu zu rechnen, um die genaueren Werthe zu erhalten. Der mit V_3 bezeichnete Verticalständer z. B. bekäme also nunmehr die Spannungszahlen:

$$V_3 \text{ (max)} = + 375 + 333 = + 708^k$$
$$V_3 \text{ (min)} = - 10875 + 333 = - 10542^k.$$

Wenn im entgegengesetzten Falle bei unten liegender Fahrbahn z. B. in Fig. **63** ein Drittel der permanenten Last auf den Kopfpunkt gerechnet werden soll — statt dass früher alle drei Drittel unten gerechnet wurden — so würde jeder fingirte Nebenständer eine Stütze bilden, welche das oben liegende Drittel unterstützt und nach unten überträgt, erhielte also die Spannungszahl $- 333^k$, welche überall den Spannungszahlen der Verticalständer hinzuzufügen wäre. Für den mit V_3 bezeichneten Verticalständer z. B. ergäben sich dann die Werthe:

$$V_3 \text{ (max)} = + 3250 - 333 = + 2917^k$$
$$V_3 \text{ (min)} = - 6750 - 333 = - 7083^k.$$

Für diesen Fall ist, wie man sieht, die Correction so unbedeutend, dass die oben gemachten Annahmen allenfalls sich rechtfertigen lassen. Bei grösseren Brücken dagegen, wo die permanente Last gross ist im Vergleich zur mobilen Last, würde diese Correction nicht überflüssig sein.

Ein zweiter Umstand, der zu Bedenken Veranlassung geben könnte, betrifft die Wirkungsweise der mobilen Last. Es ist im Eingange dieser Abhandlung in Betreff der nachfolgenden Zahlenbeispiele die Voraussetzung angekündigt: dass jedes Feld durch einen besonderen Zwischenträger überbrückt sei, welcher die permanente Last der Fahrbahn und mit ihr die mobile Last trägt. Letztere wird durch den Zwischenträger auf die beiden Knotenpunkte an den Enden des von ihm überbrückten Feldes übertragen, und kommt also nur bei voller Belastung desselben die Hälfte davon auf jeden der Endpunkte. Die Spannung der Diagonalen und Verticalen wurde nun oben unter der Voraussetzung berechnet, dass alle Knotenpunkte an der einen Seite ganz unbelastet waren, die an der anderen Seite dagegen sämmtlich ihre

volle Belastung hatten. Streng genommen kann aber der Fall gar nicht eintreten, dass bei allmäligem Fortschreiten der mobilen Last ein Knotenpunkt schon seine volle Belastung hat, während der nächstfolgende noch ganz unbelastet ist.

Wenn man indessen bedenkt, dass in der Wirklichkeit die mobile Last, wie z. B. ein über die Brücke fahrender Eisenbahnzug, keineswegs eine continuirlich und gleichförmig vertheilte Belastung bildet, dass vielmehr an den Berührungsstellen zwischen Rad und Schiene der Druck sich concentrirt, und dass im ungünstigsten Falle — wenn nämlich der Radstand gerade gleich der Entfernung zweier benachbarter Knotenpunkte ist — jene Annahme sogar in aller Strenge gerechtfertigt ist: so erscheint es, wenn die Zahl der Felder nicht gar zu klein ist, wohl motivirt, von der Genauigkeit ein klein wenig abzuweichen, in einer Richtung, welche höchstens hinsichtlich der Diagonalen und Verticalen zu anderen und zwar etwas grösseren Querschnitten führen kann, und jenen ungünstigsten Ausnahmefall als Regel zu betrachten.

Vollends verschwinden die beiden hier erwähnten Bedenken in solchen Fällen, bei welchen einerseits durch die grössere Anzahl der Felder die Ungenauigkeit der letzteren Voraussetzung sich noch mehr vermindert, und wo ausserdem das Nichtvorhandensein der Verticalständer eine von der vorigen etwas abweichende, der Wirklichkeit mehr entsprechende Berechnungsweise von selbst mit sich bringt. Aus diesem Grunde erscheint die nachfolgend berechnete Construction vorzugsweise geeignet, um für die Anwendung der obigen Theorie als Beispiel gewählt zu werden.

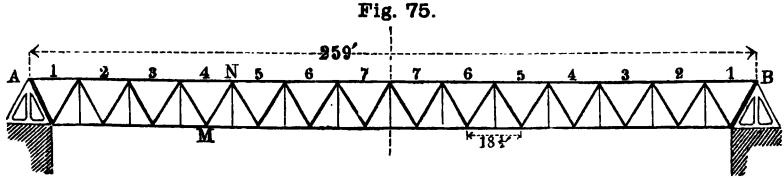
§ 13.

Fachwerkträger mit gleichseitigen Dreiecken.

(Trent-Brücke bei Newark.)

Jede Tragwand hat, wie Fig. **75** zeigt, 27 Felder von der Form gleichseitiger Dreiecke, deren Spitzen abwechselnd nach

Fig. 75.



oben und nach unten gekehrt sind. Die Fahrbahn liegt unten und wird zur einen Hälfte direct durch die unteren Knotenpunkte

unterstützt, zur anderen Hälfte wird sie von den verticalen Hängestangen getragen, welche an den oberen Knotenpunkten aufgehängt sind. Es wird demnach von der permanenten sowohl als von der mobilen Last stets die eine Hälfte von den oberen, die andere Hälfte von den unteren Knotenpunkten getragen. Der ganze Träger ist aufgehängt an den beiden Bolzen A und B, deren jeder von einem dreieckigen gusseisernen Bock getragen wird, welcher mit der Basis auf dem Landpfeiler ruht. Die Entfernung dieser beiden Aufhängepunkte beträgt 259 Fuss, die Seitenlänge jedes Dreiecks also $\frac{259}{14} = 18{,}5$ Fuss. Die Höhe der Tragwand ist $\frac{18{,}5}{2} . \operatorname{tg} 60^0 = 9{,}25 . 1{,}73$. Wenn man also, wie im Folgenden geschehen soll, die Länge von 9,25 Fuss zur Längen-Einheit wählt, so ist die Seitenlänge jedes Dreiecks $= 2$, die Höhe $= 1{,}73$, die ganze Länge des Trägers $= 28$ zu setzen.

Das Gewicht der ganzen Brücke beträgt 589 Tonnen, wovon auf jede der vier Tragwände $\frac{589}{4} = 147\frac{1}{4}$ Tonnen kommen. Die mobile Last zu 1 Tonne pro laufenden Fuss für jedes der beiden Gleise gerechnet, würde $\frac{2.259}{4} = 129{,}5$ Tonnen für jede Tragwand betragen. Die totale Belastung eines Trägers ist also im Maximum:

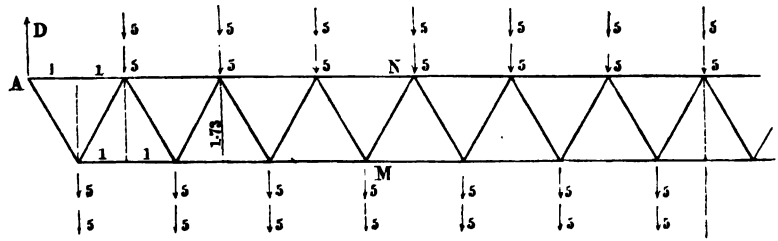
$$147{,}25 + 129{,}5 = 276{,}75 \text{ Tonnen};$$

davon kommen auf jeden Knotenpunkt $\frac{276{,}75}{28}$ Tonnen, wofür in runder Summe 10 Tonnen gerechnet sind. Von diesen 10 Tonnen wäre zwar genau genommen etwas mehr für die permanente als für die mobile Last zu rechnen — da diese beiden wie 147,25 : 129,5 sich verhalten — doch ist im Folgenden der leichteren Rechnung wegen jede zu 5 Tonnen gerechnet — eine Annahme, welche hinsichtlich der horizontalen Stangen keine Aenderung bedingt, nur für die Spannungen in den Streben zu etwas grösseren Werthen führt und allenfalls gerechtfertigt erscheint, wenn man erwägt, dass die Grösse der mobilen Last nie so genau festgestellt werden kann und auf manchen Bahnen zu mehr als 1 Tonne pro laufenden Fuss angenommen wird.

Da die verticalen Stangen, wie oben schon erwähnt, nur als Hängestangen fungiren, welche die halben Lasten auf die oberen Knotenpunkte übertragen, so kann man bei der Berechnung der Spannungen dieselben ganz unberücksichtigt lassen und statt dessen

die oberen Knotenpunkte direct belastet ansehen. Die Belastungsweise des Trägers gestaltet sich dann so, wie in Fig. **76** durch die Pfeile und eingeschriebenen Zahlen angedeutet ist.

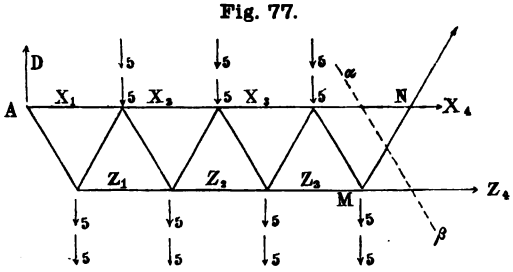
Fig. 76.



Berechnung der Spannungen X und Z in den oberen und unteren horizontalen Stangen.

Trennt man durch den Schnitt $\alpha\ \beta$ den Theil Fig. **77** von dem anderen Theile des Trägers und stellt man für das abgeschnittene Stück die Momenten-Gleichungen auf, indem man einmal den Punkt M und einmal den Punkt N als Drehpunkt wählt, so erhält man die Gleichungen:

Fig. 77.



$$0 = X_4 \,.\, 1{,}73 + D \,.\, 7 - 5\,(1+2+3+4+5+6) - 5\,(1+2+3+4+5+6)$$

$$0 = -\,Z_4 \,.\, 1{,}73 + D \,.\, 8 - 5\,(1+2+3+4+5+6+7) - 5\,(1+2+3+4+5+6+7).$$

Substituirt man in diesen Gleichungen für D seinen Werth:

$$D = 5\,(\tfrac{1}{28}+\tfrac{2}{28}+\ldots\tfrac{27}{28}) + 5\,(\tfrac{1}{28}+\tfrac{2}{28}+\ldots\tfrac{27}{28})$$

und stellt die von einer und derselben Belastung herrührenden Glieder allemal zusammen, so nehmen sie die Form an:

$$0 = X_4 \,.\, 1{,}73$$
$$+5[(\tfrac{1}{28}+\tfrac{2}{28}+\ldots\tfrac{21}{28})7+(\tfrac{22}{28}.7-1)+(\tfrac{23}{28}.7-2)+\ldots(\tfrac{27}{28}.7-6)]$$
$$+5[(\tfrac{1}{28}+\tfrac{2}{28}+\ldots\tfrac{21}{28})7+(\tfrac{22}{28}.7-1)+(\tfrac{23}{28}.7-2)+\ldots(\tfrac{27}{28}.7-6)].$$

$$0 = -Z_4 \,.\, 1{,}73$$
$$+5[(\tfrac{1}{28}+\tfrac{2}{28}+\ldots\tfrac{20}{28})8+(\tfrac{21}{28}.8-1)+(\tfrac{22}{28}.8-2)+\ldots(\tfrac{27}{28}.8-7)]$$
$$+5[(\tfrac{1}{28}+\tfrac{2}{28}+\ldots\tfrac{20}{28})8+(\tfrac{21}{28}.8-1)+(\tfrac{22}{28}.8-2)+\ldots(\tfrac{27}{28}.8-7)].$$

Man erkennt bei dem Anblick dieser Gleichungen sofort, dass alle von der mobilen Last herrührenden Glieder einerlei Vorzeichen haben, dass also das Weglassen irgend einer Belastung die absoluten Werthe von X_4 und Z_4 nur verkleinern kann.

Wenn man sich auf diese Weise davon überzeugt hat, dass bei diesem Träger (wie überhaupt bei allen Fachwerkbrücken) die horizontalen Stangen bei voller Belastung am stärksten gespannt werden, so kann man nun auch kürzer, indem man für D seinen numerischen Werth bei voller Belastung, nämlich:

$$D = 10\,(\tfrac{1}{28}+\tfrac{2}{28}+\ldots\tfrac{27}{28}) = 135 \text{ Tonnen}$$

einführt, und die Glieder, welche die permanente und mobile Last enthalten, verschmilzt, den Gleichungen von vornherein die Form geben:

$$0 = X_4 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 7 - 10\,(1+2+\ldots 6)$$
$$0 = -Z_4 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 8 - 10\,(1+2+\ldots 7).$$

Die Auflösung dieser Gleichungen ergiebt die Werthe:

$$X_4\,(\min) = -425 \text{ Tonnen}$$
$$Z_4\,(\max) = +462 \text{ Tonnen}.$$

Auf gleiche Weise erhält man für die übrigen X und Z folgende Gleichungen:

$0 = X_1 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 1$
$X_1\,(\min) = -78$ Tonnen.
$0 = -Z_1 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 2 - 10 \,.\, 1$
$Z_1\,(\max) = +150$ T.
$0 = X_2 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 3 - 10\,(1+2)$
$X_2\,(\min) = -216$ T.
$0 = -Z_2 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 4 - 10\,(1+2+3)$
$Z_2\,(\max) = +277$ T.
$0 = X_3 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 5 - 10\,(1+2+3+4)$
$X_3\,(\min) = -338$ T.
$0 = -Z_3 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 6 - 10\,(1+2+3+4+5)$
$Z_3\,(\max) = +381$ T.
$0 = X_5 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 9 - 10\,(1+2+\ldots 8)$
$X_5\,(\min) = -494$ T.
$0 = -Z_5 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 10 - 10\,(1+2+\ldots 9)$
$Z_5\,(\max) = +520$ T.

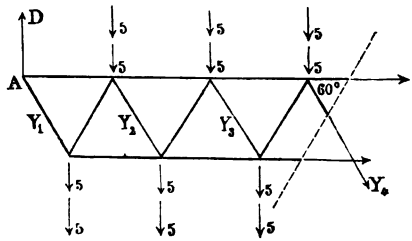
$0 = X_6 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 11 - 10\,(1 + 2 + \ldots 10)$
$X_6\,(\min) = -540$ T.
$0 = -Z_6 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 12 - 10\,(1 + 2 + \ldots 11)$
$Z_6\,(\max) = +555$ T.
$0 = X_7 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 13 - 10\,(1 + 2 + \ldots 12)$
$X_7\,(\min) = -564$ T.
$0 = -Z_7 \,.\, 1{,}73 + 135 \,.\, 14 - 10\,(1 + 2 + \ldots 13)$
$Z_7\,(\max) = +566$ T.

Berechnung der Spannungen Y und U in den Streben.

Da die Streben einen Winkel von 60^0 mit der Horizontalen bilden, so sind die verticalen Seitenkräfte der Strebespannungen respective:

$Y \,.\, \sin 60^0$ und $U \,.\, \sin 60^0$ oder:
$Y \,.\, 0{,}866$ und $U \,.\, 0{,}866$.

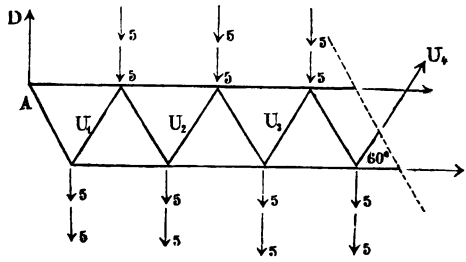
Fig. 78.



Man erhält also beispielsweise für die beiden Stücke Fig. **78** und Fig. **79**, indem man für jedes derselben die algebraische Summe der Verticalkräfte gleich Null setzt, zur Bestimmung von Y_4 und U_4 die beiden Gleichungen:

$$0 = Y_4 \,.\, 0{,}866 - D + 5 \,.\, 6 + 5 \,.\, 6$$
$$0 = -U_4 \,.\, 0{,}866 - D + 5 \,.\, 7 + 5 \,.\, 7,$$

Fig. 79.



welche, wenn man darin für D seinen Werth

$$D = 5\,(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{27}{28}) + 5\,(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{27}{28})$$

substituirt und die von den einzelnen Belastungen zu dem Drucke D gelieferten Beiträge jedesmal zusammenstellt mit den direct von ihnen hervorgebrachten Verticalkräften, die Form annehmen:

$$0 = Y_4 \,.\, 0{,}866 - 5\left[\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{21}{28} - \left(1 - \tfrac{22}{28}\right) - \left(1 - \tfrac{23}{28}\right) - \ldots \left(1 - \tfrac{27}{28}\right)\right]$$
$$- 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{21}{28}\right) + 5\left[\left(1 - \tfrac{22}{28}\right) + \left(1 - \tfrac{23}{28}\right) + \ldots \left(1 - \tfrac{27}{28}\right)\right]$$

$$0 = - U_4 \,.\, 0{,}866 - 5\left[\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{20}{28} - \left(1 - \tfrac{21}{28}\right) - \left(1 - \tfrac{22}{28}\right) - \ldots \left(1 - \tfrac{27}{28}\right)\right]$$
$$- 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{20}{28}\right) + 5\left[\left(1 - \tfrac{21}{28}\right) + \left(1 - \tfrac{22}{28}\right) + \ldots \left(1 - \tfrac{27}{28}\right)\right].$$

Die von der mobilen Last herrührenden Glieder haben **nicht** einerlei Vorzeichen in diesen Gleichungen; es kommt also die oben gegebene Regel zur Anwendung: man lässt einmal die positiven und einmal die negativen Glieder (von den die mobile Last betreffenden) fort, und es ergeben sich dann folgende Gleichungen:

$$0 = Y_4 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{21}{28} - \tfrac{6}{28} - \tfrac{5}{28} - \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$
$$- 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{21}{28}\right)$$
$$Y_4\,(\max) = + 91 \text{ T.}$$

$$0 = Y_4 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{21}{28} - \tfrac{6}{28} - \tfrac{5}{28} - \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$
$$+ 5\left(\tfrac{6}{28} + \tfrac{5}{28} + \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$
$$Y_4\,(\min) = + 39 \text{ T.}$$

$$0 = - U_4 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{20}{28} - \tfrac{7}{28} - \tfrac{6}{28} - \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$
$$+ 5\left(\tfrac{7}{28} + \tfrac{6}{28} + \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$
$$U_4\,(\max) = - 32 \text{ T.}$$

$$0 = - U_4 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{20}{28} - \tfrac{7}{28} - \tfrac{6}{28} - \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$
$$- 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{20}{28}\right)$$
$$U_4\,(\min) = - 81 \text{ T.}$$

Es zeigt sich, dass für Y_4 nur das Maximum und für U_4 nur das Minimum in Betracht kommt, und hätte also die Berechnung von Y_4 (min) und U_4 (max) erspart werden können. Es ist jedoch im Allgemeinen rathsam: für jede Stange Maximum und Minimum der Spannung zu berechnen und erst dann, wenn man sich überzeugt hat, dass beide einerlei Zeichen haben, den kleineren der beiden absoluten Werthe unberücksichtigt zu lassen.

Genau auf dieselbe Weise wie hier an den beiden Stücken Y_4 und U_4 als Beispielen gezeigt wurde, erhält man für die übrigen Y und U die nachfolgenden Gleichungen:

$$0 = Y_1 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{27}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} \ldots \tfrac{27}{28}\right)$$
$$Y_1 \begin{cases} (\max) = + 156 \text{ T.} \\ (\min) = + 78 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = - U_1 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{26}{28} - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{26}{28}\right) + 5 \cdot \tfrac{1}{28}$$
$$U_1 \begin{cases} (\max) = - 72 \text{ T.} \\ (\min) = - 144 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = Y_2 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \tfrac{2}{28} + \ldots \tfrac{25}{28} - \tfrac{2}{28} - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{25}{28}\right) + 5\left(\tfrac{2}{28} + \tfrac{1}{28}\right)$$

$$Y_2 \begin{cases} (\max) = +133 \text{ T.} \\ (\min) = + \ 66 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = -U_2 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{24}{28} - \tfrac{3}{28} - \tfrac{2}{28} - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{24}{28}\right) + 5\left(\tfrac{3}{28} + \tfrac{2}{28} + \tfrac{1}{28}\right)$$

$$U_2 \begin{cases} (\max) = - \ 59 \text{ T.} \\ (\min) = -122 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = Y_3 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{23}{28} - \tfrac{4}{28} - \ldots - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{23}{28}\right) + 5\left(\tfrac{4}{28} + \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$

$$Y_3 \begin{cases} (\max) = +112 \text{ T.} \\ (\min) = + \ 53 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = -U_3 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{22}{28} - \tfrac{5}{28} - \ldots - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{22}{28}\right) + 5\left(\tfrac{5}{28} + \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$

$$U_3 \begin{cases} (\max) = - \ 46 \text{ T.} \\ (\min) = -101 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = Y_5 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{19}{28} - \tfrac{8}{28} - \ldots - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{19}{28}\right) + 5\left(\tfrac{8}{28} + \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$

$$Y_5 \begin{cases} (\max) = +71 \text{ T.} \\ (\min) = +24 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = -U_5 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{18}{28} - \tfrac{9}{28} - \ldots - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{18}{28}\right) + 5\left(\tfrac{9}{28} + \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$

$$U_5 \begin{cases} (\max) = -17 \text{ T.} \\ (\min) = -61 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = Y_6 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{17}{28} - \tfrac{10}{28} - \ldots - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{17}{28}\right) + 5\left(\tfrac{10}{28} + \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$

$$Y_6 \begin{cases} (\max) = +52 \text{ T.} \\ (\min) = + \ 9 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = -U_6 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{16}{28} - \tfrac{11}{28} - \ldots - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{16}{28}\right) + 5\left(\tfrac{11}{28} + \ldots \tfrac{1}{28}\right).$$

$$U_6 \begin{cases} (\max) = -0{,}8 \text{ T.} \\ (\min) = -42 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = Y_7 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{15}{28} - \tfrac{12}{28} - \ldots - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{15}{28}\right) + 5\left(\tfrac{12}{28} + \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$

$$Y_7 \begin{cases} (\max) = +34 \text{ T.} \\ (\min) = -7{,}4 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = -U_7 \,.\, 0{,}866 - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{14}{28} - \tfrac{13}{28} - \ldots - \tfrac{1}{28}\right) - 5\left(\tfrac{1}{28} + \ldots \tfrac{14}{28}\right) + 5\left(\tfrac{13}{28} + \ldots \tfrac{1}{28}\right)$$

$$U_7 \begin{cases} (\max) = +16 \text{ T.} \\ (\min) = -25 \text{ T.} \end{cases}$$

Da der Träger in Beziehung auf die verticale Mittellinie vollkommen symmetrisch geformt ist, so erhalten die gleichliegenden

Fig. 80.

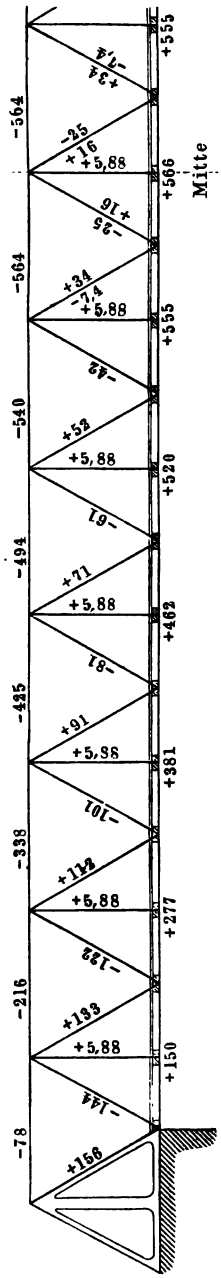
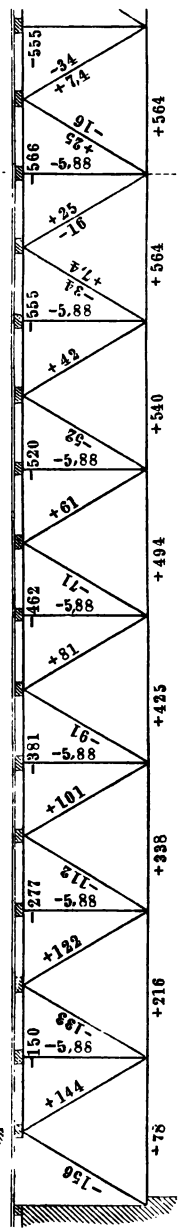


Fig. 81.



Stücke auf der anderen Hälfte genau dieselben Spannungen und brauchen deshalb nicht besonders berechnet zu werden.

Was die verticalen Hängestangen betrifft, so hat jede derselben ausser den 5 Tonnen mobiler Last noch ihren Antheil an der permanenten Last zu tragen. Die Fahrbahn, welche einen Theil des Eigengewichts bildet, liegt unten und stützt sich zum Theil auf die unteren Durchschnittspunkte der Diagonalen, zum Theil auf die unteren Endpunkte der Verticalstangen. Das Gewicht der Fahrbahn beträgt 24,75 Tonnen; davon kommt auf jede der 28 Abtheilungen

$$\frac{24{,}75}{28} = 0{,}88 \text{ Tonnen.}$$

Jede Verticalstange hat also im Maximum 5 Tonnen $+ 0{,}88$ Tonnen zu tragen und ist daher die Spannungszahl überall $= + 5{,}88$.

Die Resultate der obigen Rechnungen sind zur bequemeren Uebersicht in Fig. **80** zusammengestellt.

Vertauscht man in Fig. **80** überall die Plus- und Minus-Zeichen, so gelten die Spannungszahlen für einen Träger von der umgekehrten Form Fig. **81**, welcher unten aufliegt und in welchem die Verticalstangen als Stützen wirken.

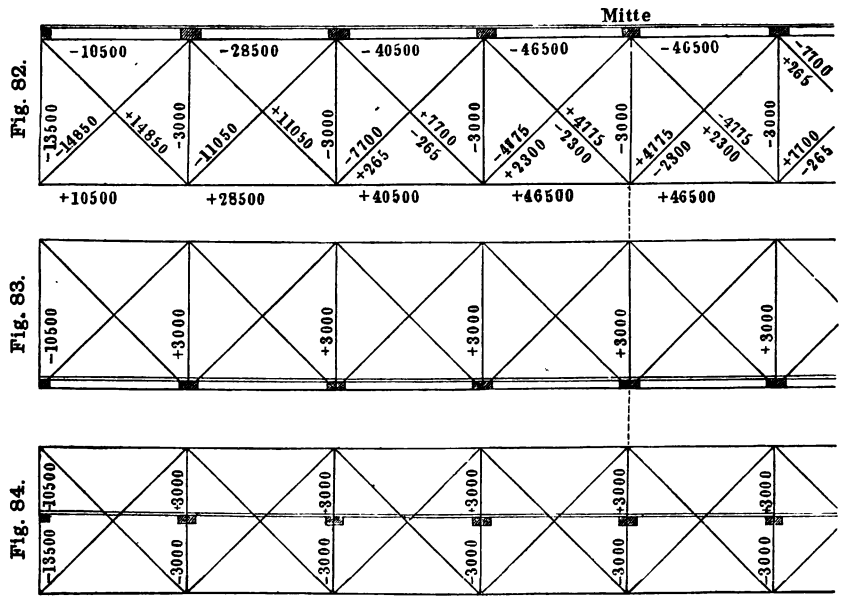
§ 14.

Zusammengesetzte Fachwerkträger und Gitterbrücken.

Um den Zusammenhang zwischen den einfachen Fachwerkträgern und Gitterträgern möglichst deutlich hervortreten zu lassen, soll den in diesem Paragraphen zu berechnenden Zahlenbeispielen als Grundform überall der in § 10 berechnete einfache Fachwerkträger von 16^m Spannweite und 48000 Kil. Totalbelastung zum Grunde gelegt werden.

Die für diesen einfachen Träger gefundenen in Fig. **57** zusammengestellten Spannungszahlen würden sämmtlich zu halbiren sein, wenn die Belastung nur halb so gross wäre, als bei der Berechnung oben angenommen wurde. Wenn man sich zwei solcher Träger mit halbirten Spannungszahlen — Einen mit links ansteigenden Diagonalen nach dem Schema Fig. **57**, Einen mit rechts ansteigenden Diagonalen nach dem Schema Fig. **63** construirt und belastet — so hinter einander gestellt denkt, dass sämmtliche Stücke mit Ausnahme der Diagonalen einander decken; so erhält man einen Träger mit gekreuzten Diagonalen, die sowohl Zug- als Druck-Spannung anzunehmen fähig sind, und die Spannungszahlen, welche man erhält, wenn man da, wo zwei Stangen zusammenfallen, die beiden Spannungszahlen jedesmal addirt, die der übrigen aber unverändert lässt, würden als für diesen neuen Träger gültig beizubehalten sein, wenn die Belastung zur Hälfte in den oberen, zur Hälfte in den unteren Knotenpunkten ihre Angriffspunkte hätte. Für jeden Verticalständer mit Ausnahme der über den Auflagern befindlichen würde sich dann die Spannungszahl Null ergeben, weil in jedem das Maximum des einen Trägers mit dem Minimum des Andern allemal zusammentrifft. Eine solche Lastvertheilung kann man sich durch Nebenständer verwirklicht denken, welche, wenn die **ganze** Last oben angreift, als **Stützen** die eine Hälfte nach unten übertragen und, wenn die **ganze** Last unten angreift, als **Hängestangen** die eine Hälfte nach oben übertragen. Wenn dagegen die ganze Last **zwischen** Kopf und Fuss angreift, so kann man sich den unteren Theil als Stütze, den oberen als Hängestange fungirend denken. Jede **Stütze** erhält also -3000, jede **Hänge**stange $+3000$ als Spannungszahl. Auf

diese Weise sind die in Figg. **82**, **83**, **84** eingeschriebenen Spannungszahlen entstanden. (Um die Figuren nicht unnöthig zu überladen, sind in Fig. **83** und Fig. **84** die Zahlen für die Horizontal- und Diagonal-Stangen weggelassen. Es gelten für sie dieselben Zahlen wie in Fig. **82**.)



Wenn man zwei Träger mit halbirten Spannungszahlen — beide nach dem Schema Fig. **57** construirt und belastet — um eine halbe Feldlänge gegen einander verschoben hinter einander gestellt zeichnet und wiederum die Spannungszahlen von je zwei einander deckenden horizontalen Stangen addirt, so erhält man einen doppelten Fachwerkträger Fig. **85**, für welchen die eingeschriebenen Spannungszahlen gültig bleiben, wenn der Träger so unterstützt ist, wie in Fig. **85** angegeben. Liegt die Fahrbahn unten oder in halber Höhe des Trägers, so sind resp. Fig. **63** und Fig. **66** in gleicher Weise zu benutzen und man erhält daraus Fig. **86** und Fig. **87**, in welchen letzteren beiden die Zahlen für die Diagonal- und Horizontal-Stangen weggelassen sind, da für sie dieselben Zahlen wie in Fig. **85** gelten. Sollen bei einem solchen Träger die Diagonalen so construirt werden, dass sie nur Zugspannung annehmen können, so erhält derselbe — je nachdem

Fig. 85.

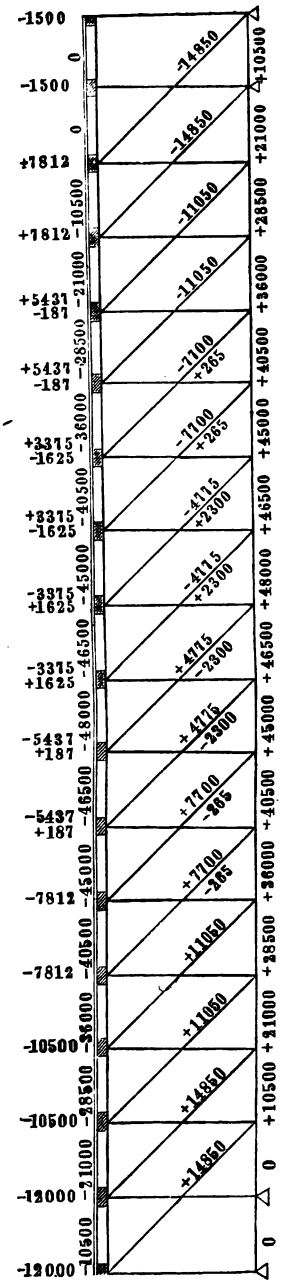


Fig. 86.

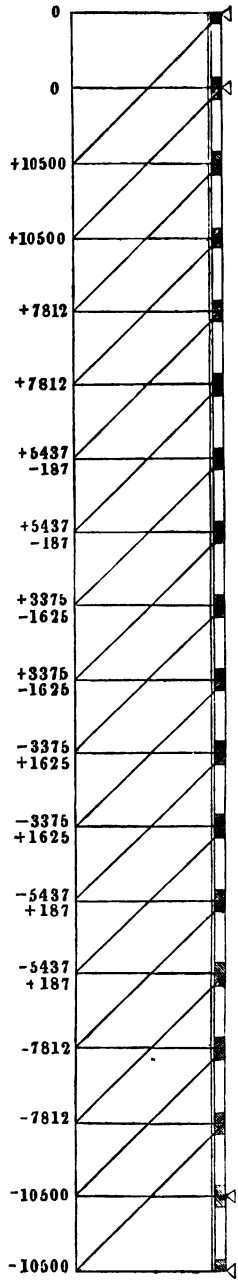
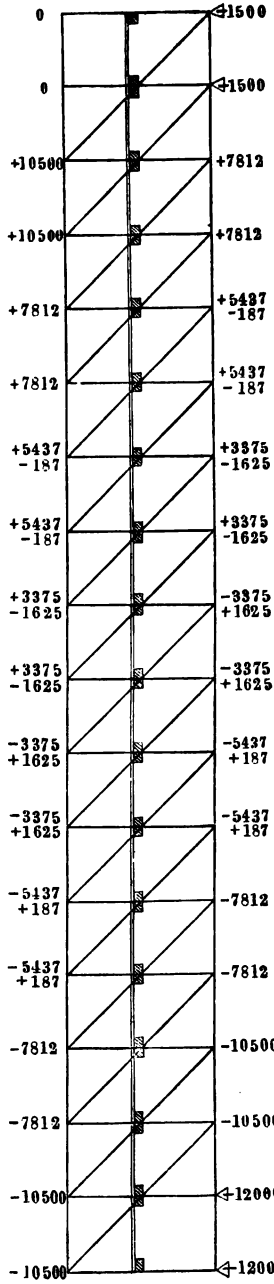
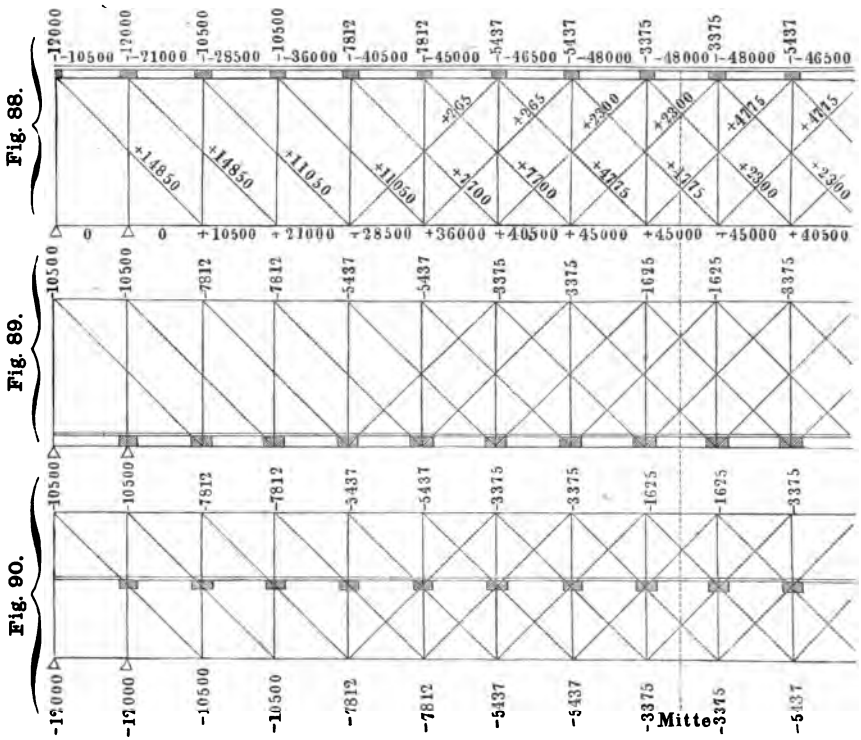


Fig. 87.



die Fahrbahn oben, unten, oder in der Mitte liegt, die Form und Spannungszahlen der Figuren **88**, **89** und **90**, in welchen letzteren beiden für die Diagonalen und Horizontalen dieselben Zahlen gelten wie in Fig. **88**.



Die in den letzteren 6 Figuren dargestellten Constructionsformen würden jedoch eine Länge des Trägers von 17 (statt von 16) Metern bedingen; auch würden die eingeschriebenen Spannungszahlen nur dann als gültig zu betrachten sein, wenn an jedem Ende des Trägers wirklich zwei Unterstützungspunkte vorhanden wären. Wenn die ursprüngliche Spannweite und Unterstützungsweise beibehalten werden soll, so kann man statt der obigen auch die in Fig. **91** dargestellte Form wählen, welche aus den beiden einfachen Systemen Fig. **92** und Fig. **93** sich zusammensetzt.

Die Spannungszahlen dieser Figuren beziehen sich auf den Fall, in welchem die oberen Endpunkte der Verticalständer als Belastungspunkte, sowohl für permanente als mobile Belastungen

Fig. 91.

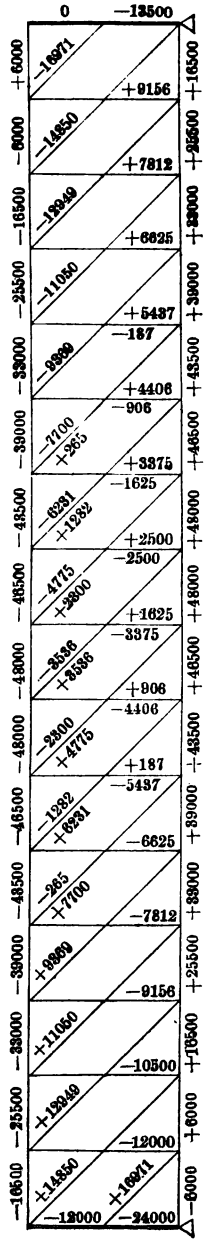


Fig. 92.

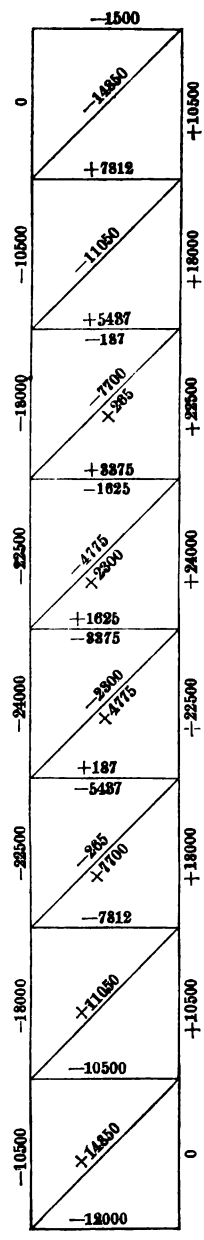
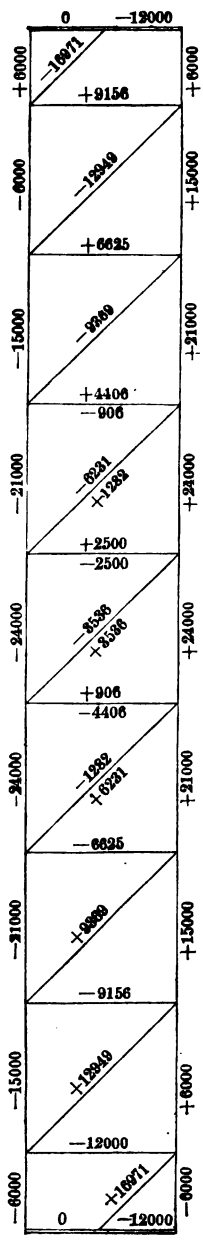


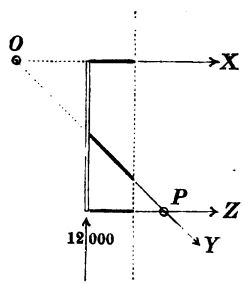
Fig. 93.



angesehen werden dürfen. Unter dieser Voraussetzung findet man die Spannungszahlen für Fig. **92**, indem man die in Fig. **57** angegebenen Zahlen durch 2 dividirt. Die Spannungszahlen für Fig. **93** dagegen würden unter Zugrundelegung halber Belastungszahlen, also von 4000 Kil. permanenter und 20000 Kil. mobiler Belastung neu zu berechnen sein.

Hinsichtlich dieser Berechnung, welche im Uebrigen ganz auf dieselbe Art wie in § 10 ausgeführt werden kann, ist nur das Eine zu bemerken: dass hier abweichend von allen früheren Fällen für den ersten und letzten Verticalständer ausser der in dem unteren Theile stattfindenden Druckspannung auch noch eine **Biegungsspannung** sich herausstellt (weshalb diese beiden Stangen in den Figuren durch Doppellinien gekennzeichnet sind). Man erhält nämlich, wie aus Fig. **94** zu ersehen ist, für die drei Stangen im ersten Felde die Gleichungen:

Fig. 94.



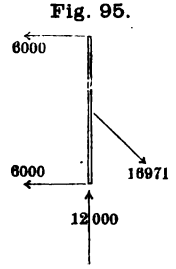
$$0 = X \cdot 2 + 12000 \cdot 1 \text{ (Drehpunkt } P\text{)}, \quad X = -6000 \text{ Kil.}$$

$$0 = Y \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} - 12000, \quad Y = +16971 \text{ Kil.}$$

$$0 = -Z \cdot 2 - 12000 \cdot 1 \text{ (Drehpunkt } O\text{)}, \quad Z = -6000 \text{ Kil.}$$

Da X und Z beide negativ, also Druckspannungen sind, so wird der erste Verticalständer auf die in Fig. **95** dargestellte Art von den 4 auf ihn wirkenden Kräften im Gleichgewicht gehalten und befindet sich — abgesehen von der ausserdem noch in seiner unteren Hälfte stattfindenden Druckspannung von 12000 Kil. in demselben Zustande, wie ein an beiden Endpunkten unterstützter in der Mitte mit 12000 Kil. belasteter Balken. Dieselbe Figur veranschaulicht zugleich den Spannungszustand des letzten Verticalständers.

Fig. 95.



Um solche Biegungen zu vermeiden, kann man den Diagonalen des ersten und letzten Feldes auch die in Fig. **96** angegebene Stellung geben, in welchem Falle man z. B. für die drei Stangen des ersten Feldes statt der

Fig. 96.

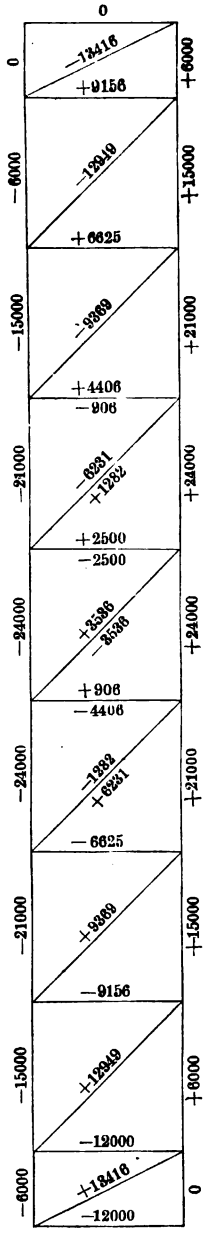
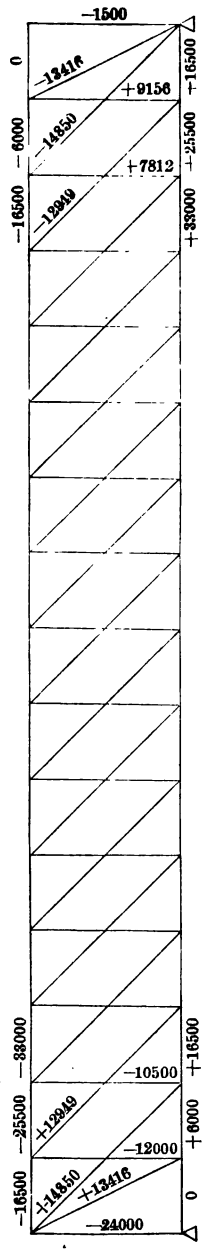


Fig. 99.



obigen die folgenden Gleichungen erhalten würde (s. Fig. **97** und Fig. **98**):

$$0 = X \,.\, 2 + 12000 \,.\, 1$$

(Drehpunkt P),

$$X = -\,6000 \text{ Kil.}$$

$$0 = Y \,.\, \frac{2}{\sqrt{2^2+1}} - 12000,$$

$$Y = +\,13416$$

$$0 = -\,Z \,.\, 2 \text{ (Drehpunkt } J),$$

$$Z = 0.$$

Aehnliche Abweichungen ergeben sich hinsichtlich der Stangen des letzten Feldes. Die Stangen der übrigen Felder werden durch eine solche Lagenveränderung der ersten und letzten Diagonale in keiner Weise afficirt, behalten also dieselben Spannungszahlen wie in Fig. **93**. Wenn man dieses System Fig. **96** dann wieder mit dem anderen einfachen Systeme Fig. **92** zusammenstellt, so erhält man die Figur **99**, in welcher nur für die Stangen der ersten und letzten Felder die Spannungszahlen angegeben zu werden brauchen, da im Uebrigen die Zahlen mit denen von Fig. **91** vollkommen übereinstimmen.

Die beiden Figuren **91** und **99** kann man nunmehr wieder als Haupt-

figuren benutzen, um eine Reihe von anderen Figuren daraus abzuleiten je nach Verschiedenheit der Lage der Belastungspunkte und der Diagonalen. So z. B. würde man auf gleiche Weise wie in § 11 erklärt wurde für den Fall, dass die Diagonalen als Zugbänder construirt sind, also keine Druckspannungen annehmen können, statt der beiden vorigen die Figuren **100** und **101** erhalten, in welchen wegen symmetrischer Form die eine Hälfte des Trägers weggelassen werden durfte, da die einander symmetrisch gegenüberliegenden Stangen der linken und rechten Hälfte gleiche Spannungszahlen erhalten.

Fig. 97.

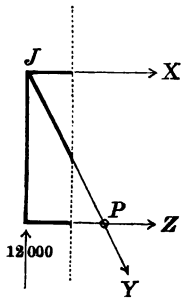


Fig. 98.

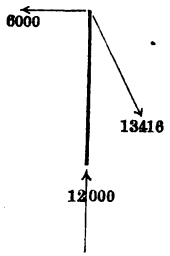
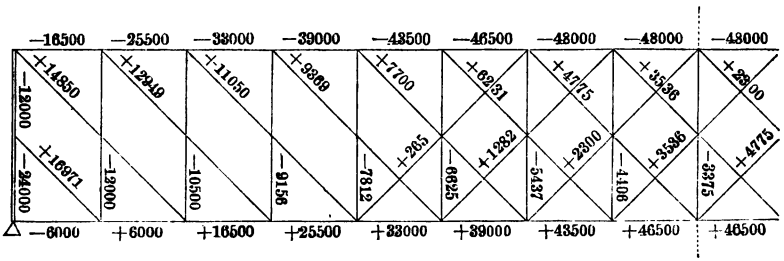
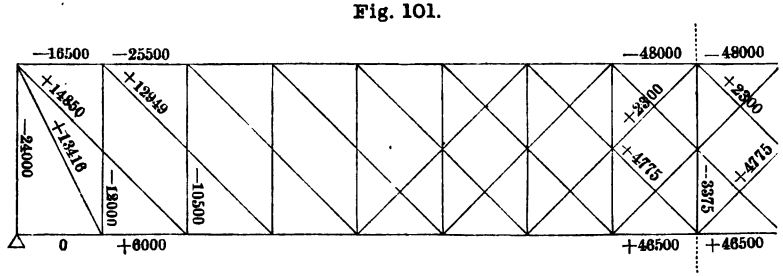


Fig. 100.



Denkt man sich in Fig. **91** die Verticalstangen durch Diagonalstangen ersetzt, welche von links nach rechts unter einem Winkel

Fig. 101.



von 45^0 ansteigen, so gelangt man zu dem in Fig. **102** dargestellten Gitterträger, welcher als aus den 4 einfachen Fachwerk-Systemen

Fig. **103**, Fig. **104**, Fig. **105**, Fig. **106** zusammengesetzt betrachtet werden kann.

Fig. 102.

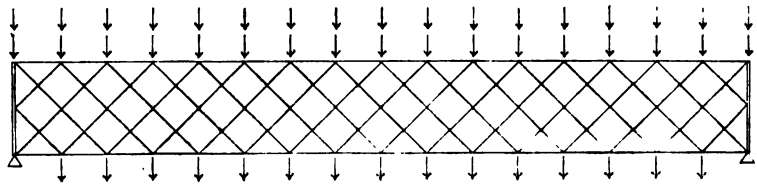


Fig. 103.

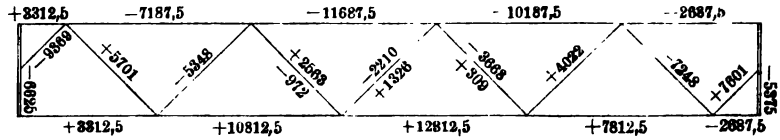


Fig. 104.

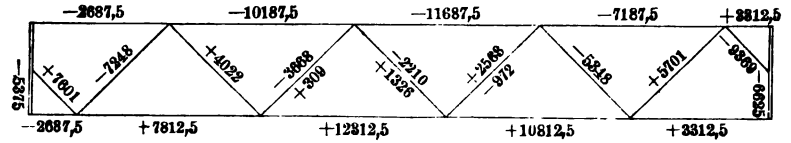


Fig. 105.

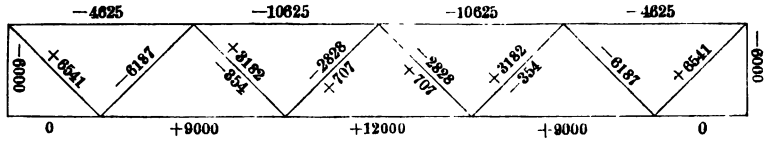
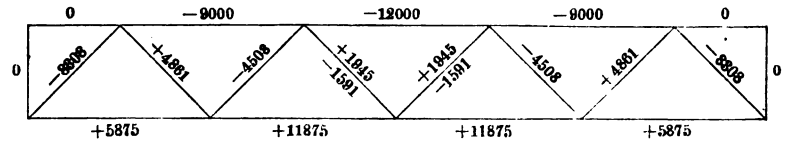


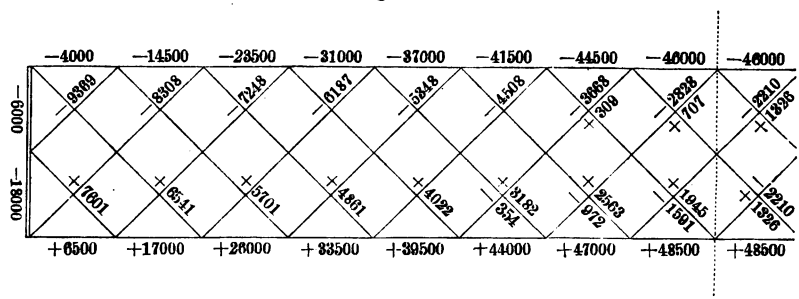
Fig. 106.



Der Berechnung der Spannungszahlen für diesen Gitterträger sollen dieselben Dimensionen (16^{m} Länge und 2^{m} Höhe) und Totalbelastungen (8000 Kil. permanenter und 40000 Kil. mobiler Belastung) zum Grunde gelegt werden, wie bei den vorigen Fällen.

Es soll jedoch hinsichtlich der permanenten Belastung die von der vorigen abweichende und der Wirklichkeit besser entsprechende Annahme gemacht werden: dass dieselbe zur Hälfte auf die obere und zur Hälfte auf die untere Reihe von Belastungspunkten sich vertheilt, während die mobile Belastung wie bei dem vorigen Falle ausschliesslich auf die oberen Belastungspunkte sich vertheilt. Es ergiebt sich hiernach für jeden Belastungspunkt der unteren Reihe eine permanente Belastung von 250 Kil. und für jeden Belastungspunkt der oberen Reihe eine permanente Belastung von 250 Kil. nebst einer mobilen Belastung von 2500 Kil. (mit Ausnahme des ersten und letzten Belastungspunktes, welche in jeder von den beiden Reihen nur halb so grosse Belastungen bekommen). Wenn man die diesen Belastungen entsprechenden Spannungszahlen für jedes der 4 einfachen Systeme nach der früher angegebenen Methode berechnet, und nachher diese 4 Figuren wiederum zu **einer** Figur zusammensetzt, so erhält man die in Fig. **107** angegebenen Spannungszahlen. Auch hier sollen die

Fig. 107.

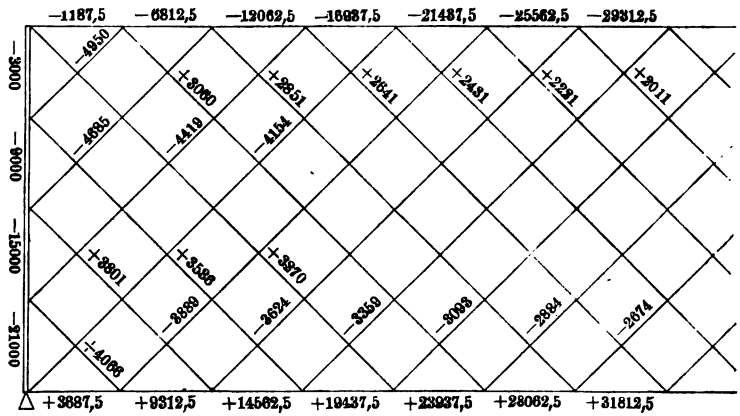


Doppellinien, durch welche die beiden Verticalstangen an den Enden des Trägers in den Figuren **102**, **103**, **104**, **107** gekennzeichnet sind, daran erinnern, dass in diesen Stangen ausser den Druckspannungen auch noch Biegungsspannungen stattfinden.

Bei einer Vergleichung der Spannungszahlen eines solchen 4fach zusammengesetzten Gitterbalkens mit denen des für gleiche Totalbelastungen und Dimensionen berechneten 8fach zusammengesetzten Gitterbalkens Fig. **108** erkennt man: dass, wenn es sich um die Berechnung eines Gitter-Systems höherer Ordnung handelt, es nicht erforderlich sein wird, die Rechnung für jedes einzelne der einfachen Systeme in dieser Vollständigkeit durchzuführen.

Die Spannungszahlen der horizontalen Stangen nehmen von der Mitte nach den beiden Enden hin allmälig ab, die Spannungs-

Fig. 108.



zahlen der Diagonalstangen dagegen nehmen von der Mitte nach den beiden Enden hin allmälig zu, und zwar nach einem Gesetze, welches in den Zahlen des bereits berechneten Gitter-Systems um so genauer seinen Ausdruck findet, je höher die Ordnung desselben oder je grösser die Anzahl der schon gefundenen Spannungszahlen ist. Sobald daher die Berechnung bis zu einem gewissen Punkte durchgeführt ist, kann man den bisher eingeschlagenen Weg verlassen und die Bestimmung der noch fehlenden Zahlen auf dem weniger beschwerlichen Wege der Interpolation ausführen.

Die Spannungszahlen der Gitterstäbe sind der Verdoppelung ihrer Anzahl entsprechend in Fig. **108** durchschnittlich halb so gross als in Fig. **107** und die Spannungszahl jedes der neu eingeschalteten Stäbe ist überall fast genau das arithmetische Mittel von den Spannungszahlen der beiden benachbarten Stäbe. Jede von den für die Horizontalstangen in Fig. **107** angegebenen Zahlen ferner ist das arithmetische Mittel von den 2 Zahlen, welche in Fig. **108** ihre Stelle einnehmen. Es würde daher bei der Berechnung eines solchen 8fach zusammengesetzten Gitter-Systems nicht unumgänglich nothwendig sein, dasselbe in die 8 einfachen Systeme zu zerlegen und jedes derselben einzeln zu berechnen, sondern man würde je nach dem Grade der verlangten Genauigkeit mit

der Berechnung des 4fach oder 2fach zusammengesetzten Systems sich begnügen dürfen, und die gefundenen Zahlenreihen alsdann durch Einschaltung der fehlenden Zwischenzahlen ergänzen können.

Fig. 109.

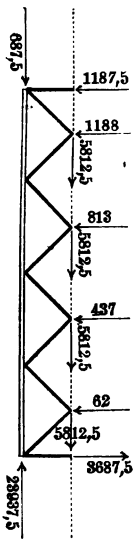
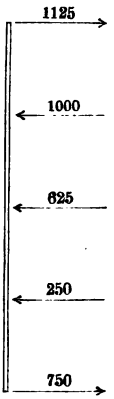


Fig. 110.



Die Art und Weise, in welcher die Verticalstangen an den Enden eines solchen Gitterträgers auf Biegung in Anspruch genommen werden, zeigen Fig. **109** und Fig. **110**. In ersterer sind an den Schnittstellen der Gitterstäbe statt der Spannungen selbst deren horizontale und verticale Seitenkräfte angegeben, in letzterer sind von den auf die Verticalstange überhaupt einwirkenden Kräften lediglich die biegenden Horizontalkräfte angegeben. Die von den Verticalkräften ausserdem noch hervorgebrachten Druckspannungen sind aus Fig. **108** zu entnehmen.

Bei dem 8fach zusammengesetzten Gitterträger Fig. **108** waren für die Belastungspunkte der oberen sowohl als der unteren Reihe permanente Belastungen von je 125 Kil. und für die Belastungspunkte der oberen Reihe ausserdem mobile Belastungen von je 1250 Kil. in Rechnung gebracht. Hätte man statt dessen jede der permanenten Belastungen = **Eins** angenommen und die mobilen Belastungen = **Null** gesetzt, so würde man die in Fig. **111** eingetragenen Spannungszahlen erhalten haben. Diese Zahlen kann man auch als Spannungszahlen des vorigen Trägers — und zwar als die dem unbelasteten Zustande entsprechenden — betrachten, sobald man nur das Gewicht von 125 Kil. dabei als Krafteinheit ansieht. Um die Spannungen in Kilogrammen ausgedrückt zu erhalten, würde man sämmtliche Zahlen noch mit der Zahl 125 zu multipliren haben.

Dieselben Zahlen können aber in gleicher Weise auch für jeden beliebigen anderen 8fach zusammengesetzten Gitterträger, dessen Länge gleich der 8fachen Höhe ist und dessen permanente Belastungen je p Kil. betragen, als gültig betrachtet werden, sofern man nur diese Belastung von p Kil. als Krafteinheit ansieht, oder

Fig. 112.

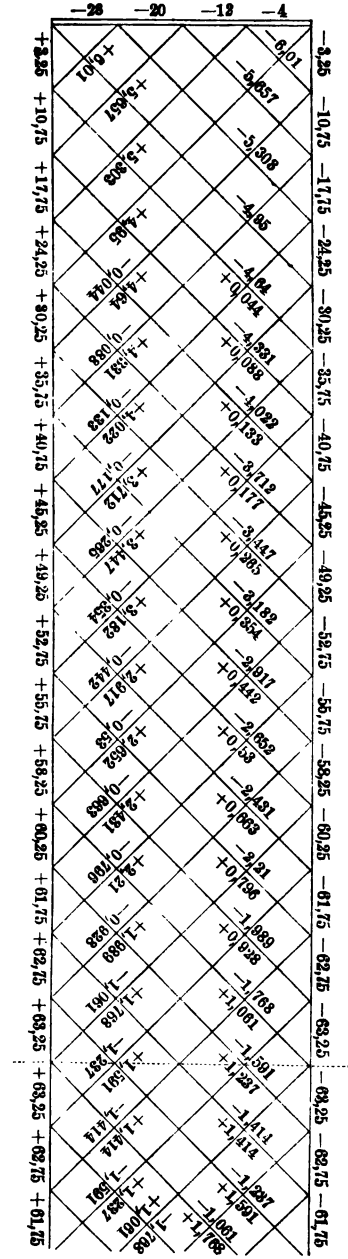
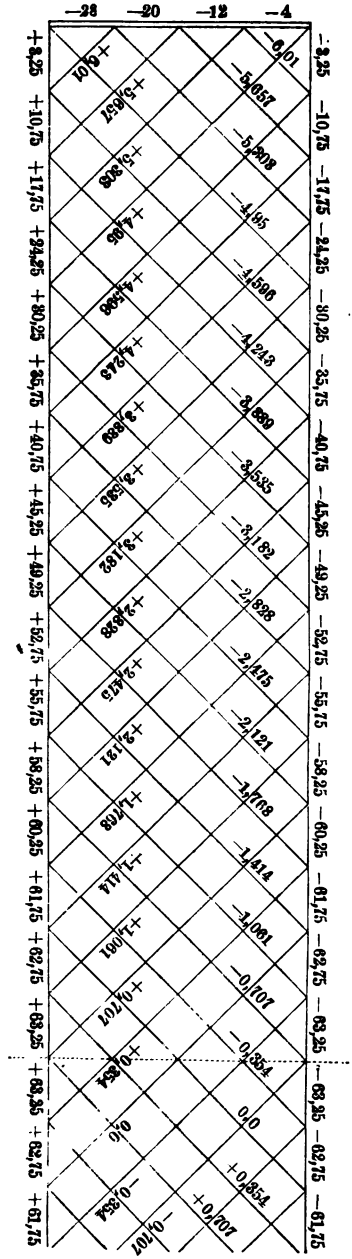


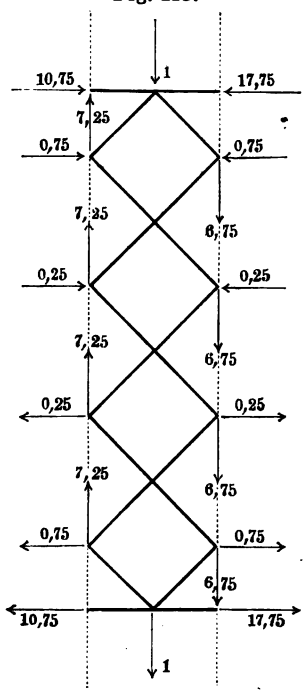
Fig. 111.



— um die Spannungen in Kilogrammen ausgedrückt zu erhalten — sämmtliche Spannungszahlen noch mit der Zahl p multiplicirt.

Wenn man ein anderes Mal die Spannungszahlen berechnete unter der Voraussetzung: dass die permanente Belastung = **Null** und die mobile Belastung = **Eins** ist für jeden Belastungspunkt der oberen sowohl wie der unteren Reihe, so würde man die in Fig. **112** eingetragenen Spannungszahlen erhalten. Für einen anderen Träger, welcher diesem geometrisch ähnlich ist, dessen mobile Belastungen aber oben und unten je m Kil. betragen, würde man diese Zahlen sämmtlich mit der Zahl m zu multipliciren haben, um die Spannungen in Kilogrammen ausgedrückt zu erhalten.

Fig. 113.



Die Spannungszahlen der Gitterstäbe in Fig. **111** repräsentiren **gleichzeitige** Spannungen, diejenigen der Figuren **112** und **108** dagegen **ungleichzeitige** Spannungen, insofern bei den letzteren beiden jede Spannungszahl einem besonderen Belastungszustande des Trägers entspricht. Die Functionen der Gitterwand bei einem solchen mehrfach zusammengesetzten Gitterträger sind daher am besten in Fig. **111** zu erkennen, deren Zahlen mit $p+m$ multiplicirt zugleich die Spannungen eines voll belasteten Trägers repräsentiren. Denkt man sich durch diesen Träger zwei Verticalschnitte nebeneinander hindurchgelegt — einen durch das zweite, den anderen durch das dritte Horizontalstangen-Paar — und an dem zwischen diesen beiden Schnitten liegenden Theile des Gitterträgers die zur Herstellung des Gleichgewichts erforderlichen horizontalen und verticalen Kräfte an den Schnittstellen wieder hinzugefügt, so erhält man die in Fig. **113** angegebenen Kraftwirkungen. Man erkennt aus dieser Figur: wie die ganze in einem Verticalschnitte thätige Verticalkraft zu gleichen Theilen auf die einzelnen Kreuzungspunkte der Gitterstäbe sich vertheilt, dass die Differenz der beiden ganzen Verticalkräfte gleich der

Totalbelastung des Stückes ist, dass ferner die Horizontalkräfte von der Mitte nach oben und unten hin proportional dem Abstande von der Mitte zunehmen. Diese Gesetzmässigkeit würde noch deutlicher hervorgetreten sein, wenn statt des 8fachen ein 16fach zusammengesetztes System gewählt wäre. Je grösser die Anzahl der Gitterstäbe ist, um so grösser wird die Aehnlichkeit zwischen den Functionen der Gitterwand und denen einer zwischen die obere und untere Gurtung eingeschalteten vollen Blechwand.

Die beiden Zahlenfiguren **111** und **112** kann man auf folgende Weise benutzen, um die wirklichen Spannungszahlen zu erhalten für irgend einen anderen 8fach zusammengesetzten Gitterträger von gleichem Verhältniss der Höhe zur Länge, bei welchem an jedem Belastungspunkte der oberen sowohl als auch der unteren Reihe die permanente Belastung p Kil. und die mobile Belastung m Kil. beträgt:

Man multiplicirt sämmtliche Zahlen in Fig. 111 mit der Zahl p, sämmtliche Zahlen in Fig. 112 mit der Zahl m, und addirt nachher für jede Stange die 2 auf solche Weise erhaltenen Zahlen.

Wenn also für irgend eine Stange mit Z_p die aus Fig. **111**, mit Z_m die aus Fig. **112** zu entnehmende Zahl bezeichnet wird, so ist die wirkliche Spannungszahl derselben:

$$Z = p \,.\, Z_p + m \,.\, Z_m.$$

Setzt man für einen solchen Gitterträger von 64^m Länge und 8^m Höhe die permanente Belastung $p = 1500$ Kil. und die mobile Belastung $m = 2000$ Kil. für jeden Belastungspunkt der oberen und unteren horizontalen Reihe, so erhält man z. B. für den sechzehnten der von rechts nach links ansteigenden Gitterstäbe die Zahl:

$$Z = 1500 \,.\, 0{,}707 + 2000 \,.\, 1{,}768 = + 4596 \text{ Kil.}$$

als das Maximum oder die grösste Zugspannung und die Zahl:

$$Z = 1500 \,.\, 0{,}707 - 2000 \,.\, 1{,}061 = - 1061 \text{ Kil.}$$

als das Minimum oder die grösste Druckspannung dieser Stange. Für die Spannungen der übrigen von rechts nach links ansteigenden Gitterstäbe — in der Reihenfolge vom linksseitigen Ende nach der Mitte hin — ergeben sich auf gleiche Weise die folgenden Zahlen:

$$+ 21036,\ + 19799,\ + 18562,\ + 17324,\ + 16175,\ + 15027,$$
$$+ 13877,\ + 12727,\ + 11667,\ + 10606,\ + 9546,\ + 8485,$$
$$+ 7513,\ + 6540,\ \begin{cases} + 5569 \\ - 265 \end{cases},\ \begin{cases} + 4596 \\ - 1061 \end{cases},\ \begin{cases} + 3713 \\ - 1944 \end{cases},\ \begin{cases} + 2828 \\ - 2828 \end{cases},$$

welche Zahlen mit — 1 multiplicirt zugleich die Spannungszahlen der von links nach rechts ansteigenden Gitterstäbe bilden. Für die horizontalen Stangen erhält man — in der Reihenfolge vom Ende nach der Mitte hin — die Zahlen:

11375, 37625, 62125, 84875, 105875, 135125, 142625, 158375, 172375, 184625, 195125, 203875, 210875, 216125, 219625, 221375,

welche positiv genommen die Zugspannungen der unteren, und negativ genommen die Druckspannungen der oberen Gurtung darstellen.

Setzt man ein anderes Mal $p = 125$ Kil. und $m = 625$ Kil. so erhält man für die links ansteigenden Gitterstäbe der linken Hälfte die Zahlen:

$$+4508,\ +4243,\ +3977,\ +3712,\ +3475,\ +3237,\ +3000,$$
$$+2762,\ +2552,\ +2342,\ +2132,\ \begin{cases}+1922\\-66\end{cases},\ \begin{cases}+1740\\-193\end{cases},\ \begin{cases}+1558\\-320\end{cases},$$
$$\begin{cases}+1376\\-447\end{cases},\ \begin{cases}+1193\\-574\end{cases},\ \begin{cases}+1039\\-729\end{cases},\ \begin{cases}+884\\-884\end{cases},$$

und für die horizontalen Stangen in der Reihenfolge von den Enden nach der Mitte hin die Zahlen:

2437,5, 8062,5, 13312,5, 18187,5, 22687,5, 26812,5, 30562,5, 33937,5, 36937,5, 39587,5, 41812,5, 43687,5, 45187,5, 46312,5, 47062,2, 47437,5.

Diese Zahlen verglichen mit den von Fig. **108** zeigen: welche Umwandlungen die Spannungszahlen erleiden, wenn die mobile Belastung — statt auf die obere Reihe von Belastungspunkten allein — zu gleichen Theilen auf die obere und untere Reihe sich vertheilt.

Vierter Abschnitt.

§ 15.

Sichelförmiger Träger von 208 Fuss Spannweite mit einfachem Diagonalen-System.

(Dach-Construction der Centralbahnhofshalle in Birmingham.)

Als Längeneinheit für die in Fig. **114** eingeschriebenen Maasse ist die Länge von 16 Fuss gewählt. Sämmtliche Zahlen sind also mit 16 zu multipliciren, um die Längen in Fussen zu erhalten. Die ganze Spannweite beträgt demnach:

$$2 \,.\, 6{,}5 \,.\, 16 = 208 \text{ Fuss},$$

die Pfeilhöhe des oberen Bogen:

$$(1 + 1{,}5) \,.\, 16 = 40 \text{ Fuss},$$

die Pfeilhöhe des unteren Bogen:

$$1 \,.\, 16 = 16 \text{ Fuss}^{*}),$$

die horizontale Länge jedes der 13 Felder:

$$1 \,.\, 16 = 16 \text{ Fuss}.$$

Die Ordinaten des oberen Bogen betragen das 2,5fache von denen des unteren Bogen:

Als Belastung des Daches sind (incl. Wind- und Schneedruck) 40 ℔ pro Quadratfuss der Grundrissfläche gerechnet. Die Entfernung der einzelnen Binder von einander beträgt 24 Fuss. Es kommen also auf jeden Binder:

*) Bei der ausgeführten Dach-Construction in Birmingham beträgt diese Pfeilhöhe 17 Fuss, der leichteren Rechnung wegen sind hier 16 Fuss angenommen. Im Uebrigen stimmen die hier gewählten Dimensionen mit denen des ausgeführten Daches überein (m. vergl. Berl. Ztschr. f. Bauwesen, Jahrg. 1858). Die Rechnung ist zunächst unter Voraussetzung eines einfachen Diagonalen-Systems geführt worden. In der folgenden Nummer unter der Ueberschrift „Abgeleitete Formen“ findet man die Berechnung eines solchen Trägers mit gekreuzten Zugbändern als Diagonalen, wie sie bei dem Dache in Birmingham angewendet wurden.

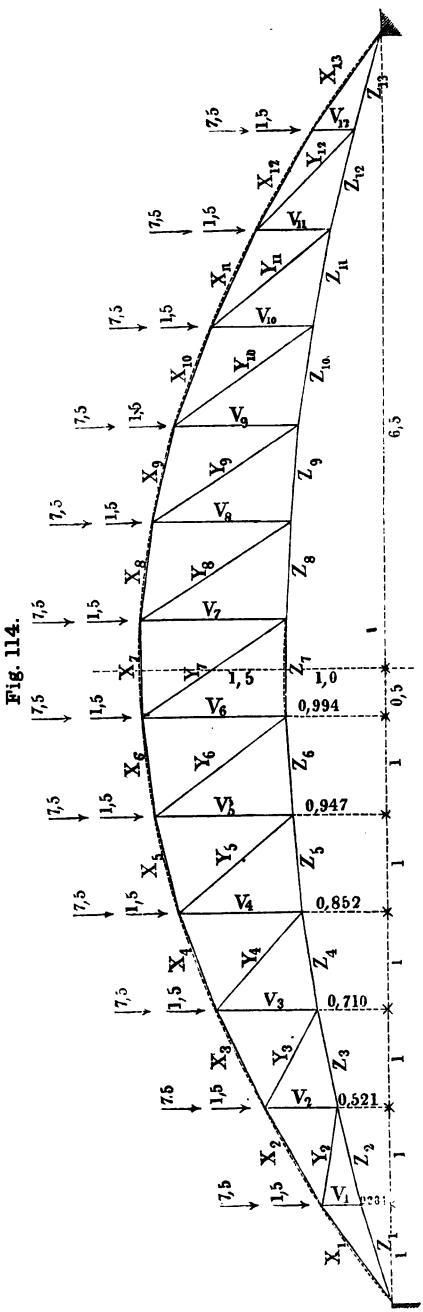


Fig. 114.

$208 . 24 = 4992$ Quadratfuss Grundrissfläche

und

$208 . 24 \; 40 = 199680$ ℔ Belastung.

Davon sind auf jedes der 13 Felder:

$$\frac{199680}{13} = 15360 \text{ ℔}$$

oder in runder Summe 7,5 Tonnen zu rechnen.

Das Eigengewicht des Trägers ergiebt sich aus den gewählten Querschnittsdimensionen der einzelnen Stangen zu ungefähr 1,5 Tonnen für jedes Feld.

In den beiden Endfeldern werden die halben Belastungen direct vom Auflager aufgenommen; auf jeden der 12 Verticalständer kommen also:

1,5 Tonnen permanenter Belastung

und

7,5 Tonnen veränderlicher Belastung.

Berechnung der Spannungen X und Z in den oberen und unteren Bogenstücken.

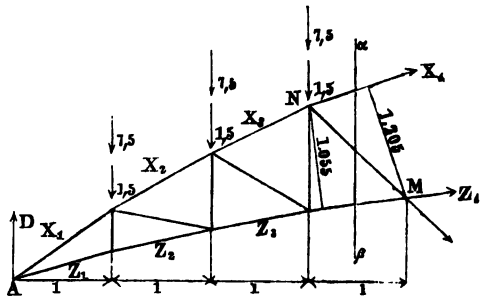
Trennt man durch den Schnitt $\alpha\,\beta$ den in Fig. **115** dargestellten Theil von der übrigen Construction und wählt man das eine Mal den Punkt M, das andere Mal den Punkt N als Drehpunkt, so erhält man die beiden Momenten-Gleichungen:

$$0 = X_4 \,.\, 1{,}205 + D \,.\, 4 - 1{,}5\,(1+2+3) - 7{,}5\,(1+2+3)$$
$$0 = -\,Z_4 \,.\, 1{,}055 + D \,.\, 3 - 1{,}5\,(1+2) - 7{,}5\,(1+2),$$

welche, wenn man darin für D seinen Werth:

$$D = 1{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} + \cdots \tfrac{12}{13}) + 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} + \cdots \tfrac{12}{13})$$

Fig. 115.



substituirt und der im zweiten Abschnitt § 5 gegebenen Regel gemäss die von einer und derselben Belastung herrührenden Beiträge allemal in **einem** Gliede zusammenstellt, die Form annehmen:

$$0 = X_4 \,.\, 1{,}205$$
$$+ 1{,}5[(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} + \cdots \tfrac{9}{13})4 + (\tfrac{10}{13}.4 - 1) + \tfrac{11}{13}.4 - 2) + (\tfrac{12}{13}.4 - 3)]$$
$$+ 7{,}5(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} \cdots \tfrac{9}{13})4$$
$$+ 7{,}5[(\tfrac{10}{13}.4 - 1) + (\tfrac{11}{13}.4 - 2) + (\tfrac{12}{13}.4 - 3)]$$
$$0 = -\,Z_4 \,.\, 1{,}055$$
$$+ 1{,}5[(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} + \cdots \tfrac{10}{13})3 + (\tfrac{11}{13}.3 - 1) + (\tfrac{12}{13}.3 - 2)]$$
$$+ 7{,}5(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} + \cdots \tfrac{10}{13})3$$
$$+ 7{,}5[(\tfrac{11}{13}.3 - 1) + (\tfrac{12}{13}.3 - 2)].$$

Man erkennt sogleich, dass sämmtliche mit 7,5 multiplicirten Glieder positiv sind, dass also bei voller Belastung die Spannungen X_4 und Z_4 am stärksten werden. Die beiden Gleichungen können also unmittelbar aufgelöst werden und ergeben die Werthe:

$$X_4\,(\min) = -\,134{,}4 \text{ Tonnen}$$
$$Z_4\,(\max) = +\,128{,}0 \text{ Tonnen}.$$

Wenn man sich auf die eben angegebene Weise einmal überzeugt hat, dass in diesem sowohl als in den übrigen Feldern die Spannungen X und Z bei voller Belastung am stärksten werden, so kann man auch, indem man für D den entsprechenden numerischen Werth:

$$D = \frac{(1{,}5+7{,}5)\,12}{2} = 54$$

substituirt, die Gleichungen von vornherein in der einfacheren Form aufstellen:

$$0 = X_4 \,.\, 1{,}205 + 54 \,.\, 4 - 9\,(1 + 2 + 3)$$
$$0 = -\,Z_4 \,.\, 1{,}055 + 54 \,.\, 3 - 9\,(1 + 2).$$

Diese letztere Form ist der Einfachheit wegen zu der Bestimmung der übrigen Grössen X und Z gewählt, für welche man genau auf dieselbe Weise die nachfolgenden Gleichungen erhält:

$$0 = X_1 \,.\, 0{,}347 + 54 \,.\, 1$$
$$X_1\,(\min) = -\,155{,}6\ \text{T.}$$
$$0 = -\,Z_1 \,.\, 0{,}41 + 54 \,.\, 1$$
$$Z_1\,(\max) = +\,131{,}7\ \text{T.}$$
$$0 = X_2 \,.\, 0{,}672 + 54 \,.\, 2 - 9 \,.\, 1$$
$$X_2\,(\min) = -\,147{,}3\ \text{T.}$$
$$0 = -\,Z_2 \,.\, 0{,}415 + 54 \,.\, 1$$
$$Z_2\,(\max) = +\,130{,}2\ \text{T.}$$
$$0 = X_3 \,.\, 0{,}963 + 54 \,.\, 3 - 9\,(1 + 2)$$
$$X_3\,(\min) = -\,140{,}2\ \text{T.}$$
$$0 = -\,Z_3 \,.\, 0{,}767 + 54 \,.\, 2 - 9 \,.\, 1$$
$$Z_3\,(\max) = +\,129{,}1\ \text{T.}$$
$$0 = X_5 \,.\, 1{,}382 + 54 \,.\, 5 - 9\,(1 + 2 + 3 + 4)$$
$$X_5\,(\min) = -\,130{,}2\ \text{T.}$$
$$0 = -\,Z_5 \,.\, 1{,}272 + 54 \,.\, 4 - 9\,(1 + 2 + 3)$$
$$Z_5\,(\max) = +\,127{,}3\ \text{T.}$$
$$0 = X_6 \,.\, 1{,}481 + 54 \,.\, 6 - 9\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$
$$X_6\,(\min) = -\,127{,}6\ \text{T.}$$
$$0 = -\,Z_6 \,.\, 1{,}419 + 54 \,.\, 5 - 9\,(1 + 2 + 3 + 4)$$
$$Z_6\,(\max) = +\,126{,}9\ \text{T.}$$
$$0 = X_7 \,.\, 1{,}491 + 54 \,.\, 7 - 9\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6)$$
$$X_7\,(\min) = -\,126{,}7\ \text{T.}$$
$$0 = -\,Z_7 \,.\, 1{,}491 + 54 \,.\, 6 - 9\,(1 + 2 + 3 + 4 + 5)$$
$$Z_7\,(\max) = +\,126{,}7\ \text{T.}$$
$$0 = X_8 \,.\, 1{,}41 + 54 \,.\, 8 - 9\,(1 + 2 + \ldots 7)$$
$$X_8\,(\min) = -\,127{,}6\ \text{T.}$$
$$0 = -\,Z_8 \,.\, 1{,}489 + 54 \,.\, 7 - 9\,(1 + 2 + \ldots 6)$$
$$Z_8\,(\max) = +\,126{,}9\ \text{T.}$$
$$0 = X_9 \,.\, 1{,}244 + 54 \,.\, 9 - 9\,(1 + 2 + \ldots 8)$$
$$X_9\,(\min) = -\,130{,}2\ \text{T.}$$
$$0 = -\,Z_9 \,.\, 1{,}414 + 54 \,.\, 8 - 9\,(1 + 2 + \ldots 7)$$
$$Z_9\,(\max) = +\,127{,}3\ \text{T.}$$
$$0 = X_{10} \,.\, 1{,}004 + 54 \,.\, 10 - 9\,(1 + 2 + \ldots 9)$$
$$X_{10}\,(\min) = -\,134{,}4\ \text{T.}$$
$$0 = -\,Z_{10} \,.\, 1{,}265 + 54 \,.\, 9 - 9\,(1 + 2 + \ldots 8)$$
$$Z_{10}\,(\max) = +\,128{,}0\ \text{T.}$$

$$0 = X_{11} \cdot 0{,}706 + 54 \cdot 11 - 9\,(1 + 2 + \ldots 10)$$
$$X_{11}\,(\text{min}) = -140{,}2\ \text{T.}$$
$$0 = -Z_{11} \cdot 1{,}046 + 54 \cdot 10 - 9\,(1 + 2 + \ldots 9)$$
$$Z_{11}\,(\text{max}) = +129{,}1\ \text{T.}$$
$$0 = X_{12} \cdot 0{,}367 + 54 \cdot 12 - 9\,(1 + 2 + \ldots 11)$$
$$X_{12}\,(\text{min}) = -147{,}3\ \text{T.}$$
$$0 = -Z_{12} \cdot 0{,}76 + 54 \cdot 11 - 9\,(1 + 2 + \ldots 10)$$
$$Z_{12}\,(\text{max}) = +130{,}2\ \text{T.}$$
$$0 = X_{13} \cdot 0{,}347 + 54 \cdot 12 - 9\,(1 + 2 + \ldots 11)$$
$$X_{13}\,(\text{min}) = -155{,}6\ \text{T.}$$
$$0 = -Z_{13} \cdot 0{,}41 + 54 \cdot 12 - 9\,(1 + 2 + \ldots 11)$$
$$Z_{13}\,(\text{max}) = +131{,}7\ \text{T.}$$

Aus den Resultaten der obigen Rechnungen ist zu ersehen, dass die stärksten Spannungen in den symmetrisch einander gegenüberliegenden Bogenstücken der beiden Hälften gleiche Grösse haben. Da nun die Felder auf der rechten Seite nur durch die entgegengesetzt ansteigenden Diagonalen von den gegenüberliegenden Feldern der linken Seite sich unterscheiden, so folgt hieraus, dass die stärksten Spannungen der Bogenstücke unabhängig sind von der Richtung der Diagonalen. Es macht also bei der Bestimmung der Spannung eines Bogenstücks keinen Unterschied, ob man einen linken oder einen rechten Eckpunkt des Feldes als Drehpunkt für die betreffende Momenten-Gleichung wählt, d. h. einen **in-** oder **ausserhalb** der Diagonalen-Richtung liegenden Punkt. Das ist aber nur möglich, wenn die Spannung der Diagonale Null ist, weil sonst mit Verlegung des Drehpunkts ein neues Moment in die betreffende Momenten-Gleichung eintreten und das Resultat verändern würde. Es folgt hieraus: dass bei voller Belastung sämmtliche Diagonalen in spannungslosem Zustande sich befinden.

Diese schon hier empirisch gefundene Eigenschaft des Trägers wird bei der Berechnung der Diagonalen direct bestätigt und in der später folgenden „Theorie der sichelförmigen Träger" theoretisch erklärt werden.

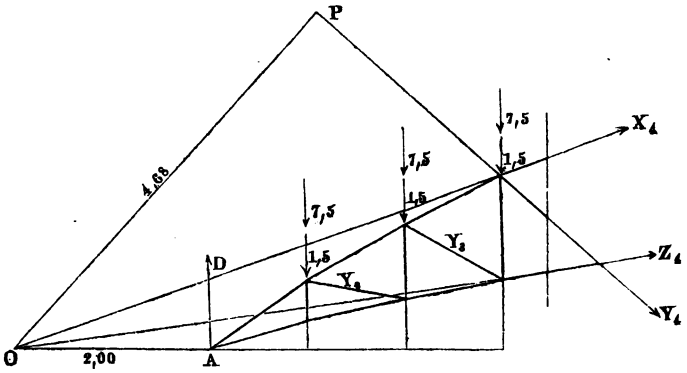
Berechnung der Spannungen Y in den Diagonalen.

Zur Bestimmung der Spannung Y_4 stellt man für den Theil Fig. **116** die Momenten-Gleichung auf und wählt den Punkt O, in welchem die Richtungen X_4 und Z_4 einander schneiden, als Drehpunkt. Durch Construction*) findet man, dass dieser Punkt in der

*) Die Bestimmuug der Drehpunkte und Hebelarme auf dem Wege der **Rechnung** findet man im 11. Abschnitte dieses Buches.

Entfernung 2 links vom Punkte A liegt, und dass der Hebelarm der Kraft Y_4 in Bezug auf diesen Drehpunkt gleich 4,68 ist. Man erhält also die Momenten-Gleichung:

Fig. 116.



$$0 = Y_4 . 4{,}68 - D . 2 + 1{,}5\,[(3+2)+(2+2)+(1+2)] + 7{,}5\,[(3+2)+(2+2)+(1+2)],$$

welche, wenn man darin für D seinen Werth:

$$D = 1{,}5\,(\tfrac{1}{13}+\tfrac{2}{13}+\dots\tfrac{12}{13}) + 7{,}5\,(\tfrac{1}{13}+\tfrac{2}{13}+\dots\tfrac{12}{13})$$

substituirt und die Gleichung so ordnet, dass die von einer und derselben Belastung herrührenden Glieder allemal zu einem einzigen Gliede zusammengefasst erscheinen, die Form annimmt:

$$0 = Y_4 . 4{,}68 + 1{,}5\,\{[3+2\,(1-\tfrac{10}{13})]+[2+2\,(1-\tfrac{11}{13})] + [1+2\,(1-\tfrac{12}{13})] - (\tfrac{1}{13}+\tfrac{2}{13}+\dots\tfrac{9}{13})\,2\}$$
$$+ 7{,}5\,\{[3+2\,(1-\tfrac{10}{13}]+[2+2\,(1-\tfrac{11}{13})]+[1+2\,(1-\tfrac{12}{13})]\} - 7{,}5\,(\tfrac{1}{13}+\tfrac{2}{13}+\dots\tfrac{9}{13})\,2$$

oder nach Zusammenziehung der in jedem solchen Gliede neben einander stehenden numerischen Theile:

$$0 = Y_4 . 4{,}68 - 1{,}5\,[(\tfrac{1}{13}+\dots\tfrac{9}{13})\,2 - (3+2+1)\,(1+\tfrac{2}{13})] - 7{,}5\,(\tfrac{1}{13}+\dots\tfrac{9}{13})\,2 + 7{,}5\,(3+2+1)\,(1+\tfrac{2}{13}).$$

Bei der Ausrechnung zeigt sich, dass das ganze mit 1,5 multiplicirte Glied = Null ist, und bestätigt sich also das oben bei Berechnung der Bogenstücke gefundene Gesetz: dass eine gleichförmig über die Spannweite vertheilte Last, wie z. B. das Eigengewicht des Trägers, keine Spannung in den Diagonalen erzeugt.

Man kann also die Gleichung auch gleich in der einfacheren Form schreiben:

$$0 = Y_4 \,.\, 4{,}68 - 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{9}{13})\,2 \quad + 7{,}5\,(3+2+1)\,(1+\tfrac{2}{13}).$$

Man erhält hieraus, wenn man der im zweiten Abschnitte gegebenen Regel gemäss einmal das positive und einmal das negative Glied fortlässt, die Werthe:

$$Y_4 \begin{cases} (\max) = +\,11{,}1 \text{ T.} \\ (\min) = -\,11{,}1 \text{ T.} \end{cases}$$

An der Gleichheit der beiden absoluten Werthe erkennt man wiederum, dass Y_4 den Werth Null annimmt, wenn beide Glieder beibehalten werden, d. h. bei voller Belastung des Trägers.

Auf gleiche Weise sind die Spannungen der übrigen Diagonalen berechnet, und ist, um überflüssige Weitläuftigkeit zu vermeiden, den Gleichungen sogleich die letztere einfachere Form gegeben, also das die permanente Last enthaltende Glied von vornherein fortgelassen.

$$0 = Y_2 \,.\, 0{,}92 - 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{11}{13})\,0{,}2 \quad + 7{,}5\left(1+\tfrac{0{,}2}{13}\right)$$

$$Y_2 \begin{cases} (\max) = +\,8{,}3 \text{ T.} \\ (\min) = -\,8{,}3 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = Y_3 \,.\, 2{,}52 - 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{10}{13})\,0{,}75 \quad + 7{,}5\,(2+1)\left(1+\tfrac{0{,}75}{13}\right)$$

$$Y_3 \begin{cases} (\max) = +\,9{,}5 \text{ T.} \\ (\min) = -\,9{,}5 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = Y_5 \,.\, 8{,}3 - 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{8}{13})\,5 \quad + 7{,}5\,(4+3+2+1)\,(1+\tfrac{5}{13})$$

$$Y_5 \begin{cases} (\max) = +\,12{,}6 \text{ T.} \\ (\min) = -\,12{,}6 \text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = Y_6 \,.\, 17{,}6 - 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{7}{13})\,15 \quad + 7{,}5\,(5+4+3+2+1)\,(1+\tfrac{15}{13})$$

$$Y_6 \begin{cases} (\max) = +\,13{,}8 \text{ T.} \\ (\min) = -\,13{,}8 \text{ T.} \end{cases}$$

Für die Diagonale des Mittelfeldes liegt der Drehpunkt in unendlicher Entfernung; es ist also nach der im dritten Abschnitt § 9 gegebenen Regel zu verfahren. Der Sinus des Winkels, den die Diagonale Y_7 mit der Horizontalen einschliesst, ist $= 0{,}831$, man erhält also für Y_7 die Gleichung:

$$0 = Y_7 \,.\, 0{,}831 \,.\, \infty - 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{6}{13})\,\infty + 7{,}5\,(6+5+4+3+2+1)\left(1+\tfrac{\infty}{13}\right)$$

oder, da das Endliche gegen das unendlich Grosse verschwindet:

$$0 = Y_7 \,.\, 0{,}831 \,.\, \infty - 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{6}{13})\,\infty + 7{,}5\,(6+5+4+3+2+1)\,\tfrac{\infty}{13}$$

und hieraus, wenn man den gemeinschaftlichen Factor ∞ wegläßt:

$$0 = Y_7 \,.\, 0{,}831 - 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{6}{13}) \quad + 7{,}5\,(6 + \ldots 1)\,\tfrac{1}{13}$$

$$Y_7 \begin{cases} (\max) = +\,14{,}6 \text{ T.} \\ (\min) = -\,14{,}6 \text{ T.} \end{cases}$$

Für die nun folgenden Momenten-Gleichungen fällt der Drehpunkt auf die entgegengesetzte Seite, und wechseln daher sämmtliche Momente ihre Vorzeichen:

$$0 = -Y_8 \cdot 16{,}1 + 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{5}{13})\,28 \quad -7{,}5\,(7 + \ldots 1)\,(\tfrac{28}{13} - 1)$$

$$Y_8 \begin{cases} (\max) = +15{,}0\text{ T.} \\ (\min) = -15{,}0\text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = -Y_9 \cdot 7{,}1 + 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{4}{13})\,18 \quad -7{,}5\,(8 + \ldots 1)\,(\tfrac{18}{13} - 1)$$

$$Y_9 \begin{cases} (\max) = +14{,}6\text{ T.} \\ (\min) = -14{,}6\text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = -Y_{10} \cdot 3{,}68 + 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} + \tfrac{3}{13})\,15 \quad -7{,}5\,(9 + \ldots 1)\,(\tfrac{15}{13} - 1)$$

$$Y_{10} \begin{cases} (\max) = +14{,}1\text{ T.} \\ (\min) = -14{,}1\text{ T.} \end{cases}$$

$$0 = -Y_{11} \cdot 1{,}82 + 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13})\,13{,}75 \quad -7{,}5\,(10 + \ldots 1)\,\left(\tfrac{13{,}75}{13} - 1\right)$$

$$Y_{11} \begin{cases} (\max) = +13{,}0\text{ T.} \\ (\min) = -13{,}0\text{ T.} \end{cases}$$

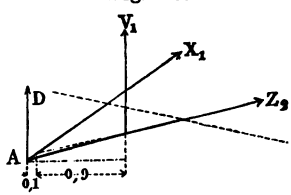
$$0 = -Y_{12} \cdot 0{,}65 + 7{,}5 \cdot \tfrac{1}{13} \cdot 13{,}2 \quad -7{,}5\,(11 + \ldots 1)\,\left(\tfrac{13{,}2}{13} - 1\right)$$

$$Y_{12} \begin{cases} (\max) = +11{,}6\text{ T.} \\ (\min) = -11{,}6\text{ T.} \end{cases}$$

Berechnung der Spannungen V in den Verticalen.

Um V_1 zu bestimmen, stellt man für das Stück Fig. 117 die Momenten-Gleichung auf und wählt den Durchschnittspunkt von X_1 und Z_2 als Drehpunkt. Durch Construction findet man, dass dieser Punkt in dem Horizontal-Abstande 0,1 rechts von dem Punkte A liegt. Man erhält also die Gleichung:

Fig. 117.

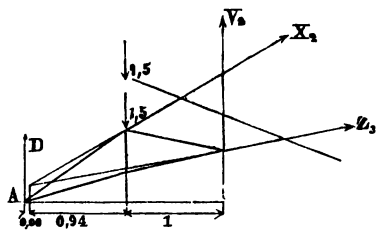


$$0 = -V_1 \cdot 0{,}9 + D \cdot 0{,}1$$

oder nach Substitution des Werthes für D:

$$0 = -V_1 \cdot 0{,}9 + 1{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} + \ldots \tfrac{12}{13})\,0{,}1 + 7{,}5\,(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} + \ldots \tfrac{12}{13})\,0{,}1.$$

Fig. 118.



Sämmtliche mit 7,5 multiplicirten Glieder sind positiv, die Gleichung ist also unmittelbar aufzulösen und ergiebt:

$$V_1\,(\max) = +6\text{ T.}$$

Zur Bestimmung von V_2 construirt man den Durchschnittspunkt von X_2 und Z_3 und findet, dass derselbe in der Horizontal-Entfernung $= 0{,}06$ rechts von

dem Punkte A liegt. Die Momenten-Gleichung für das Stück Fig. **118** in Bezug auf diesen Punkt ist:

$$0 = -V_2 \,.\, 1{,}94 + D \,.\, 0{,}06 + 1{,}5 \,.\, 0{,}94 + 7{,}5 \,.\, 0{,}94$$

oder, wenn man für D seinen Werth substituirt und zugleich das Moment der Belastung des ersten Knotenpunktes mit dem Momente ihres Beitrages zum Auflagerdruck vereinigt:

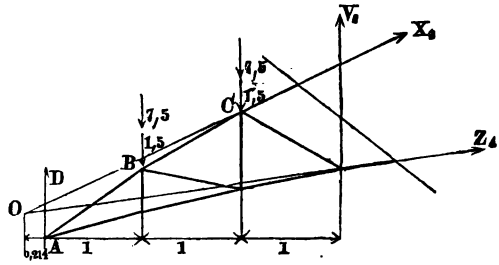
$$0 = -V_2 \,.\, 1{,}94 + 1{,}5\left[\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{11}{13}\right) 0{,}06 + \left(1 - \tfrac{0{,}06}{13}\right)\right] + 7{,}5\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{11}{13}\right) 0{,}06 + 7{,}5\left(1 - \tfrac{0{,}06}{13}\right).$$

Auch in dieser Gleichung haben sämmtliche mit 7,5 multiplicirte Glieder einerlei Zeichen, die Gleichung ist also unmittelbar für V_2 aufzulösen und ergiebt:

$$V_2 \,(\max) = +6\,\mathrm{T}.$$

Für die nun folgenden Felder kommt der Drehpunkt links von dem Punkte A zu liegen, und erhält dadurch die allgemeine Gleichung eine etwas veränderte Form. Die Momenten-Gleichung des Theils Fig. **119** in Bezug auf den Durchschnittspunkt O der Richtungen X_3 und Z_4 wird:

Fig. 119.



$$0 = -V_3 \,.\, 3{,}214 - D \,.\, 0{,}214 + 1{,}5\,(1{,}214 + 2{,}214) + 7{,}5\,(1{,}214 + 2{,}214)$$

oder, wenn für D sein Werth substituirt, und zugleich die Momente der Belastungen in den Punkten B und C mit den Momenten ihrer Beiträge zum Auflagerdruck vereinigt werden:

$$0 = -V_3 \,.\, 3{,}214 - 1{,}5\left[\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{10}{13}\right) 0{,}214 - (2+1)\left(1 + \tfrac{0{,}214}{13}\right)\right] - 7{,}5\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{10}{13}\right) 0{,}214 + 7{,}5(2+1)\left(1 + \tfrac{0{,}214}{13}\right).$$

Hier zerfallen die mit 7,5 multiplicirten Glieder in zwei Gruppen, von denen die eine negativ, die andere positiv ist. Um

V_3 (max) zu bestimmen, ist die negative, um V_3 (min) zu bestimmen, ist die positive Gruppe fortzulassen. Ausserdem soll — aus einem Grunde, der sich später ergeben wird — der Werth von V_3, welcher mit Beibehaltung **beider** Gruppen durch unmittelbare Auflösung der Gleichung sich ergiebt, also derjenige, welcher der vollen Belastung des Trägers entspricht, hinzugestellt werden. Man erhält die Werthe:

$$V_3 \begin{cases} (\max) = +8{,}1 \text{ T.} \\ (\min) = -1{,}1 \text{ T.} \end{cases} \qquad V_3 = +6 \text{ T.}$$

Auf gleiche Weise ergeben sich für die übrigen Felder die nachstehenden Gleichungen:

$$0 = -V_4 \cdot 4{,}91 - 1{,}5\left[\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{9}{13}\right) 0{,}91 - (3+2+1)\left(1 + \tfrac{0{,}91}{13}\right)\right]$$
$$- 7{,}5\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{9}{13}\right) 0{,}91 \quad + 7{,}5\,(3+2+1)\left(1 + \tfrac{0{,}91}{13}\right)$$
$$V_4 \begin{cases} (\max) = +10{,}8 \text{ T.} \\ (\min) = -3{,}8 \text{ T.} \end{cases} \qquad V_4 = +6 \text{ T.}$$

$$0 = -V_5 \cdot 7{,}5 - 1{,}5\left[\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{8}{13}\right) 2{,}5 - (4 + \ldots 1)\left(1 + \tfrac{2{,}5}{13}\right)\right]$$
$$- 7{,}5\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{8}{13}\right) 2{,}5 \quad + 7{,}5\,(4 + \ldots 1)\left(1 + \tfrac{2{,}5}{13}\right)$$
$$V_5 \begin{cases} (\max) = +12{,}9 \text{ T.} \\ (\min) = -5{,}9 \text{ T.} \end{cases} \qquad V_5 = +6 \text{ T.}$$

$$0 = -V_6 \cdot 12{,}6 - 1{,}5\left[\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{7}{13}\right) 6{,}6 - (5 + \ldots 1)\left(1 + \tfrac{6{,}6}{13}\right)\right]$$
$$- 7{,}5\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{7}{13}\right) 6{,}6 \quad + 7{,}5\,(5 + \ldots 1)\left(1 + \tfrac{6{,}6}{13}\right)$$
$$V_6 \begin{cases} (\max) = +14{,}5 \text{ T.} \\ (\min) = -7{,}5 \text{ T.} \end{cases} \qquad V_6 = +6 \text{ T.}$$

$$0 = -V_7 \cdot 31{,}5 - 1{,}5\left[\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{6}{13}\right) 24{,}5 - (6 + \ldots 1)\left(1 + \tfrac{24{,}5}{13}\right)\right]$$
$$- 7{,}5\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{6}{13}\right) 24{,}5 \quad + 7{,}5\,(6 + \ldots 1)\left(1 + \tfrac{24{,}5}{13}\right)$$
$$V_7 \begin{cases} (\max) = +15{,}4 \text{ T.} \\ (\min) = -8{,}4 \text{ T.} \end{cases} \qquad V_7 = +6 \text{ T.}$$

Bei den nun folgenden Feldern fällt der Drehpunkt auf die entgegengesetzte Seite, und nehmen daher sämmtliche Momente das entgegengesetzte Zeichen an.

$$0 = V_8 \cdot 60 + 1{,}5\left[\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{5}{13}\right) 68 - (7 + \ldots 1)\left(\tfrac{68}{13} - 1\right)\right]$$
$$+ 7{,}5\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{5}{13}\right) 68 \quad - 7{,}5\,(7 + \ldots 1)\left(\tfrac{68}{13} - 1\right)$$
$$V_8 \begin{cases} (\max) = +15{,}8 \text{ T.} \\ (\min) = -8{,}8 \text{ T.} \end{cases} \qquad V_8 = +6 \text{ T.}$$

$$0 = V_9 \cdot 13{,}5 + 1{,}5\left[\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{4}{13}\right) 22{,}5 - (8 + \ldots 1)\left(\tfrac{22{,}5}{13} - 1\right)\right]$$
$$+ 7{,}5\left(\tfrac{1}{13} + \ldots \tfrac{4}{13}\right) 22{,}5 \quad - 7{,}5\,(8 + \ldots 1)\left(\tfrac{22{,}5}{13} - 1\right)$$
$$V_9 \begin{cases} (\max) = +15{,}6 \text{ T.} \\ (\min) = -8{,}6 \text{ T.} \end{cases} \qquad V_9 = +6 \text{ T.}$$

$$0 = V_{10} \cdot 6{,}43 + 1{,}5\left[\left(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} + \tfrac{3}{13}\right) 16{,}43 - (9 + \ldots 1)\left(\tfrac{16{,}43}{13} - 1\right)\right]$$
$$+ 7{,}5\left(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13} + \tfrac{3}{13}\right) 16{,}43 \quad - 7{,}5\,(9 + \ldots 1)\left(\tfrac{16{,}43}{13} - 1\right)$$
$$V_{10}\begin{cases}(\max) = + 14{,}8 \text{ T.} \\ (\min) = - \ 7{,}8 \text{ T.}\end{cases} \qquad V_{10} = + 6 \text{ T.}$$

$$0 = V_{11} \cdot 3{,}3 + 1{,}5\left[\left(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13}\right) 14{,}3 - (10 + \ldots 1)\left(\tfrac{14{,}3}{13} - 1\right)\right]$$
$$+ 7{,}5\left(\tfrac{1}{13} + \tfrac{2}{13}\right) 14{,}3 \quad - 7{,}5\,(10 + \ldots 1)\left(\tfrac{14{,}3}{13} - 1\right)\Big]$$
$$V_{11}\begin{cases}(\max) = + 13{,}5 \text{ T.} \\ (\min) = - \ 6{,}5 \text{ T.}\end{cases} \qquad V_{11} = + 6 \text{ T.}$$

$$0 = V_{12} \cdot 1{,}385 + 1{,}5\left[\tfrac{1}{13} \cdot 13{,}385 - (11 + \ldots 1)\left(\tfrac{13{,}385}{13} - 1\right)\right]$$
$$+ 7{,}5 \cdot \tfrac{1}{13} \cdot 13{,}385 \quad - 7{,}5\,(11 + \ldots 1)\left(\tfrac{13{,}385}{13} - 1\right)$$
$$V_{12}\begin{cases}(\max) = + 11{,}6 \text{ T.} \\ (\min) = - \ 4{,}6 \text{ T.}\end{cases} \qquad V_{12} = + 6 \text{ T.}$$

Im dritten Abschnitt § 12 wurde für die Berechnung der Verticalständer die Regel empfohlen: „man nehme zunächst die Angriffspunkte der mobilen Last auch als Angriffspunkte der permanenten Last an, denke sich diese Annahme verwirklicht durch Nebenständer, deren Function es ist, den nicht unmittelbar daselbst angreifenden Theil der permanenten Last auf jene Punkte wirklich zu übertragen, und füge dann die Spannungszahlen dieser Nebenständer den vorher für die Verticalständer gefundenen Spannungszahlen hinzu.“ Nach dieser Regel soll auch hier verfahren werden. Die eben gefundenen Zahlenwerthe der Grössen V entsprechen der Annahme, dass das ganze Eigengewicht des Trägers in den oberen Knotenpunkten seine Angriffspunkte hat. In Wirklichkeit wird nur ein Theil — und zwar der grössere Theil — des Eigengewichts unmittelbar oben angreifen, und etwa der dritte Theil desselben, also 0,5 T. für jedes Feld auf die unteren Knotenpunkte zu rechnen sein. Denkt man sich neben jedem Hauptständer noch einen Nebenständer, welcher (in diesem Falle als Hängestange wirkend) diese 0,5 T. auf die oberen Knotenpunkte überträgt, so wird die Spannungszahl desselben $= + 0{,}5$ T., und diese Zahl ist den vorher für die Grössen V gefundenen Werthen überall hinzuzufügen.

Als genauere Werthe für die Spannungszahlen der Verticalständer ergeben sich hiernach folgende Zahlen:

$V_1\,(\max) = + 6{,}5$ T.
$V_2\,(\max) = + 6{,}5$ T.
$V_3\begin{cases}(\max) = + 8{,}6 \text{ T.} \\ (\min) = - 0{,}6 \text{ T.}\end{cases} \qquad V_3 = + 6{,}5 \text{ T.}$

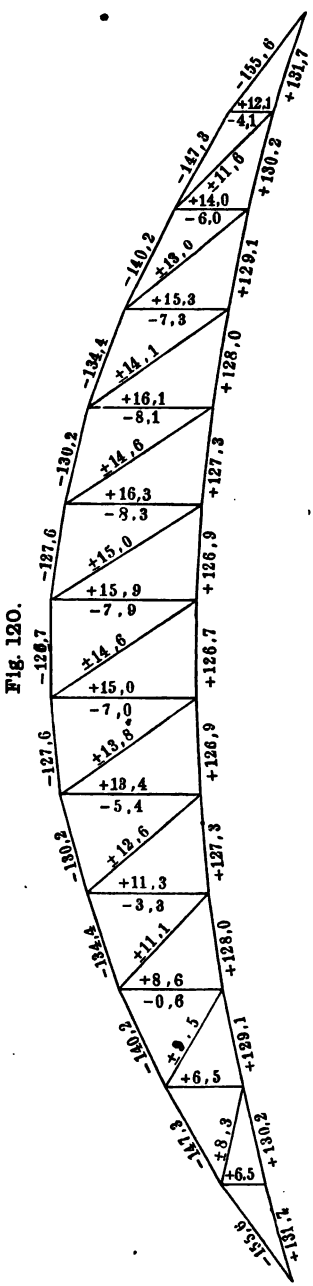


Fig. 120.

V_4 (max) = + 11,3 T. (min) = − 3,3 T. $V_4 = +6{,}5$ T.

V_5 (max) = + 13,4 T. (min) = − 5,4 T. $V_5 = +6{,}5$ T.

V_6 (max) = + 15,0 T. (min) = − 7,0 T. $V_6 = +6{,}5$ T.

V_7 (max) = + 15,9 T. (min) = − 7,9 T. $V_7 = +6{,}5$ T.

V_8 (max) = + 16,3 T. (min) = − 8,3 T. $V_8 = +6{,}5$ T.

V_9 (max) = + 16,1 T. (min) = − 8,1 T. $V_9 = +6{,}5$ T.

V_{10} (max) = + 15,3 T. (min) = − 7,3 T. $V_{10} = +6{,}5$ T.

V_{11} (max) = + 14,0 T. (min) = − 6,0 T. $V_{11} = +6{,}5$ T.

V_{12} (max) = + 12,1 T. (min) = − 4,1 T. $V_{12} = +6{,}5$ T.

Die Resultate sind in Fig. **120** übersichtlich zusammengestellt.

§ 16.

Abgeleitete Formen.

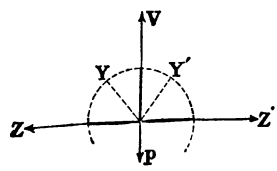
Es hat sich bei der obigen Rechnung herausgestellt, dass die Diagonalen eines sichelförmigen Trägers mit einfachem Diagonalen-System beiderlei Spannungsarten annehmen, sowohl Zug- als Druckspannung. Ein Blick auf die allgemeine Momenten-Gleichung einer Diagonale und die Vergleichung derselben mit den Belastungszuständen, welche dem Fortlassen der positiven und der negativen Glieder entsprechen, zeigen: dass die Spannung der Diagonale das Maximum erreicht, wenn alle rechts liegenden, das Minimum, wenn alle links liegenden Knotenpunkte belastet sind. Bei einem Träger mit **rechts** ansteigenden Diagonalen findet das Umgekehrte statt. Um

die Spannungszahlen eines solchen zu finden, braucht man nur die Fig. **120** von der Kehrseite zu betrachten. Wenn in irgend einem Felde die links ansteigende Diagonale durch eine rechts ansteigende ersetzt werden soll, so ist die Spannungszahl mit der des symmetrisch gegenüberliegenden Feldes zu vertauschen.

Nimmt man den Fall an: dass die links ansteigende Diagonale eines bestimmten Feldes aus einem Faden besteht, der nur Zugspannung annehmen kann, und dass gleichzeitig für solche Belastungszustände, welche sonst Druckspannung in dieser Diagonale erzeugen würden, eine rechts ansteigende von gleicher Beschaffenheit in diesem Felde angebracht ist, so wird diese zweite ihre Dienste leisten allemal dann, wenn die erste erschlaffend ihre Dienste versagt, und umgekehrt. Die beiden gekreuzten Fäden werden also dasselbe leisten, was sonst **eine** Stange leistete, und ihre Spannungszahlen erhält man aus Fig. **120**, indem man ausschliesslich die positiven Zahlen auswählt: für die links ansteigende Diagonale die unmittelbar gefundene, für die rechts ansteigende die symmetrisch gegenüberliegende.

Um bei einem solchen Träger mit gekreuzten Zug-Diagonalen das Verhalten der Verticalständer zu prüfen, ist es nöthig, zuvor zu untersuchen, welches von den beiden Diagonalen-Systemen durch den jedesmaligen Belastungszustand in Thätigkeit versetzt wird, weil der Schnitt, welcher zur Momenten-Gleichung des Verticalständers führt, immer der Richtung der gespannten Diagonalen folgen muss, um nur drei Stangen zu treffen. Bei voller Belastung des Trägers ist keins der beiden Diagonalen-Systeme in Thätigkeit, und wird zugleich die Zugspannung in den unteren Bogenstücken am stärksten. Hieraus folgt, dass auch die Zugspannung eines Verticalständers bei voller Belastung am stärksten wird. Denn ausser der permanenten Last p sind die Zugkräfte Z und Z' die einzigen an dem Fusspunkte des Verticalständers angreifenden Kräfte, welche Zugspannung in ihm hervorbringen können (s. Fig. **121**). Die beiden angrenzenden Diagonalen Y und Y' können, wenn sie gespannt werden, nur Druckspannung in dem Verticalständer erzeugen, da ihre verticalen Seitenkräfte stets aufwärts, also der Kraft V gleich gerichtet sind. Bei voller Belastung werden Z und Z' am grössten, folglich auch ihre abwärts gerichtete Mittel-

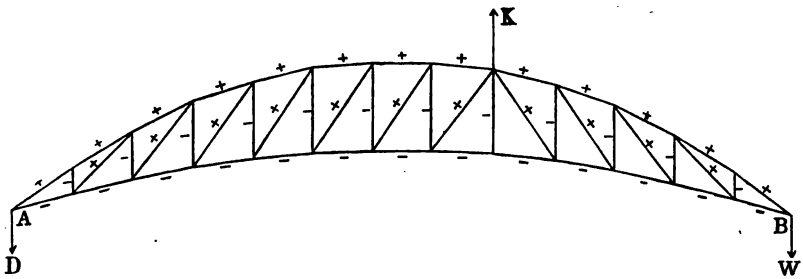
Fig. 121.



kraft, während Y und Y' Null sind. Also erreicht die Kraft V bei voller Belastung ihr Maximum.

Noch klarer tritt dies hervor, wenn man untersucht, welche Wirkung bei dem vollbelasteten Träger die **Entlastung** irgend eines Knotenpunktes hat. Die **Entlastung** eines Knotenpunktes ist gleichbedeutend mit dem Hinzufügen einer aufwärts wirkenden Kraft. Da bei vollbelastetem gleichwie bei ganz unbelastetem Zustande sämmtliche Diagonalen unthätig sind, so braucht man nur zu untersuchen, welche Wirkung auf den leer und gewichtlos gedachten Träger eine aufwärts wirkende Kraft K ausübt. Diese Wirkung lässt sich am besten übersehen, wenn man sich den Träger blos mit denjenigen Diagonalen, welche durch die Kraft K in Thätigkeit versetzt werden, zeichnet und die übrigen ganz fortlässt. Derselbe gewinnt dann das Ansehen der Fig. **122**, in

Fig. 122.

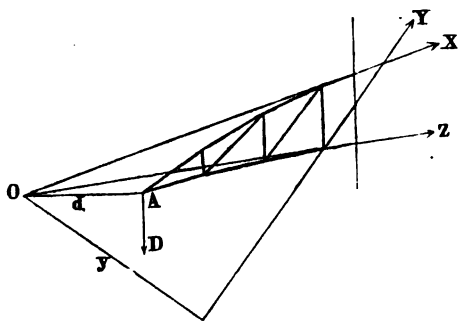


welcher der besseren Uebersicht wegen alle gedrückten Theile mit Minuszeichen, alle gezogenen mit Pluszeichen versehen sind. Die Kraft K erzeugt an den beiden festen Auflagerpunkten A, B die abwärts gerichteten Gegendrücke D, W. Um in irgend einem Felde diejenige von den beiden Diagonalen, welche durch die Kraft K in Thätigkeit gesetzt wird, zu finden, legt man einen Verticalschnitt durch dasselbe und bildet für denjenigen der beiden Theile, welcher die Kraft K **nicht** enthält, die Momenten-Gleichung in Bezug auf den Durchschnittspunkt O der beiden Bogenrichtungen (s. Fig. **123**). Man erkennt dann sogleich, welche von den beiden Diagonalen dem Auflagerdruck D entgegenwirken muss, um das Gleichgewicht gegen Drehung um den Punkt O herzustellen, dass es z. B. im 4ten Felde die rechts ansteigende Diagonale ist, für welche aus der Gleichung:

$$0 = D \,.\, d - Y \,.\, y \text{ oder } Y = + \frac{D \,.\, d}{y}$$

ein positiver Werth sich ergiebt (während die links ansteigende einen negativen erhalten würde).

Fig. 123.



Sobald man auf diese Weise die Richtung der gespannten Diagonale in jedem Felde bestimmt hat, kann man dann durch ein gleiches Verfahren die Frage entscheiden, ob ein Verticalständer gedrückt oder gezogen wird. So z. B. erhält man für den 3ten Verticalständer (s. Fig. **124**) die Gleichung:

$$0 = D \,.\, \delta + V \,.\, v,$$

aus welcher für V ein negativer Werth sich ergiebt. Nur für denjenigen Verticalständer, auf welchen die Kraft K unmittelbar wirkt, ist ein anderes Verfahren einzuschlagen; hier müssen die beiden angrenzenden Stücke des unteren Bogens zu Rathe gezogen werden. Da nun in dem ganzen unteren Bogen Druckspannung durch die Kraft K erzeugt wird, wie man aus der Form der allgemeinen Momenten-Gleichung für Z, nämlich (s. Fig. **125**):

Fig. 124.

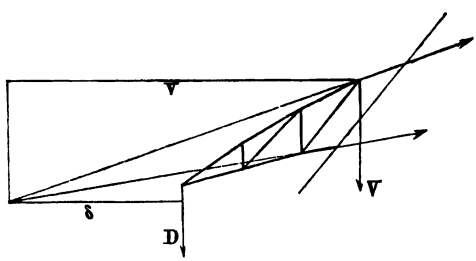
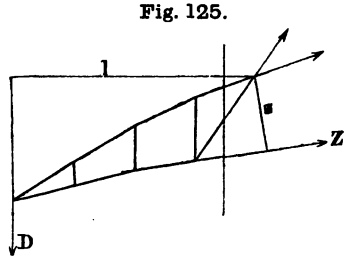


Fig. 125.

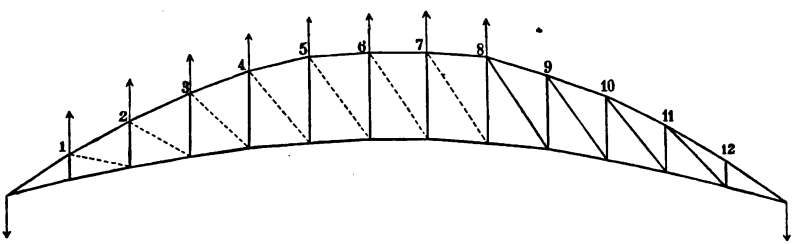


$$0 = -Dl - Zz$$

sogleich erkennt, so wirken auf den Fusspunkt dieses Verticalständers (s. Fig. **122**) von beiden Seiten her Druckkräfte, deren vertical aufwärts wirkende Mittelkraft auch in ihm Druckspannung hervorbringt.

Wenn man sich auf diese Weise davon überzeugt hat, dass die **Entlastung** irgend eines Knotenpunktes in jedem Verticalständer Druckspannung erzeugt, dass also, wenn die **Zug**spannung eines Verticalständers recht gross sein soll, **nirgends** eine Entlastung stattfinden darf, so kann man nun ferner die Frage entscheiden, wie weit mit der Entlastung fortgefahren werden muss, damit die **Druck**spannung eines bestimmten Verticalständers recht gross werde. Offenbar wird in dem 9ten Verticalständer die durch Entlastung des 8ten begonnene Druckwirkung eine fernere Steigerung erhalten durch Entlastungen des 7ten, 6ten . . . 2ten, 1sten Verticalständers, da jede von ihnen für sich allein eine ähnliche Wirkung ausübt und überdies — worauf es hier hauptsächlich ankommt — in den beiden Nachbarfeldern des 9ten Verticalständers das gleiche Diagonalen-System spannt (s. Fig. **126**). Die

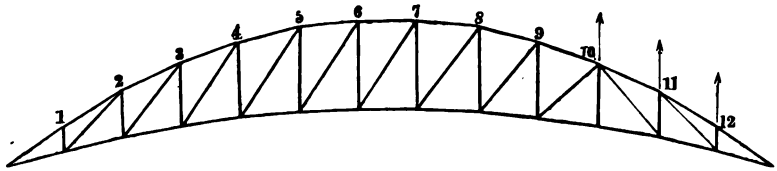
Fig. 126.



Entlastung der acht ersten Verticalständer entspricht der **Be**lastung der vier letzten. Wenn man noch weiter fortführe mit der Entlastung, so würde die Druckspannung des 9ten Verticalständers sich wieder vermindern. Denn: da jetzt in den beiden Nachbarfeldern desselben nur **ein** Diagonalen-System (und zwar das links ansteigende) gespannt ist, so hat nunmehr die Momenten-Gleichung für V_9 (min) ihre Gültigkeit, und diese zeigt, dass jede Verminderung der Belastungen des 9ten, 10ten, 11ten und 12ten Verticalständers die Druckspannung in dem Stücke V_9 wieder verkleinert. Es behält also der oben für V_9 (min) gefundene Werth auch bei diesem Träger mit gekreuzten Zug-Diagonalen seine Geltung als Minimum. Nur ist zu berücksichtigen, dass noch ein zweites Minimum hier in Betracht kommt, nämlich dasjenige, zu welchem man auf ähnliche Weise gelangt, wenn man anfänglich irgend einen **rechts** von dem 9ten befindlichen Verticalständer entlastet annimmt, das hierdurch gespannte Diagonalen-

System in den Träger hineinzeichnet und dann die Entlastung von der **rechten** Seite her bis zu dem 9ten Verticalständer fortschreitend sich denkt (s. Fig. **127**). Man erkennt sogleich, dass

Fig. 127.

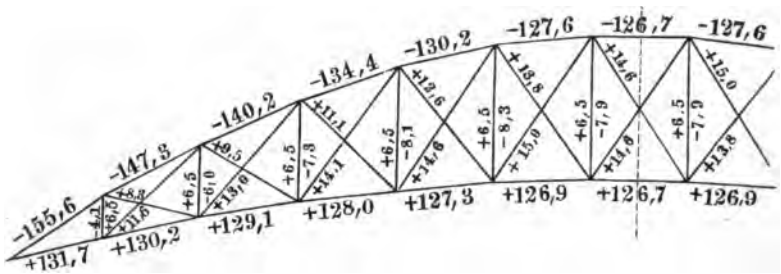


bei diesem Belastungszustande der 9te Verticalständer genau in derselben Lage sich befindet wie in dem Schema Fig. **120** der 4te, dass also V_4 (min) das andere Minimum für den 9ten Verticalständer bildet. Man erhält also die negative Spannungszahl eines Verticalständers, indem man diese beiden Minima mit einander vergleicht, nämlich das unmittelbar gefundene mit dem des symmetrisch gegenüberliegenden, und von diesen beiden dasjenige auswählt, dessen absoluter Werth am grössten ist.

Was die Bogenstücke betrifft, so hat auf sie die Form des Diagonalen-Systems gar keinen Einfluss, weil bei demjenigen Belastungszustande, welcher in ihnen die stärksten Spannungen hervorbringt, sämmtliche Diagonalen wirkungslos sind.

Auf diese Weise kann man die bereits gefundenen Zahlen benutzen, um ohne neue Rechnung die in Fig. **128** eingeschriebenen

Fig. 128.

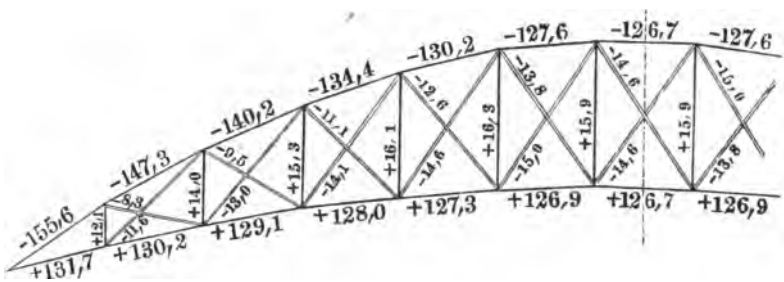


Spannungszahlen eines sichelförmigen Trägers mit gekreuzten Zug-Diagonalen aus ihnen zu bilden.

Durch eine der vorigen ganz analoge Argumentation gelangt man zu dem Resultate, dass für einen Träger mit gekreuzten

Druck-Diagonalen, d. h. solchen, die nur Druckspannung anzunehmen fähig sind (wie z. B. bei Holz-Constructionen vorkommen kann), hinsichtlich der Verticalständer nur die Maxima der oben gefundenen Werthe Gültigkeit behalten, und dass von Druckspannung bei den Verticalständern eines solchen Trägers überall nicht die Rede sein kann, weil eine solche immer mit Zugspannung der angrenzenden Diagonalen verbunden sein würde. Die in Fig. **129** eingeschriebenen Spannungszahlen eines solchen Trägers bedürfen hiernach kaum einer weiteren Erklärung.

Fig. 129.



Nur das verdient hier noch bemerkt zu werden — eine Bemerkung, welche übrigens nicht nur die beiden letzteren Fälle, sondern überhaupt alle Träger mit gekreuzten Diagonalen betrifft — dass nämlich die gefundenen Spannungszahlen nur dann die richtigen sind, wenn keine künstliche Spannungen in das System hineingebracht sind. Solche künstliche Spannungen können in dem einfachen Systeme nicht vorkommen, denn in einem solchen lässt jede Stange sich erreichen durch einen Schnitt, welcher nicht mehr als drei Stangen trifft. Wenn also keine äussere Kräfte auf das System wirken, so erscheint die Momenten-Gleichung einer beliebigen Stange Y in Beziehung auf den Durchschnittspunkt der beiden mit durchschnittenen Stangen immer in der Form:

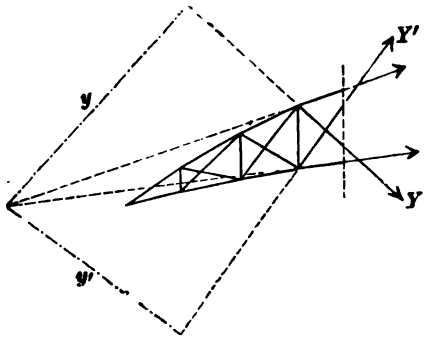
$$0 = Y \,.\, y.$$

In allen solchen Fällen aber, wo in einem Viereck zwei Stangen einander kreuzen, trifft der Schnitt vier Stangen, und die Spannungen der beiden gekreuzten Stangen haben in Beziehung auf den Durchschnittspunkt der beiden mit durchschnittenen

Stangen immer entgegengesetzte Drehungsrichtungen. Ihre Momenten-Gleichung erhält also die Form (s. Fig. **130**):

$$0 = Y \,.\, y - Y' \,.\, y'.$$

Fig. 130.



Diese Gleichung erfordert immer nur, dass:

$$\frac{Y}{Y'} = \frac{y'}{y},$$

lässt übrigens die absoluten Werthe von Y und Y' völlig unbestimmt.

Wenn also der einen Diagonale auf irgend eine Weise — etwa durch Anziehen von Schrauben oder Keilen — künstlich eine bestimmte Spannung Y ertheilt wird, so nimmt sofort auch die andere die der obigen Proportion entsprechende Spannung Y' an, und demzufolge entstehen dann auch in den Verticalständern und Bogenstücken desselben Feldes Spannungen, welche mittelst der Momenten-Methode leicht bestimmt werden können, wenn Y und Y' einmal bekannt sind.

Die oben berechneten Spannungszahlen gelten ausschliesslich unter der Voraussetzung, dass in der unbelasteten Construction alle Stücke vollkommen spannungslos sind. In diesem Falle wird bei einem Träger mit gekreuzten Zug- (oder Druck-) Diagonalen in jedem Felde stets nur eine der beiden Diagonalen zur Wirkung kommen, während sonst der Fall eintreten könnte, dass beide zugleich in Thätigkeit gerathen.

§ 17.

Scheinbare Mängel der Methode.

Es kommen bei Anwendung der Methode der statischen Momente mitunter — so namentlich bei der zuletzt berechneten Construction — Fälle vor, bei denen es scheinen könnte, als ob die Methode, wenn sie überhaupt zum Ziele führt, doch nur einen äusserst geringen Grad von Genauigkeit und Zuverlässigkeit zu erreichen gestattete.

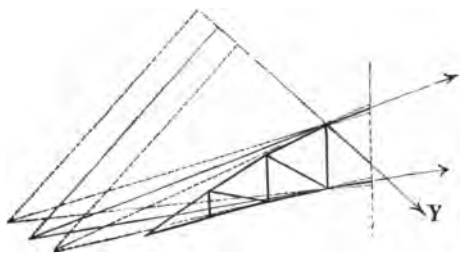
Um die Momenten-Gleichung einer Stange zu bilden, musste als Drehpunkt der Durchschnittspunkt der beiden mit durch-

schnittenen Stangen construirt werden. Wenn nun die Richtungen der beiden letzteren nahezu parallel sind, so ist die genaue Bestimmung dieses Punktes und das Messen der betreffenden Hebelarme mit Schwierigkeiten verbunden. Die Folge davon wird sein, dass zwei verschiedene Rechner zu verschiedenen Resultaten gelangen werden, indem der Eine diese, der Andere jene Länge für einen bestimmten Hebelarm durch Construction findet.

Auf den ersten Blick scheint dies ein grosser Mangel der empfohlenen Methode zu sein. Bei näherer Ueberlegung verschwindet jedoch derselbe, und stellt sich vielmehr heraus, dass man noch Nutzen aus jenem Umstande ziehen kann.

Zunächst ist klar, dass man den Fehler in ganz bestimmte Grenzen einschliessen kann, indem man absichtlich den beiden Stangenrichtungen das eine Mal eine zu grosse, das andere Mal eine zu kleine Convergenz giebt und beide Male aus der betreffenden Momenten-Gleichung die gesuchte Spannung Y (s. Fig. **131**) berechnet. Man erhält dann zwei Werthe, von denen man behaupten kann, dass der wahre Werth jedenfalls zwischen denselben liegen muss. Die Vergleichung dieser beiden Grenzwerthe mit den Grössen jener absichtlich gewählten Abweichungen lässt zugleich erkennen, in welchem Grade die Spannung der Stange durch Ungenauigkeiten in der practischen Ausführung modificirt werden kann.

Fig. 131.



Jene Unbestimmtheit nämlich, wie sie dort dem Rechner in der Zeichnung entgegentrat, ist nichts Anderes als eine Abspiegelung der Schwankungen, denen in der ausgeführten Construction die wirkliche Spannung der Stange unterworfen sein kann. Je nachdem der ausführende Arbeiter von der ihm vorgezeichneten Werkzeichnung in der einen oder anderen Richtung abweicht: wird auch die Spannung der betreffenden Stange sich ändern und dem einen oder anderen der beiden Grenzwerthe sich nähern. Durch jene Methode werden also die Gefahren, welche eine ungenaue practische Ausführung mit sich bringen kann, gleichsam

nachgeahmt und bildlich veranschaulicht in einem Grade, welcher von keiner anderen Methode erreicht wird.

Der andere Einwurf aber, welcher noch gemacht werden könnte, nämlich: dass die Methode der statischen Momente nicht ausschliesslich auf Rechnung, sondern zum Theil auf Construction und Messung sich gründet, kann noch weniger als begründet anerkannt werden. Denn rechnen soll man nur da, wo die Rechnung rascher zum Ziele führt als andere Methoden. Wo also die Construction als eine Abkürzung der Rechnung sich erweist, da ist kein rechter Grund einzusehen, warum man durchaus rechnen sollte, zumal da ein Versehen beim Messen viel weniger leicht vorkommen kann als beim Rechnen.

§ 18.
Theorie der sichelförmigen Träger.

Das vorige Zahlenbeispiel bot abermals einen Beweis für die schon früher aufgestellte Behauptung: dass man mittelst der Methode der statischen Momente eine beliebige vorgelegte Construction berechnen könne, ohne in die eigentliche Theorie derselben vorher eine Einsicht gewonnen zu haben, und ist aus diesem Grunde absichtlich der Theorie vorangestellt. Um aber die Principien kennen zu lernen, nach welchen bei Auswahl der Constructionsform zu verfahren ist, muss man einen allgemeinen Ueberblick sich zu verschaffen suchen über die Gesetze, nach welchen die Spannungen in einem solchen Träger sich vertheilen. Zu diesem Zwecke soll die im zweiten Abschnitt § 8 begonnene „Theorie der parabolischen Träger“ hier weiter fortgeführt und vervollständigt werden.

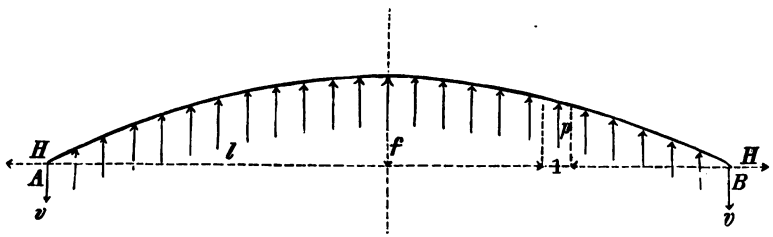
Wenn man die im Eingange jener Theorie betrachtete Figur (42) einer gleichförmig belasteten hängenden Kette um die horizontale Achse $A\,B$ sich herumgedreht denkt, so nehmen sämmtliche Verticalkräfte entgegengesetzte Richtungen an und man erhält die in Fig. **132** dargestellte Form einer nach oben hin gezogenen gespannten Kette, deren Belastungen man als negative Belastungen bezeichnen könnte. Die für Fig. 42 gefundene Gleichung:

$$Hf = \frac{p\,l^2}{2}$$

ist ohne Weiteres als für diese neue Form ebenfalls gültig anzusehen, weil das obige Beweisverfahren unmittelbar auf diesen Fall sich übertragen lässt.

Ebenso gilt für eine zwischen zwei festen Punkten nach oben hin ausgespannte Kette, welche mit positiver Belastung P (pro

Fig. 132.

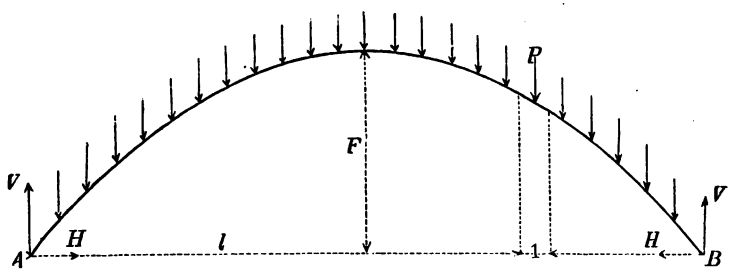


Längeneinheit der Spannweite) versehen ist und die Pfeilhöhe F hat (s. Fig. **133**), die Gleichung:

$$HF = \frac{Pl^2}{2},$$

und man kann offenbar die Belastung P so wählen, dass die Horizontalkraft H in dieser letzteren Kette dieselbe Grösse hat

Fig. 133.



wie in der vorigen. Als Bedingung dieser Gleichheit ergiebt sich, wenn man die Werthe von H aus beiden Gleichungen einander gleichsetzt, oder kürzer, wenn man die eine durch die andere dividirt, die dritte Gleichung:

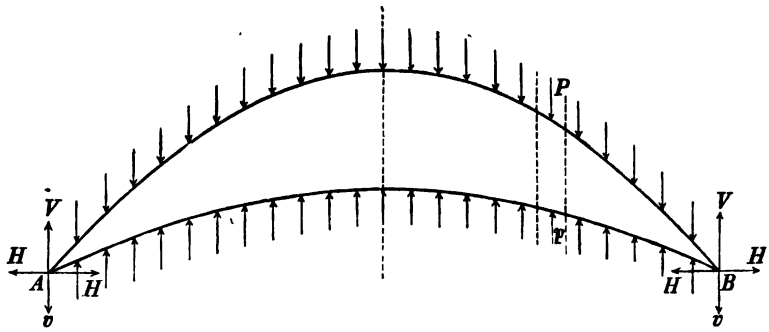
$$\frac{f}{F} = \frac{p}{P},$$

welche ausdrückt, dass die absoluten Werthe der Belastungen sich verhalten müssen wie die Pfeilhöhen der beiden Ketten.

Wenn man dieselben beiden Punkte A und B als gemeinschaftliche Stützpunkte für beide Ketten annimmt (s. Fig. **134**),

so wird offenbar der von diesen Punkten zu leistende horizontale Gegendruck gleich Null werden, denn die eine Kette erfordert

Fig. 134.



gerade so viel Gegendruck von **innen** als die andere von **aussen** her. Es wird also jeder der beiden Punkte nur noch einen verticalen Gegendruck D zu leisten haben, welcher gleich dem Ueberschusse von V über v ist; nämlich:

$$D = V - v = Pl - pl = (P - p)\, l.$$

Dieser Gegendruck ist also gerade so gross wie bei einem geraden Balken, dessen Belastung pro Längeneinheit gleich $P - p$ ist.

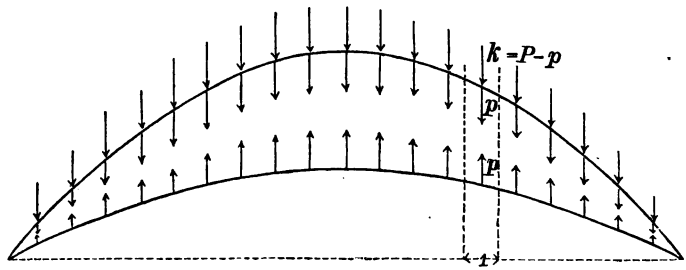
Die negative Belastung der unteren Kette kann man durch Zugstangen hervorbringen, welche in den einzelnen Punkten der Kette befestigt sind, und nach oben hin gezogen werden mit Kräften, welche pro Längeneinheit der Spannweite p betragen.

Einen Theil der positiven Belastung der oberen Kette — und zwar einen Theil der ebenso viel beträgt — kann man sich in ähnlicher Weise durch Hängestangen hervorgebracht denken, welche an den einzelnen Punkten der oberen Kette befestigt sind und nach unten hin gezogen werden mit Kräften, welche pro Längeneinheit der Spannweite gleich p sind. Den anderen Theil $P - p$, welcher mit k bezeichnet werden soll, kann man durch äusserlich aufgelegte Belastung darstellen (s. Fig. **135**).

Wenn man alsdann das obere Ende jeder Zugstange mit dem unteren Ende der darüber befindlichen Hängestange gehörig verbindet, so dass ein Stück daraus wird, so kann man die Kräfte p weglassen, indem sie alsdann durch die Spannungen der

auf solche Weise gebildeten Verticalstangen genau ersetzt werden. Man erhält damit einen sichelförmig parabolischen Träger ohne

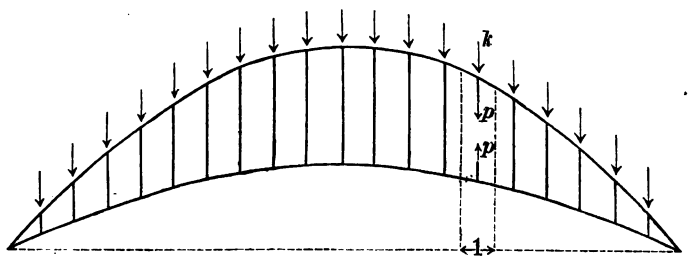
Fig. 135.



Diagonalen, dessen gleichförmig über die Spannweite vertheilte Belastung pro Längeneinheit k beträgt und in dem oberen Bogen ihre Angriffspunkte hat.

Die Spannungen in den beiden Bogen sowie in den Verticalstangen lassen sich nun auf folgende Weise aus den gegebenen Grössen l, f, F, k berechnen. Es kann dabei der Einfachheit wegen angenommen werden, dass auf jede Längeneinheit der Spannweite nur **eine** Verticalstange kommt (s. Fig. **136**); denn es ist im

Fig. 136.



zweiten Abschnitt § 8 bereits nachgewiesen, dass die parabolische Form auch dann noch die Gleichgewichtsform bildet, wenn die Belastungen auf einzelne Punkte sich concentriren, vorausgesetzt, dass auf jeden Belastungspunkt die halben Belastungen der angrenzenden Abtheilungen kommen.

Zur Berechnung der beiden Grössen P und p dienen die beiden Gleichungen:

$$\frac{f}{F} = \frac{p}{P} \quad \text{und} \quad P - p = k.$$

Man erhält daraus, wenn man das Verhältniss $\frac{f}{F}$ mit $\frac{1}{n}$ bezeichnet:

$$p = \frac{k}{n-1}, \quad P = k + \frac{k}{n-1}.$$

Das Auflegen der Belastungen k auf den oberen Bogen erzeugt also in jeder Verticalstange eine Zugspannung $= \frac{k}{n-1}$, um welche die Belastung des oberen Bogens noch vermehrt wird und welche zugleich die negative Belastung der unteren Kette bildet. Es zerlegt sich also gleichsam die Belastung k in die beiden Theile:

$$-p \quad \text{und} \quad k+p, \quad \text{oder}$$
$$-\frac{k}{n-1} \quad \text{und} \quad k + \frac{k}{n-1},$$

deren ersterer von dem unteren, letzterer von dem oberen Bogen aufgenommen wird.

Bei dem vorigen Zahlenbeispiel war

$$\frac{1}{n} = \frac{f}{F} = \frac{1}{2{,}5} = \frac{2}{5}, \quad \text{also} \quad n = \frac{5}{2}.$$

Daraus ergiebt sich bei einer Belastung k eine Spannung in den Verticalstangen (oder negative Belastung des unteren Bogens):

$$p = \frac{k}{\frac{5}{2}-1} = \frac{2}{3}k$$

und eine Belastung des oberen Bogens:

$$P = k + p = \frac{5}{3}k.$$

Wenn also die äusserlich aufgelegte Belastung 7,5 Tonnen für jeden Knotenpunkt beträgt, so wird dadurch in den Verticalstangen eine Spannung von $\frac{2}{3} \cdot 7{,}5 = 5$ Tonnen erzeugt, und der obere Bogen befindet sich in demselben Zustande, als wenn eine Belastung von $\frac{5}{3} \cdot 7{,}5 = 12{,}5$ Tonnen auf jeden seiner Belastungspunkte wirkte (wobei der Träger selbst gewichtlos gedacht wird).

Wenn man die 1,5 Tonnen Eigengewicht des vorigen Beispiels als eine auf die oberen Knotenpunkte vertheilte Last ansieht, so ergeben sich als Wirkung dieses Gewichts $\frac{2}{3} \cdot 1{,}5 = 1$ Tonne Zugspannung in den Verticalen (oder negative Belastung der unteren Kette) und $\frac{5}{3} \cdot 1{,}5 = 2{,}5$ Tonnen Belastung der oberen Kette.

Endlich wenn man $7{,}5 + 1{,}5 = 9$ Tonnen Totalbelastung in gleicher Weise wirkend annimmt, so erhält man

6 Tonnen für die untere und
15 Tonnen für die obere Kette.

Wenn dagegen ein Theil der Belastung unmittelbar an dem unteren Ende der Verticalstange angreift, so kann man sich mittelst einer Nebenstange auch diesen Theil auf den oberen Endpunkt übertragen denken und die Spannung dieser Nebenstange zu derjenigen der Hauptstange hinzu addiren, um die ganze Spannung der Verticalstange zu finden. So z. B. wurden bei der vorigen Construction 0,5 Tonnen des Eigengewichts auf die unteren Punkte gerechnet und diese wären also zu den 6 Tonnen hinzuzurechnen, um unter dieser Voraussetzung die Spannungen der Verticalständer zu bekommen — ganz wie oben mittelst der Momenten-Methode gefunden wurde. Derjenige Theil der Verticalstange, welcher die untere Kette spannt, also die Hauptstange, behält jene 6 Tonnen Spannung, und bleibt daher die Spannung in den beiden Ketten genau dieselbe, mag die äussere Belastung oben oder unten aufgehängt sein. Die horizontale Spannung der Ketten z. B. beträgt:

$$H = \frac{pl^2}{2f} = \frac{6 \,.\, 6{,}5^2}{2 \,.\, 1} = 126{,}7 \text{ Tonnen}$$

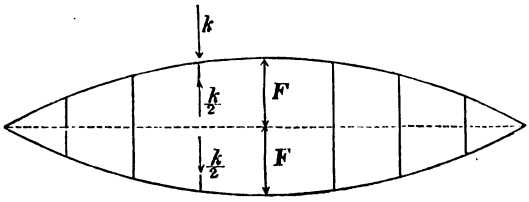
Zugspannung in der unteren und **Druck**spannung in der oberen Kette, wie früher mittelst der Momenten-Methode ebenfalls gefunden wurde.

Setzt man $\frac{1}{n} = 0$, so erhält man $p = 0$ und $P = k$, d. h. wenn der untere Bogen in eine horizontale gerade Linie übergeht, so erzeugt eine oben aufgelegte Belastung gar keine Spannung in den Verticalen.

Wird ferner $\frac{1}{n}$ negativ, so wird auch p negativ, d. h. wenn der untere Bogen nach unten hin hängt, so erhalten die Verticalständer negative (oder Druck-) Spannung durch eine oben aufgelegte Last, so z. B. wenn $\frac{1}{n} = -1$ gesetzt wird, ergeben sich:

$$p = -\frac{k}{2} \quad \text{und} \quad P = +\frac{k}{2},$$

Fig. 137.



d. h. in diesem Falle wird die Hälfte der oben aufgelegten Last auf den unteren Bogen übertragen (s. Fig. **137**). Ueberhaupt gelten die eben gefundenen Sätze sowohl für negative als für positive Werthe der Pfeilhöhe f des unteren Bogens.

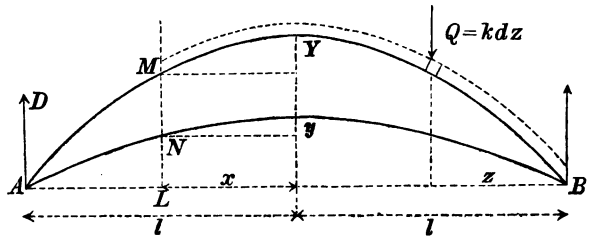
In allen diesen Fällen reichen also bei voller — oder überhaupt gleichförmig über die Spannweite vertheilter Belastung — die Verticalständer aus, um das Gleichgewicht der beiden Ketten zu erhalten. Nur bei ungleichförmiger Belastung tritt eine Tendenz zur Verschiebung ein, und dieser wird durch das einzuschaltende Diagonalen-System begegnet.*)

---

*) Auch für das Diagonalen-System eines solchen sichelförmigen Trägers lässt sich ein allgemeines Spannungsgesetz aufstellen, dessen Ableitung für diejenigen Leser, welche mit dem Gebrauche der Differentialrechnung vertraut sind, als Zusatz hier in der Kürze mitgetheilt werden soll.

Die Diagonalstangen bilden mit den Verticalstangen zusammen genommen ein Absteifungs-System, welches die beiden Ketten zu einem unverschiebbaren Ganzen verbindet. Gegen äussere Kräfte verhält sich dieses Ganze stets wie ein einfacher Balken, der an beiden Endpunkten unterstützt ist. Wenn also an irgend einer Stelle, z. B. in der Horizontal-Entfernung z, von dem rechten

Fig. 138.

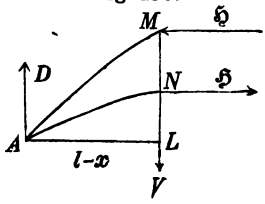


Auflager B ein Gewicht Q auf diesen Balken gelegt wird (s. Fig. **138**), so ruft dasselbe an dem jenseitigen Auflager A einen Gegendruck hervor:

$$D = Q \cdot \frac{z}{2l}.$$

Zerlegt man an irgend einer Stelle auf der linken Seite durch einen Verticalschnitt MN den ganzen Träger in zwei Theile, so müssen bei jedem derselben, z. B. dem Theil Fig. **139**, um das Gleichgewicht wieder herzustellen, Kräfte an der Schnittstelle angebracht werden. Damit die algebraische Summe der Verticalkräfte in Fig. **139** gleich Null werde, muss eine Verticalkraft V angebracht werden, welche so gross als D ist und nach unten wirkt, also:

Fig. 139.



$$V = Q \cdot \frac{z}{2l}.$$

Die Kraft V allein würde das Stück um den Punkt A drehen, wenn nicht noch horizontale Kräfte hinzugefügt würden. Diese Horizontalkräfte

müssen jedenfalls paarweise gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung haben, weil sonst die algebraische Summe der Horizontalkräfte nicht Null wäre. Wenn der Schnitt MN unmittelbar neben einem Verticalständer vorbeigeht, so sind M und N die einzigen beiden Stellen, an denen Stangen von dem Schnitt getroffen werden. An diesen beiden Punkten sind also die Horizontalkräfte anzubringen. Die Grösse $\mathfrak{H}$ jeder dieser beiden Kräfte bestimmt man aus der Gleichung der statischen Momente in Beziehung auf den Drehpunkt A, nämlich:

$$0 = V(l-x) - \mathfrak{H} \cdot \overline{ML} + \mathfrak{H} \cdot \overline{NL}.$$

Wenn die Pfeilhöhen der beiden Parabeln wie früher mit F und f bezeichnet werden, so sind die Gleichungen derselben:

$$\frac{Y}{F} = \frac{x^2}{l^2} = \frac{y}{f}.$$

Man erhält daraus für ML und NL die Werthe:

$$ML = F - Y = F\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right)$$

$$NL = f - y = f\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Wenn man diese Werthe so wie auch den für V gefundenen in die obige Momenten-Gleichung substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$0 = Q \cdot \frac{z}{2l} \cdot (l-x) - \mathfrak{H} F\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right) + \mathfrak{H} f\left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right),$$

welche für $\mathfrak{H}$ aufgelöst den Werth giebt:

$$\mathfrak{H} = \frac{Qlz}{2(F-f)(l+x)}.$$

Es ist nun die Kraft $\mathfrak{H}$ die durch das Gewicht Q an der Stelle M hervorgebrachte Horizontal-Spannung der Kette, und der nach x genommene Differential-Quotient:

$$\frac{d\mathfrak{H}}{dx} = -\frac{Qlz}{2(F-f)(l+x)^2}$$

giebt die Grösse an, um welche diese Spannung pro Längeneinheit der Horizontalen zunimmt, wenn die Grösse x wächst, d. h. wenn der Punkt M weiter links angenommen wird.

Der absolute Werth dieser Grösse wird um so grösser, je mehr Gewichte Q rechts von dem Punkte M aufgelegt werden, am grössten, wenn die ganze Strecke von B bis M belastet wird. Für letzteren Belastungszustand erhält man den zugehörigen Werth von $\frac{d\mathfrak{H}}{dx}$, welcher mit $\frac{dH}{dx}$ bezeichnet werden soll (indem $\mathfrak{H}$ dann in H übergeht), wenn man $k\,dz$ statt Q setzt und zwischen den Grenzen $z=0$ und $z=l+x$ integrirt:

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{kl}{2(F-f)(l+x)^2} \cdot \int_{z=0}^{z=l+x} z\,dz = -\frac{kl}{2(F-f)(l+x)^2} \cdot \frac{(l+x)^2}{2}$$

$$\frac{dH}{dx} = -\frac{kl}{4(F-f)}.$$

Dass nämlich bei noch weiterem Fortsetzen der Belastung über den Punkt M hinaus der vorher negative Werth von $\frac{d\mathfrak{H}}{dx}$ wiederum der Grösse Null sich nähern würde: davon überzeugt man sich leicht, wenn man auf ähnliche Weise wie oben untersucht, welchen Einfluss ein einzelnes **links** von dem Punkte in der Entfernung z vom Auflager A aufgelegtes Gewicht Q haben würde.

Man findet dann, dass jede Belastung links den Werth von $\frac{d\mathfrak{H}}{dx}$ positiv macht und dass dieser positive Werth am grössten wird, wenn alle Punkte links von M belastet werden. Diese Untersuchung würde zu den analogen Gleichungen führen:

$$0 = -Q\frac{z}{2l}\cdot(l+x)+\mathfrak{H}F\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right)-\mathfrak{H}f\left(1-\frac{x^2}{l^2}\right);$$

$$\mathfrak{H}=\frac{Qlz}{2(F-f)(l-x)};\quad \frac{d\mathfrak{H}}{dx}=\frac{Qlz}{2(F-f)(l-x)^2};$$

$$\frac{dH}{dx}=\frac{kl}{2(F-f)(l-x)^2}\cdot\int_{z=0}^{z=l-x} z\,dz=\frac{kl}{2(F-f)(l-x)^2}\cdot\frac{(l-x)^2}{2}$$

$$\frac{dH}{dx}=+\frac{kl}{4(F-f)}.$$

Man kann daher der allgemeinen Gleichung für $\frac{dH}{dx}$ auch die Form geben:

$$\frac{dH}{dx}\begin{cases}\text{maximum}=+\dfrac{kl}{4(F-f)}\\ \text{minimum}=-\dfrac{kl}{4(F-f)}.\end{cases}$$

Dieses Resultat lässt sich nun auf folgende Weise zur Bestimmung der Diagonalen-Spannungen benutzen.

Es war die Annahme gemacht worden, dass der Verticalschnitt unmittelbar neben einem Verticalständer vorbeigehen sollte. Die Schnittstelle der Diagonale fällt dann mit der Schnittstelle eines der beiden Bögen, beispielsweise des unteren, zusammen (s. Fig. **140**). Die drei Kräfte H, V, H vertheilen sich nun folgender Gestalt auf die drei Schnittstellen: Auf die Schnittstelle M kommt die Horizontalkraft H und so viel von der Verticalkraft V als nöthig ist, um eine Mittelkraft zu ergeben, welche mit der Richtung der Kette bei M zusammenfällt. Auf die Schnittstelle N der Diagonalstange kommt ein Theil der unten angreifenden Kraft H und so viel von der Verticalkraft V als nöthig ist, um eine Mittelkraft zu geben, welche mit der Diagonalen-Richtung zusammenfällt. Auf die Schnittstelle N der unteren Kette kommt der andere Theil von H und so viel von der Kraft V als nöthig ist, um eine Mittelkraft zu geben, welche mit der Richtung der Kette bei N zusammenfällt.

Hätte man den Schnitt um die Strecke dx weiter links gelegt, so würden die Kräfte:

$$H+\frac{dH}{dx}dx \text{ und } V+\frac{dV}{dx}dx$$

statt der Kräfte H und V anzubringen gewesen sein. Wenn man gleichzeitig beide Schnitte führt und die Wirkung der Kräfte untersucht, welche auf das

Fig. 140.

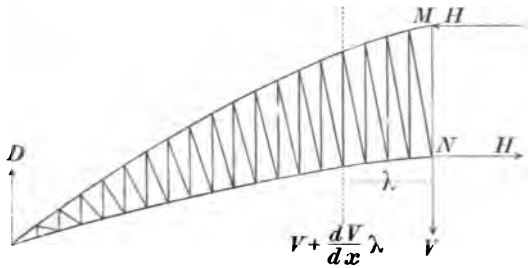
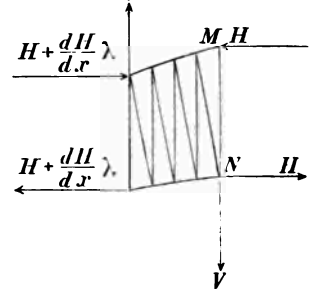


Fig. 141.



herausgeschnittene Stück wirken, so findet man, dass der Ueberschuss der von links nach rechts wirkenden Horizontalkraft, also $\frac{dH}{dx} . dx$ die Kraft bildet, welche das obere Bogenstück nach rechts und das untere nach links zu verschieben trachtet.

Nimmt man als Breite des Stücks die kleine Grösse λ (statt der unendlich kleinen Grösse dx), so wird annähernd auch jetzt noch:

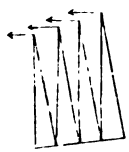
$$\frac{dH}{dx} . \lambda$$

oder wenn man für $\frac{dH}{dx}$ den oben gefundenen Werth substituirt:

$$\pm \frac{kl}{4(F-f)} . \lambda$$

die Grösse dieser Verschiebungskraft darstellen, welche je nach der Belastungsweise nach rechts oder nach links wirkt (s. Fig. 141). Diese Kraft vertheilt sich auf die Spitzen der einzelnen aus Verticalständer und Diagonalstange gebildeten Dreiecke und bringt Spannungen in denselben hervor, welche leicht bestimmt werden können, wenn man die Richtungen der Diagonalen kennt (s. Fig. 142).

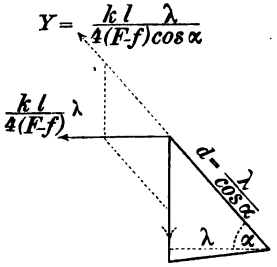
Fig. 142.



Wenn man mit λ die horizontale Länge eines Feldes bezeichnet, so ist es nur ein solches Dreieck, welches die Kraft $\pm \frac{kl}{4(F-f)} . \lambda$ aufnimmt, und diese kann dann in zwei Seitenkräfte

zerlegt gedacht werden, von denen die **eine** in der Diagonalstange, die **andere** in der Verticalstange Spannung hervorbringt (s. Fig. **143**). Für die erstere erhält man:

Fig. 143.



$$Y = \pm \frac{k\,l}{4\,(F-f)} \cdot \frac{\lambda}{\cos\,\alpha}$$

oder weil $\frac{\lambda}{\cos\,\alpha}$ gleich der Länge d der Diagonale ist:

$$Y = \pm \frac{k\,l}{4\,(F-f)} \cdot d.$$

Um also die stärkste Spannung einer Diagonalstange zu ermitteln, braucht man nur ihre **Länge** zu messen und diese mit dem Ausdruck $\frac{k\,l}{4\,(F-f)}$ zu multipliciren.

Für den in § 15 berechneten Träger z. B. wird:

$$\frac{k\,l}{4\,(F-f)} = \frac{7{,}5\,.\,6{,}5}{4\,(2{,}5-1)} = 8{,}125.$$

Wenn man die Längen der einzelnen Diagonalen $d_2\,d_3 \ldots d_{12}$ misst und sie mit dieser Zahl multiplicirt, so erhält man folgende Zahlen:

d_2	$= 1{,}018;$	Y_2	$= 8{,}125\,.\,1{,}018 = 8{,}3$
d_3	$= 1{,}163;$	Y_3	$= 8{,}125\,.\,1{,}163 = 9{,}5$
d_4	$= 1{,}361;$	Y_4	$= 8{,}125\,.\,1{,}361 = 11{,}1$
d_5	$= 1{,}55;$	Y_5	$= 8{,}125\,.\,1{,}55 = 12{,}6$
d_6	$= 1{,}7;$	Y_6	$= 8{,}125\,.\,1{,}7 = 13{,}8$
d_7	$= 1{,}8;$	Y_7	$= 8{,}125\,.\,1{,}8 = 14{,}6$
d_8	$= 1{,}835;$	Y_8	$= 8{,}125\,.\,1{,}835 = 14{,}9$
d_9	$= 1{,}815;$	Y_9	$= 8{,}125\,.\,1{,}815 = 14{,}7$
d_{10}	$= 1{,}735;$	Y_{10}	$= 8{,}125\,.\,1{,}735 = 14{,}1$
d_{11}	$= 1{,}605;$	Y_{11}	$= 8{,}125\,.\,1{,}605 = 13{,}0$
d_{12}	$= 1{,}426;$	Y_{12}	$= 8{,}125\,.\,1{,}426 = 11{,}6$

welche bis auf unerhebliche Abweichungen mit den in Fig. **120** eingeschriebenen Zahlen übereinstimmen.

Das oben gefundene allgemeine Gesetz der Diagonal-Spannungen gilt nicht blos für sichelförmige Träger, sondern auch für solche parabolische Träger, deren unterer Bogen nach unten hin seine convexe Seite kehrt. Für diesen Fall ist $-f$ statt $+f$ zu setzen und wird:

$$\frac{d\,H}{d\,x} = \pm \frac{k\,l}{4\,(F+f)}.$$

Ebenso gilt das Gesetz noch für die beiden speciellen Fälle, wenn entweder der untere oder der obere Bogen in eine horizontale Linie übergeht. Für den ersteren Fall ist in der letzten Gleichung $f = 0$, für den zweiten $F = 0$ zu setzen und man erhält:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{kl}{4F}$$ wenn die Horizontale unten,

$$\frac{dH}{dx} = \frac{kl}{4f}$$ wenn die Horizontale oben liegt.

Für den in § 6 berechneten parabolischen Träger z. B. wird:

$$\frac{dH}{dx} = \frac{kl}{4f} = \frac{2500 \cdot 8}{4 \cdot 2} = 2500$$

und wenn man die Längen der Diagonalen $d_2\ d_3 \ldots d_7$ misst und mit 2500 multiplicirt, so gelangt man zu folgenden Zahlen:

$d_2 = 2{,}5$; $\quad Y_2 = 2500 \cdot 2{,}5 \quad = 6250$

$d_3 = 2{,}741$; $\quad Y_3 = 2500 \cdot 2{,}741 = 6850$

$d_4 = 2{,}828$; $\quad Y_4 = 2500 \cdot 2{,}828 = 7070$

$d_5 = 2{,}741$; $\quad Y_5 = 2500 \cdot 2{,}741 = 6850$

$d_6 = 2{,}5$; $\quad Y_6 = 2500 \cdot 2{,}5 \quad = 6250$

$d_7 = 2{,}183$; $\quad Y_7 = 2500 \cdot 2{,}183 = 5460$

welche wiederum fast genau mit den in Fig. 27 eingeschriebenen Zahlen übereinstimmen.

Für die Verticalständer könnte man zwar ebenfalls ein solches allgemeines Spannungsgesetz aufstellen, doch würde wegen ihrer doppelten Functionen — erstens als Glieder des Absteifungs-Systems, zweitens als Stützen oder Hängestangen, welche die Last von einem Bogen zum andern übertragen — dieses Gesetz eine complicirtere Form erhalten und deshalb von geringem praktischen Werthe sei. Auch dürfte man keine so genaue Uebereinstimmung erwarten zwischen den nach diesem Gesetze zu berechnenden und den mittelst der Momenten-Methode gefundenen Werthen. Denn solche allgemeine Gesetze gründen sich auf die der Wirklichkeit nicht genau entsprechende Voraussetzung einer stetigen Lastvertheilung und eines **stetigen** Fortschreitens der Belastung, während bei der Momenten-Methode ein **sprungweise** fortschreitendes Belasten angenommen wurde.

Aus diesem Grunde ist hinsichtlich der Verticalständer unter allen Umständen die Methode der statischen Momente vorzuziehen.

Fünfter Abschnitt.

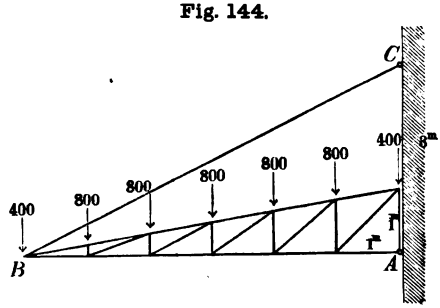
§ 19.

Hängendes Perron-Dach von 6m Vorsprungsweite.

Als Totalbelastung incl. Wind- und Schneedruck sind 200 Kil. pro Quadratmeter der Grundrissfläche angenommen. Die Entfernung der einzelnen Binder von einander beträgt 4 Meter. Die Belastung für jeden einzelnen Binder ist demnach:

$$6 \cdot 4 \cdot 200 = 4800 \text{ Kil.},$$

Fig. 144.



wovon auf jedes der 6 Felder 800 Kil. kommen. Von den 7 Belastungspunkten erhalten daher der erste und letzte je 400 Kil., die übrigen je 800 Kil. als Belastung (Fig. **144**). Wegen verhältnissmässig geringer Grösse des Beitrages, den die eigenen Gewichte der Stangen zu diesen Totalbelastungen liefern., dürfen dieselben ganz als „mobile" Belastungen in Rechnung gebracht werden.

Berechnung der Spannungen H in den horizontalen Stangen.

Die Art und Weise, wie irgend eine einzelne Belastung Q durch die Widerstände W und P der beiden festen Unterstützungspunkte A und C aufgehoben wird, zeigt Fig. **145**. Um die Spannung H in der Stange MN zu berechnen, würde man für den in Fig. **146** dargestellten Theil die Gleichung der statischen Momente in Bezug auf den Punkt O als Drehpunkt aufzustellen

haben. Wenn also, wie hier geschehen, der Belastungspunkt so gewählt wird, dass die Mittelkraft von Q und P durch den Drehpunkt O hindurchgeht, so wird die Spannung $H = 0$. Alle weiter links von dieser Stelle angebrachten Belastungen bringen negative, alle weiter rechts angebrachten Belastungen bringen positive Spannungen in der Stange MN hervor. Um also H (min) zu finden, hat man die Belastungspunkte der in Fig. **145** mit „Druck" überschriebenen Abtheilung allein belastet anzunehmen; um H (max) zu finden dagegen diejenigen der mit „Zug" überschriebenen Abtheilung.

Fig. 145.

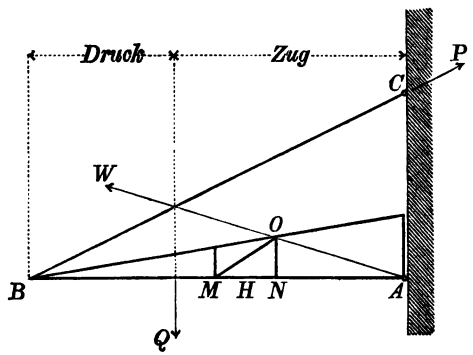
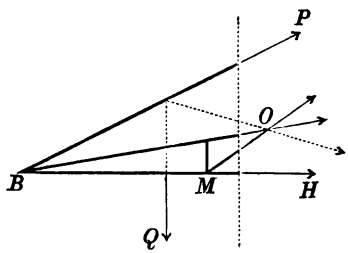
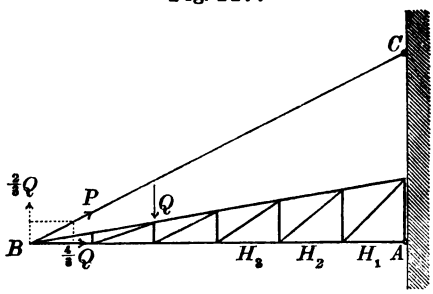


Fig. 146.



Statt dessen kann man diese beiden Berechnungen auch in der Art mit einander verbinden, dass man sämmtliche Punkte zugleich belastet annimmt und nur eine Gleichung für H aufstellt, in welcher der Einfluss jeder einzelnen Belastung durch ein einzelnes Glied dargestellt ist. Wenn man in dieser Gleichung das eine Mal die positiven, das andere Mal die negativen Glieder fortlässt, so erhält man ebenfalls die beiden gesuchten Spannungen.

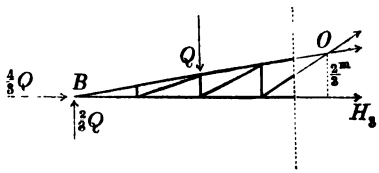
Fig. 147.



Wenn das 4m von der Wand entfernte Gewicht Q die einzige Belastung bildete, so würde in der Stange BC eine Spannung P entstehen, deren verticale Seitenkraft gleich $\frac{2}{3}Q$ ist (Fig. **147**); denn wenn man die Gleichung der statischen

Momente in Bezug auf den Drehpunkt A aufstellt, so findet man, dass die verticale Seitenkraft von P stets genau so wirkt wie der Gegendruck des Stützpunktes B wirken würde, wenn AB ein auf zwei Stützen frei aufliegender Balken wäre. Da die Längen AB und AC wie 6 zu 3 sich verhalten, so ist die horizontale Seitenkraft von P stets doppelt so gross als die verticale, in diesem Falle also $= \frac{1}{3} Q$. Hiernach erhält man aus Fig. 148 für die Spannung H_3 die Gleichung:

Fig. 148.



$$0 = -H_3 \cdot \tfrac{2}{3} - Q \cdot 2 + \tfrac{2}{3} Q \cdot 4 - \tfrac{1}{3} Q \cdot \tfrac{2}{3} \text{ oder}$$

$$H_3 \cdot \tfrac{2}{3} = -Q \left\{2 - \tfrac{2}{3} \cdot 4 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3}\right\}.$$

Der Beitrag, welchen die Belastung Q zu der Spannung H_3 liefert, setzt sich also aus drei Theilen zusammen, von denen der erste die directe Wirkung, die beiden anderen aber die mittelst der beiden Seitenkräfte von P ausgeübte indirecte Wirkung repräsentiren.

Wenn das Gewicht Q rechts von der Schnittstelle sich befände, so würde dagegen dieser Beitrag nur aus den zwei Theilen bestehen, welche den beiden Seitenkräften von P entsprechen, und man erhielte z. B. für den Beitrag eines 2^m von der Wand entfernten Gewichtes Q die Gleichung:

$$0 = -H_3 \cdot \tfrac{2}{3} + \frac{Q}{3} \cdot 4 - \tfrac{2}{3} Q \cdot \tfrac{2}{3} \text{ oder}$$

$$H_3 \cdot \tfrac{2}{3} = Q \left\{\tfrac{1}{3} \cdot 4 - \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3}\right\}.$$

Hiernach nimmt die der vollen Belastung sämmtlicher Belastungspunkte entsprechende Gleichung für H_3 die folgende Form an:

$$H_3 \cdot \tfrac{2}{3} = 800\,(\tfrac{1}{6} \cdot 4 - \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3}) + 800(\tfrac{1}{3} \cdot 4 - \tfrac{2}{3} \cdot \tfrac{2}{3}) + 800(\tfrac{1}{2} \cdot 4 - 1 \cdot \tfrac{2}{3} - 1)$$
$$- 800\,(2 - \tfrac{2}{3} \cdot 4 + \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{3}) - 800\,(3 - \tfrac{5}{6} \cdot 4 + \tfrac{5}{3} \cdot \tfrac{2}{3})$$
$$- 400\,(4 - 1 \cdot 4 + 2 \cdot \tfrac{2}{3}).$$

Lässt man die negativen Glieder auf der rechten Seite fort, so erhält man:

$$H_3 \text{ (max)} = + 2000 \text{ Kil.}$$

und lässt man das andere Mal die positiven Glieder weg, so erhält man:

$$H_3 \text{ (min)} = - 2000 \text{ Kil.}$$

Auf gleiche Weise erhält man für die übrigen horizontalen Stangen die Gleichungen:

$$H_1 \,.\, 1 = -800\,(1 - \tfrac{1}{6}\,.\,6 + \tfrac{1}{3}\,.\,1) - 800\,(2 - \tfrac{1}{3}\,.\,6 + \tfrac{2}{3}\,.\,1)$$
$$- 800\,(3 - \tfrac{1}{2}\,.\,6 + 1\,.\,1) - 800\,(4 - \tfrac{2}{3}\,.\,6 + \tfrac{4}{3}\,.\,1) - 800\,(5 - \tfrac{5}{6}\,.\,6 + \tfrac{5}{3}\,.\,1)$$
$$- 400\,(6 - 1\,.\,6 + 2\,.\,1)$$

$$H_1\,(\max) = 0, \quad H_1\,(\min) = -4800 \text{ Kil.}$$

$$H_2 \,.\, \tfrac{5}{6} = 800\,(\tfrac{1}{6}\,.\,5 - \tfrac{1}{3}\,.\,\tfrac{5}{6}) + 800\,(\tfrac{1}{3}\,.\,5 - \tfrac{2}{3}\,.\,\tfrac{5}{6} - 1)$$
$$- 800\,(2 - \tfrac{1}{2}\,.\,5 + 1\,.\,\tfrac{5}{6}) - 800\,(3 - \tfrac{2}{3}\,.\,5 + \tfrac{4}{3}\,.\,\tfrac{5}{6})$$
$$- 800\,(4 - \tfrac{5}{6}\,.\,5 + \tfrac{5}{3}\,.\,\tfrac{5}{6}) - 400\,(5 - 1\,.\,5 + 2\,.\,\tfrac{5}{6})$$

$$H_2\,(\max) = +640 \text{ Kil.}, \quad H_2\,(\min) = -3040 \text{ Kil.}$$

$$H_4 \,.\, \tfrac{1}{2} = 800\,(\tfrac{1}{6}\,.\,3 - \tfrac{1}{3}\,.\,\tfrac{1}{2}) + 800\,(\tfrac{1}{3}\,.\,3 - \tfrac{2}{3}\,.\,\tfrac{1}{2}) + 800\,(\tfrac{1}{2}\,.\,3 - 1\,.\,\tfrac{1}{2})$$
$$+ 800\,(\tfrac{2}{3}\,.\,3 - \tfrac{4}{3}\,.\,\tfrac{1}{2} - 1) - 800\,(2 - \tfrac{5}{6}\,.\,3 + \tfrac{5}{3}\,.\,\tfrac{1}{2})$$
$$- 400\,(3 - 1\,.\,3 + 2\,.\,\tfrac{1}{2})$$

$$H_4\,(\max) = +3733 \text{ Kil.}, \quad H_4\,(\min) = -1333 \text{ Kil.}$$

$$H_5 \,.\, \tfrac{1}{3} = 800\,(\tfrac{1}{6}\,.\,2 - \tfrac{1}{3}\,.\,\tfrac{1}{3}) + 800\,(\tfrac{1}{3}\,.\,2 - \tfrac{2}{3}\,.\,\tfrac{1}{3}) + 800\,(\tfrac{1}{2}\,.\,2 - 1\,.\,\tfrac{1}{3})$$
$$+ 800\,(\tfrac{2}{3}\,.\,2 - \tfrac{4}{3}\,.\,\tfrac{1}{3}) + 800\,(\tfrac{5}{6}\,.\,2 - \tfrac{5}{3}\,.\,\tfrac{1}{3} - 1) - 400\,(2 - 1\,.\,2 + 2\,.\,\tfrac{1}{3})$$

$$H_5\,(\max) = +5600 \text{ Kil.}, \quad H_5\,(\min) = -800 \text{ Kil.}$$

$$H_6 \,.\, \tfrac{1}{6} = 800\,(\tfrac{1}{6}\,.\,1 - \tfrac{1}{3}\,.\,\tfrac{1}{6}) + 800\,(\tfrac{1}{3}\,.\,1 - \tfrac{2}{3}\,.\,\tfrac{1}{6}) + 800\,(\tfrac{1}{2}\,.\,1 - 1\,.\,\tfrac{1}{6})$$
$$+ 800\,(\tfrac{2}{3}\,.\,1 - \tfrac{4}{3}\,.\,\tfrac{1}{6}) + 800\,(\tfrac{5}{6}\,.\,1 - \tfrac{5}{3}\,.\,\tfrac{1}{6}) - 400\,(1 - 1\,.\,1 + 2\,.\,\tfrac{1}{6})$$

$$H_6\,(\max) = +8000 \text{ Kil.}, \quad H_6\,(\min) = -800 \text{ Kil.}$$

Bei den übrigen Stangen fallen die Drehpunkte für die betreffenden Momenten-Gleichungen immer in die Horizontale $A\,B$, und ist daher die Möglichkeit ausgeschlossen, dass die stets nach dem Punkte A gerichtete Mittelkraft von dem Gewichte Q und der von demselben in der Zugstange $B\,C$ hervorgebrachten Zugkraft P das eine Mal **rechts**, das andere Mal **links** an dem betreffenden Drehpunkte vorbeigehe. Folglich werden bei sämmtlichen übrigen Stangen die (Zug- oder Druck-) Spannungen bei voller Belastung am grössten.

Die ganze Belastung beträgt 4800 Kil., und da der Schwerpunkt derselben über die Mitte von $A\,B$ liegt, so ist die verticale Seitenkraft von P bei voller Belastung $\frac{1}{2}\,.\,4800 = 2400$ Kil. Die horizontale Seitenkraft ist doppelt so gross, also $= 4800$ Kil. Die Mittelkraft von diesen beiden Kräften hat die Grösse:

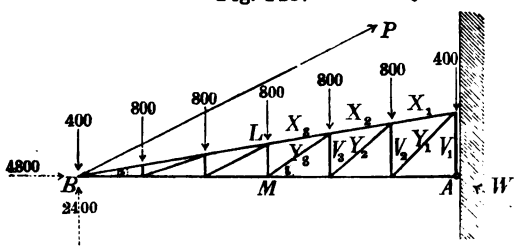
$$P = \sqrt{2400^2 + 4800^2} = 5367 \text{ Kil.}$$

und ist die grösste Zugspannung, welche in der Stange $B\,C$ überhaupt eintreten kann.

Nach Fig. **149** und Fig **150** hat der Hebelarm der Spannung X_3 in Bezug auf den Drehpunkt M die Grösse:

$$\overline{LM} \cdot \cos\alpha = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{6}{\sqrt{6^2+1^2}} = 0^m,4932.$$

Fig. 149.



Man erhält also nach Fig. **150** zur Bestimmung von X_3 die Gleichung:

$$0 = X_3 \cdot 0{,}4932 + 2400 \cdot 3 - 800\,(0+1+2+\tfrac{3}{2})$$

oder $$X_3 = -7299 \text{ Kil.}$$

Auf gleiche Weise ergeben sich für die übrigen Spannungen X die Gleichungen:

$0 = X_1 \cdot 0{,}822 + 2400 \cdot 5 - 800\,\{1+2+3+4+\tfrac{5}{2}\}$
$X_1 = -2433$ Kil.

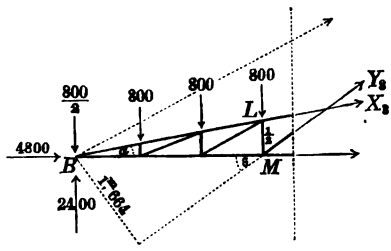
$0 = X_2 \cdot 0{,}6576 + 2400 \cdot 4 - 800\,\{1+2+3+\tfrac{4}{2}\}$
$X_2 = -4866$ Kil.

$0 = X_4 \cdot 0{,}3288 + 2400 \cdot 2 - 800\,\{1+\tfrac{2}{2}\}$
$X_4 = -9732$ Kil.

$0 = X_5 \cdot 0{,}1644 + 2400 \cdot 1 - 400 \cdot 1$
$X_5 = -12166$ Kil.

$0 = X_6 \cdot 0{,}1644 + 2400 \cdot 1 - 400 \cdot 1$
$X_6 = -12166$ Kil.

Fig. 150.



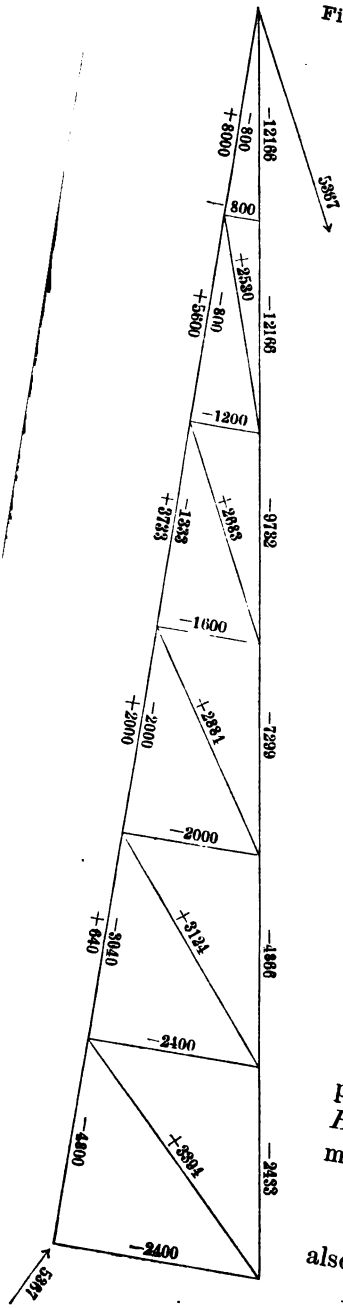
Bei den Momenten-Gleichungen für die Spannungen der Diagonalen ist der Punkt B als Drehpunkt zu wählen. Der Hebelarm der Kraft Y_3 in Bezug auf den Punkt B ist nach Fig. **150**:

$$\overline{BM} \cdot \sin\varepsilon = 3 \cdot \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1^2+(\frac{2}{3})^2}} = 1^m,664$$

Man erhält also für die Spannung Y_3 die Gleichung:

$$0 = -Y_3 \cdot 1{,}664 + 800\,(1+2+3), \quad Y_3 = +2884 \text{ Kil.}$$

Fig. 152.



Für die übrigen Diagonalen ergeben sich auf dieselbe Weise die folgenden Gleichungen:

$0 = - Y_1 \cdot 3{,}536 + 800\ (1+2+3+4+5)$,
$Y_1 = + 3394$ Kil.

$0 = - Y_2 \cdot 2{,}561 + 800\ (1+2+3+4)$,
$Y_2 = + 3124$ Kil.

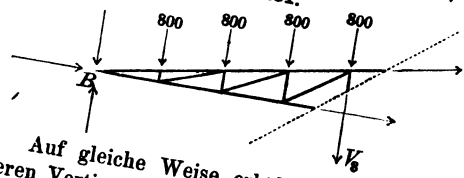
$0 = - Y_4 \cdot 0{,}89 + 800\ (1+2)$,
$Y_4 = + 2683$ Kil.

$0 = - Y_5 \cdot 0{,}316 + 800 \cdot 1$,
$Y_5 = + 2530$ Kil.

Bei den Momenten-Gleichungen für die Spannungen der Verticalstangen ist ebenfals der Punkt B als Drehpunkt zu wählen. Nach Fig. **151** erhält man für V_3 die Gleichung:

$0 = V_3 \cdot 4 + 800\ (4+3+2+1)$,
$V_3 = - 2000$ Kil.

Fig. 151.



Auf gleiche Weise erhält man für die anderen Verticalstangen die Gleichungen:

$0 = V_1 \cdot 6 + 800\ (\frac{6}{2}+5+4+3+2+1)$,
$V_1 = - 2400$ Kil.

$0 = V_2 \cdot 5 + 800\ (5+4+3+2+1)$,
$V_2 = - 2400$ Kil.

$0 = V_4 \cdot 3 + 800\ (3+2+1)$,
$V_4 = - 1600$ Kil.

$0 = V_5 \cdot 2 + 800\ (2+1)$,
$V_5 = - 1200$ Kil.

$0 = V_6 \cdot 1 + 800 \cdot 1$,
$V_6 = - 800$ Kil.

Der Gegendruck W des festen Stützpunktes A setzt sich aus den Seitenkräften H_1 und V_1 zusammen und hat im Maximum die Grösse:

$$W = \sqrt{H_1^2 + V_1^2} = \sqrt{4800^2 + 2400^2}$$
$$= 5367 \text{ Kil.}$$

also dieselbe Grösse wie die Zugspannung P.

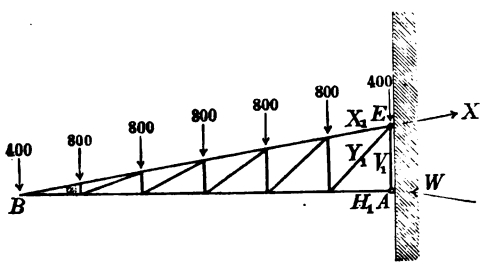
Die gefundenen Spannungszahlen sind in Fig. **152** zusammengestellt.

§ 20.

Perron-Dach ohne Hängestange.

Die Dimensionen und Belastungen der in Fig. **153** dargestellten Construction sind dieselben wie für den vorigen Fall in Fig. **144** angegeben. Statt des Punktes *B*, in welchem beim vorigen Falle das Dach durch die Hängestange *B C* unterstützt war, ist hier der Punkt *E* als zweiter Aufhängepunkt zu betrachten, und die an diesem Punkte befestigte Zugstange bildet die Verlängerung der Stangen *B E*, so dass dieselbe ganz in der Wand liegend von aussen nicht sichtbar ist.

Fig. 153.



Der Hebelarm der in dieser Zugstange hervorgebrachten Spannung *X* in Bezug auf den Drehpunkt *A* ist:

$$\overline{A\,E}\,.\,\cos\alpha = 1\,.\,\frac{6}{\sqrt{6^2+1^2}} = 0{,}9864.$$

Man erhält also für die Spannung *X* als Gleichung der statischen Momente:

$$0 = X\,.\,0{,}9864 - 800\left\{1+2+3+4+5+\tfrac{5}{2}\right\} \text{ oder}$$

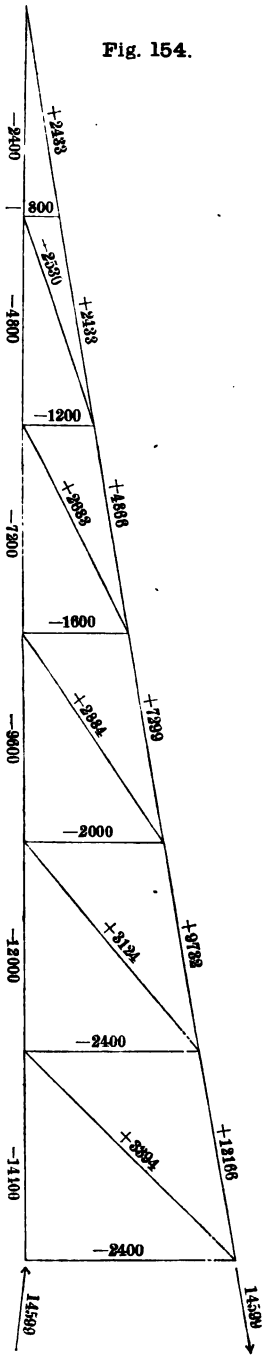
$$X = +\,14599 \text{ Kil.}$$

Zur Bestimmung der Spannungen $X_1 \ldots X_6$ können die betreffenden Gleichungen des vorigen Paragraphen benutzt werden, sobald darin die Kraft *P* und ihre Seitenkräfte überall gleich Null gesetzt werden. Man erhält dann die Gleichungen:

$0 = X_1\,.\,0{,}822 - 800\,(1+2+3+4+\tfrac{5}{2})$, $X_1 = +\,12166$ Kil.
$0 = X_2\,.\,0{,}6576 - 800\,(1+2+3+\tfrac{4}{2})$, $X_2 = +\,9732$ Kil.
$0 = X_3\,.\,0{,}4932 - 800\,(1+2+\tfrac{3}{2})$, $X_3 = +\,7299$ Kil.
$0 = X_4\,.\,0{,}3288 - 800\,(1+\tfrac{2}{2})$. $X_4 = +\,4866$ Kil.
$0 = X_5\,.\,0{,}1644 - 400\,.\,1$, $X_5 = +\,2433$ Kil.
$0 = X_6\,.\,0{,}1644 - 400\,.\,1$, $X_6 = +\,2433$ Kil.

In Betreff der Spannungen $H_1 \ldots H_6$ gilt dasselbe. Setzt man in den betreffenden Gleichungen des vorigen Paragraphen die

Fig. 154.



Seitenkräfte der Kraft P gleich Null, so erhält man die Gleichungen:

$$0 = -H_1 . 1 - 800(1+2+3+4+5+\tfrac{6}{2}),$$
$$H_1 = -14400 \text{ Kil.}$$
$$0 = -H_2 . \tfrac{5}{6} - 800\,(1+2+3+4+\tfrac{5}{2}),$$
$$H_2 = -12000 \text{ Kil.}$$
$$0 = -H_3 . \tfrac{2}{3} - 800\,(1+2+3+\tfrac{4}{2}),$$
$$H_3 = -9600 \text{ Kil.}$$
$$0 = -H_4 . \tfrac{1}{2} - 800\,(1+2+\tfrac{3}{2}),$$
$$H_4 = -7200 \text{ Kil.}$$
$$0 = -H_5 . \tfrac{1}{3} - 800\,(1+\tfrac{2}{2}),$$
$$H_5 = -4800 \text{ Kil.}$$
$$0 = -H_6 . \tfrac{1}{6} - 400 . 1,$$
$$H_6 = -2400 \text{ Kil.}$$

Für die Momenten-Gleichungen der Spannungen $V_1 \ldots V_6$ sowohl als der Spannungen $Y_1 \ldots Y_5$ würde — wie bei dem vorigen Beispiele — der Punkt B als Drehpunkt zu nehmen sein. Bei der vorigen Construction bildete der Punkt B zugleich den Angriffspunkt der Zugspannung P, welche mithin als durch den Drehpunkt hindurchgehend keinen Einfluss auf die Spannungen der Diagonal- und Vertical-Stangen haben konnte. Es bleiben daher die im vorigen Paragraphen für diese Stangen gefundenen Gleichungen in unveränderter Form auch für den gegenwärtigen Fall gültig.

Der Gegendruck W des festen Punktes A setzt sich aus den Seitenkräften V_1 und H_1 zusammen und hat die Grösse:

$$W = \sqrt{V_1^2 + H_1^2} = \sqrt{2400^2 + 14400^2}$$
$$= 14599 \text{ Kil.},$$

ist also eben so gross als die Zugkraft X.

Die Spannungszahlen der Stangen sind in Fig. **154** zusammengestellt.

Sechster Abschnitt.

§ 21.

Sprengwerkbrücke von 24m Spannweite.

Als mobile Last sind 4000k pro laufenden Meter für ein Gleis gerechnet, wovon auf jede der beiden Tragwände die Hälfte kommt. Da die Länge eines Feldes 3m beträgt, so kommen auf jeden Knotenpunkt 6000k oder 6 Tonnen (die Tonne zu 1000k gerechnet). Die permanente Belastung ist zu 1400k pro laufenden Meter veranschlagt oder zu 700k für jede der beiden Tragwände; das bringt 2100k oder in runder Summe 2 Tonnen für jeden Knotenpunkt.

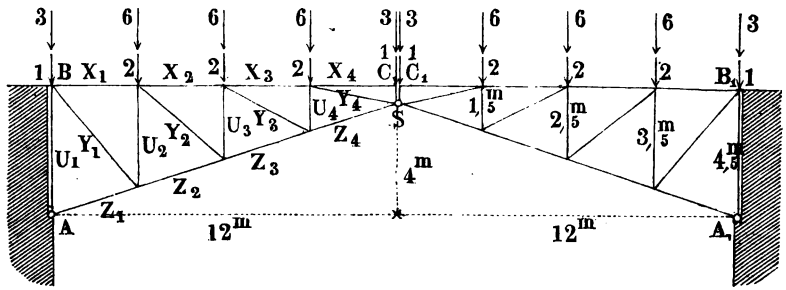
Um die stärksten Spannungen der einzelnen Stangen zu ermitteln, muss zunächst untersucht werden, welche Wirkung ein einzeln aufgelegtes Gewicht auf die gewichtlos gedachte Brücke ausübt.

Die beiden Brückenhälften berühren einander ausschliesslich an der Stelle S (s. Fig. **155**) und sind daselbst durch einen Gelenkbolzen mit einander verbunden.*) Wenn an irgend einer Stelle auf der rechts liegenden Hälfte ein Gewicht Q aufgelegt wird, so erzeugt dasselbe in dem Scheitelpunkte S einen Druck R zwischen den beiden Hälften. Dieser Druck muss für die linke

*) Eine rationellere Constructionsform würde diejenige sein, bei welcher die horizontale Fahrbahnlinie durch den Scheitelpunkt S hindurch geht. Nur der grösseren Allgemeinheit wegen, weil in manchen Fällen — z. B. bei Holz-Constructionen — die Darstellung dieser Form mit Schwierigkeiten verbunden sein würde, ist hier die obige Form gewählt worden, aus welcher man die eben erwähnte leicht als speciellen Fall ableiten kann, indem man die Dimension $SC = 0$ (statt $= 0{,}5$) setzt.

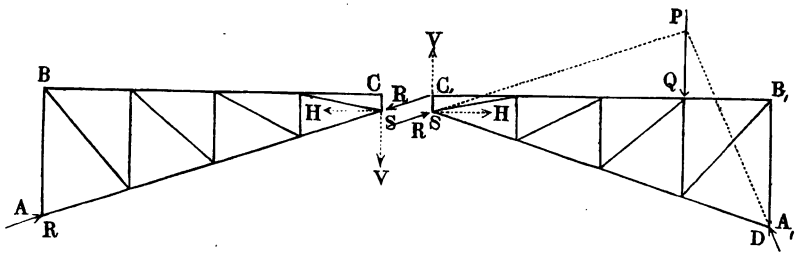
Hälfte die Richtung SA haben, d. h. durch den Punkt A hindurchgehen, denn sonst würde derselbe eine Drehung um diesen

Fig. 155.



Punkt hervorbringen. In dem Punkte A entsteht ein Gegendruck R, welcher in der Richtung von A nach S wirken muss, weil derselbe sonst das Stück AS um den Punkt S drehen würde. Auf die andere Hälfte wirkt im Scheitelpunkte der Druck R in der Richtung von A nach S; denn Druck und Gegendruck haben stets gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung. Denkt man sich den Durchschnittspunkt P der beiden Kräfte R und Q als Drehpunkt für diese rechte Hälfte (s. Fig. **156**), so erkennt man

Fig. 156.



leicht, dass der in dem Auflagerpunkte A_1 erzeugte Gegendruck D nothwendig die Richtung nach dem Punkte P hin haben muss, weil derselbe sonst eine Drehung um diesen Punkt herum hervorbringen würde. Dieser Druck D ist — weil die Kräfte R und Q mit ihm zusammen das Stück im Gleichgewicht halten — der Grösse nach gleich der Mittelkraft von R und Q, der Richtung nach entgegengesetzt.

Um also für irgend eine Belastung Q der einen Hälfte die Richtungen beider dadurch erzeugten Auflagerdrücke zu bestimmen,

zieht man von dem jenseitigen Auflagerpunkte eine Linie nach dem Scheitelpunkte, verlängert dieselbe bis zu der Verticalen des Belastungspunktes und zieht von der Durchschnittsstelle eine Linie nach dem anderen Punkte. Der Scheiteldruck hat für die unbelastete Hälfte immer die Richtung nach dem Auflagerpunkte hin.

Die Grösse des Scheiteldrucks R wird bestimmt, indem man sich denselben in verticale und horizontale Seitenkraft zerlegt denkt und die Gleichung der statischen Momente aufstellt für jede der beiden Hälften in Beziehung auf ihren Auflagerpunkt. So z. B. erhält man für die Seitenkräfte V und H des von dem Gewichte Q hervorgebrachten Scheiteldrucks die Gleichungen:

$$0 = V \,.\, 12 + H \,.\, 4 - Q \,.\, 3$$
$$0 = V \,.\, 12 - H \,.\, 4,$$

welche, wenn man sie einmal addirt und einmal subtrahirt, für V und H die Werthe ergeben:

$$V = \frac{Q}{8}, \qquad H = \tfrac{3}{8} Q.$$

Nachdem auf diese Weise die Wirkung bestimmt ist, welche durch irgend eine einzelne Belastung auf das **Ganze** ausgeübt wird, kommt es nun ferner darauf an, zu untersuchen, welchen Einfluss dieselbe auf die Spannung einer bestimmten Stange ausübt. Dies geschieht, indem man einen Schnitt durch die Stange hindurch legt, welcher höchstens drei Stangen trifft und für das zwischen diesem Schnitt und der Scheitelfuge liegende Stück die Gleichung der statischen Momente aufstellt. Als Drehpunkt wählt man wie früher den Druchschnittspunkt der beiden mit durchschnittenen Stangen. An der Drehungsrichtung der Kraft, welche durch irgend eine Belastung auf dieses Stück ausgeübt wird, erkennt man dann, ob dieselbe Zug- oder Druckspannung in der Stange hervorbringt, und kann somit diejenigen Belastungsstellen, denen Zugspannung entspricht, unterscheiden von denen, welchen Druckspannung entspricht. Das Maximum der Spannung erhält man, wenn man alle die ersteren, das Minimum, wenn man alle die letzteren belastet annimmt.

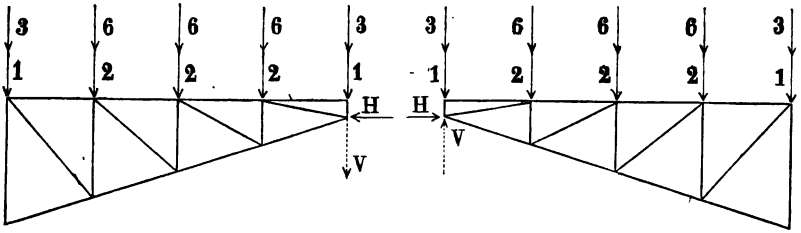
Berechnung der Spannungen X in den horizontalen Stangen.

Als Drehpunkt ist allemal der Fusspunkt der Diagonale zu wählen. Jede Belastung der linken Hälfte erzeugt einen Scheitel-

druck in der Richtung von A_1 nach S hin, der sowohl für sich allein als auch mit dem Gewichte zu einer Mittelkraft zusammengesetzt eine Kraft liefert, welche um diesen Punkt **links** herum dreht. Die Kraft X dreht auch allemal links herum, erhält also durch jede solche Belastung einen negativen Werth.

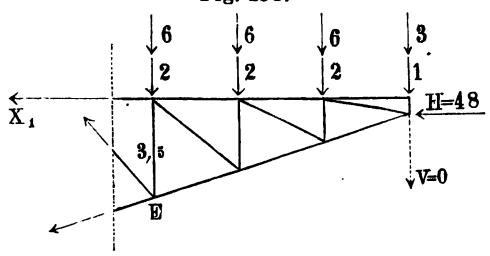
Jede Belastung der rechten Hälfte erzeugt für die linke Seite einen Scheiteldruck, der durch den Drehpunkt selbst hindurch-

Fig. 157.



geht, hat also gar keinen Einfluss. Es kann daher in Betreff der Spannungen X nur von Druckspannungen die Rede sein. Um die stärkste Druckspannung oder das Minimum zu bekommen, hat man diejenige Hälfte, welcher das Stück angehört, voll belastet anzunehmen; die andere Hälfte kann man belastet oder unbelastet annehmen — beides führt zu demselben Resultate —. Nimmt man der Einfachheit wegen beide Hälften voll belastet an, so ergeben sich für den Scheiteldruck die Gleichungen (s. Fig. **157**):

Fig. 158.



$$0 = V \,.\, 12 + H \,.\, 4 - 4 \,.\, 12 - 8\,(9 + 6 + 3)$$
$$0 = V \,.\, 12 - H \,.\, 4 + 4 \,.\, 12 + 8\,(9 + 6 + 3)$$
$$V = 0 \qquad\qquad H = 48.$$

Hiernach erhält man zur Bestimmung von X_1 als Momenten-Gleichung für das Stück Fig. **158** in Beziehung auf den Punkt E als Drehpunkt:

$$0 = - X_1 \,.\, 3{,}5 - 48 \,.\, 3 + 8\,(3 + 6) + 4 \,.\, 9$$
$$X_1\,(\min) = - 10{,}29 \text{ T.}$$

Auf gleiche Weise erhält man für die übrigen horizontalen Stangen die Gleichungen:

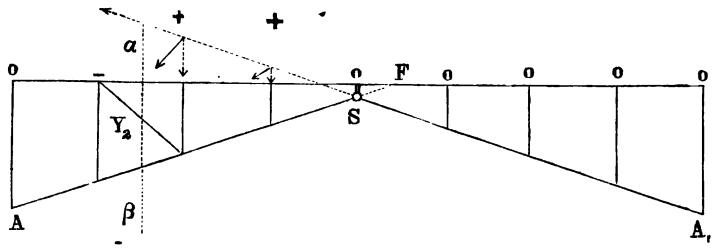
$$0 = -X_2 \cdot 2{,}5 - 48 \cdot 2 + 8 \cdot 3 + 4 \cdot 6$$
$$X_2 \text{ (min)} = -19{,}2 \text{ T.}$$
$$0 = -X_3 \cdot 1{,}5 - 48 \cdot 1 + 4 \cdot 3$$
$$X_3 \text{ (min)} = -24 \text{ T}$$
$$0 = -X_4 \cdot 0{,}5$$
$$X_4 = 0.$$

Bestimmung der Spannungen Y in den Diagonalen.

Die Diagonale Y_2 soll als Beispiel gewählt werden, um die Berechnungsweise daran zu erklären. Man kann die Belastungspunkte in drei Gruppen zerlegen: eine, deren Belastungen die Spannung Y_2 positiv zu machen streben, eine zweite, deren Belastungen dieselbe negativ zu machen streben, und eine dritte, deren Belastungen gar keinen Einfluss auf dieselbe haben, also für sich allein die Spannung 0 hervorbringen würden.

In Fig. **159** ist dieses Verhalten der verschiedenen Belastungs-

Fig. 159.



stellen zu der Spannung Y_2 durch die übergeschriebenen Zeichen +, —, 0 kenntlich gemacht.

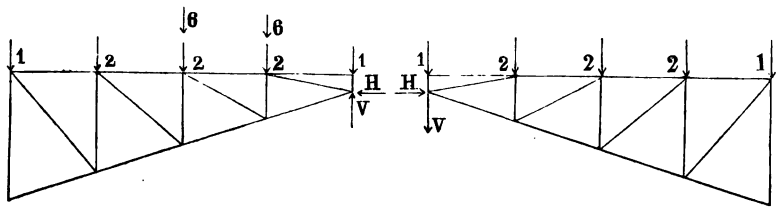
Zu der ersten Gruppe gehören der dritte und vierte Punkt, denn ihre Belastungen geben mit den durch sie hervorgebrachten Scheiteldrücken Mittelkräfte, welche das zwischen der Scheitelfuge und dem Verticalschnitt $\alpha\ \beta$ liegende Stück in Bezug auf den Drehpunkt F links herum zu drehen streben. Die Kraft Y_2 hat entgegengesetzte Drehungsrichtung (vergl. Fig. **161**), würde also durch diese Belastungen für sich allein positiv gemacht werden.

Zu der zweiten Gruppe gehört allein der zweite Punkt, dessen Belastung einen Scheiteldruck hervorbringt, welcher in der Rich-

tung von A_1 nach S auf das betreffende Stück wirkt. Dieser Druck wirkt in Beziehung auf den Drehpunkt F rechts drehend, macht also für sich allein die Spannung Y_2 negativ.

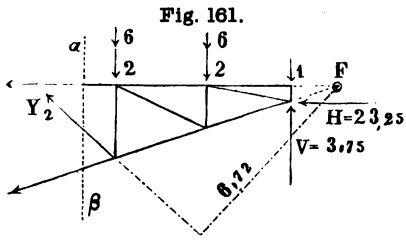
Die dritte Gruppe umfasst alle übrigen Punkte, denn ihre Belastungen erzeugen entweder gar keinen Scheiteldruck (1ster und 9ter Punkt) und haben **deshalb** keine Wirkung auf das Stück,

Fig. 160.



oder ihre Wirkung auf das Stück besteht in einem Scheiteldruck, welcher in der Richtung von S nach A wirkt, also durch den Drehpunkt F hindurchgeht.

Fig. 161.



Um Y_2 (max) zu bestimmen, hat man also den dritten und vierten Punkt belastet anzunehmen, den zweiten aber unbelastet. (In Betreff der übrigen ist es gleichgültig, ob sie belastet oder unbelastet angenommen werden, sie sollen hier unbelastet angenommen werden.) Für diesen Belastungszustand ergeben sich die Seitenkräfte des Scheiteldrucks aus den Gleichungen (s. Fig. **160**):

$$0 = -V \cdot 12 + H \cdot 4 - 1 \cdot 12 - 2\,(9 + 6 + 3)$$

$$0 = -V \cdot 12 - H \cdot 4 + 1 \cdot 12 + 2\,(9 + 6 + 3) + 6\,(9 + 6)$$

$$V = 3{,}75 \qquad H = 23{,}25.$$

Hiernach findet man aus der Momenten-Gleichung für das Stück Fig. **161** in Beziehung auf den Punkt F:

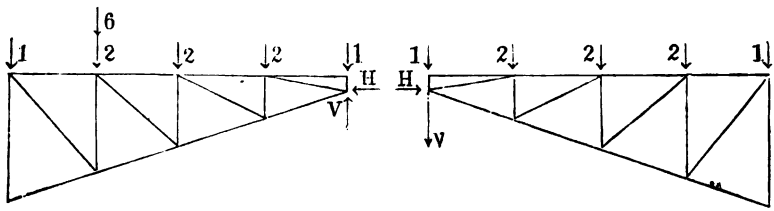
$$0 = Y_2 \cdot 6{,}72 + 23{,}25 \cdot 0{,}5 + 3{,}75 \cdot 1{,}5 - 1 \cdot 1{,}5 - 8\,(4{,}5 + 7{,}5)$$

$$Y_2\,(\max) = +\,11{,}94\ \text{T}.$$

Um Y_2 (min) zu bestimmen, müssen der dritte und vierte Punkt unbelastet, der zweite belastet angenommen werden (die übrigen indifferenten Punkte sollen ebenfalls unbelastet angenommen

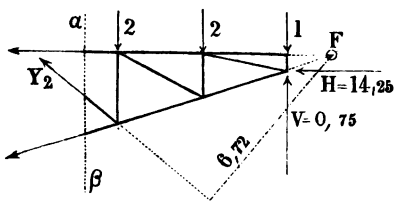
werden). Die Seitenkräfte des Scheiteldrucks für diesen Belastungszustand ergeben sich aus den Gleichungen (s. Fig. **162**):

Fig. 162.



$$0 = -V \cdot 12 + H \cdot 4 - 1 \cdot 12 - 2\,(9 + 6 + 3)$$
$$0 = -V \cdot 12 - H \cdot 4 + 1 \cdot 12 + 2\,(9 + 6 + 3) + 6 \cdot 3$$
$$V = 0{,}75 \qquad H = 14{,}25.$$

Fig. 163.



Als Momenten-Gleichung des Stücks, Fig. **163** erhält man dann:

$$0 = Y_2 \cdot 6{,}72 + 0{,}75 \cdot 1{,}5 + 14{,}25 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 1{,}5 - 2 \cdot (4{,}5 + 7{,}5)$$
$$Y_2\,(\min) = +\,2{,}57\ \text{T}.$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die drei anderen Y folgende Gleichungen:

Y_1 (max).

Bei voller Belastung wird $V = 0$ und $H = 48$, also:

$$0 = Y_1 \cdot 10{,}25 + 48 \cdot 0{,}5 - 4 \cdot 1{,}5 - 8\,(4{,}5 + 7{,}5 + 10{,}5)$$
$$Y_1\,(\max) = +\,15{,}8\ \text{T}.$$

Y_1 (min) bleibt unberücksichtigt, weil durch keine Belastungsweise Druckspannung in dieser Diagonale hervorgebracht werden kann.

Y_3 (max).

Der vierte Punkt allein ist belastet anzunehmen, dann wird:

$$V = 2{,}25 \qquad H = 18{,}75$$
$$0 = Y_3 \cdot 3{,}35 + 2{,}25 \cdot 1{,}5 + 18{,}75 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 1{,}5 - 8 \cdot 4{,}5$$
$$Y_3\,(\max) = +\,7{,}39\ \text{T}.$$

Y_3 (min).

Wenn die Punkte 2 und 3 allein belastet sind, wird:

$$V = 2{,}25 \qquad H = 18{,}75$$
$$0 = Y_3 \,.\, 3{,}35 + 2{,}25 \,.\, 1{,}5 + 18{,}75 \,.\, 0{,}5 - 1 \,.\, 1{,}5 - 2 \,.\, 4{,}5$$
$$Y_3 \text{ (min)} = -0{,}67 \text{ T.}$$

Y_4.

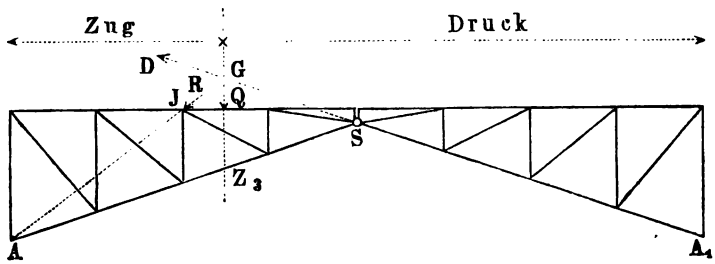
Das Maximum bleibt unberücksichtigt, weil durch keine Belastungsweise Zugspannung in dieser Diagonale hervorgebracht werden kann. Um das Minimum zu erhalten, sind die Punkte 2, 3, 4 allein belastet anzunehmen, dann wird:

$$V = 4{,}5 \qquad H = 25{,}5$$
$$0 = Y_4 \,.\, 0{,}738 + 4{,}5 \,.\, 1{,}5 + 25{,}5 \,.\, 0{,}5 - 1 \,.\, 1{,}5$$
$$Y_4 \text{ (min)} = -24{,}4 \text{ T.}$$

Berechnung der Spannungen Z in den unteren Stangen.

Das Stück Z_3 soll als Beispiel dienen, um die Berechnungsweise daran zu erklären. Für die Momenten-Gleichung von Z_3 wird der Punkt J den Drehpunkt bilden. Verlängert man die Richtungen AJ und $A_1 S$ bis zu ihrem Durchschnittspunkt G (s. Fig. **164**) und legt durch diesen Punkt eine Verticale, so erhält

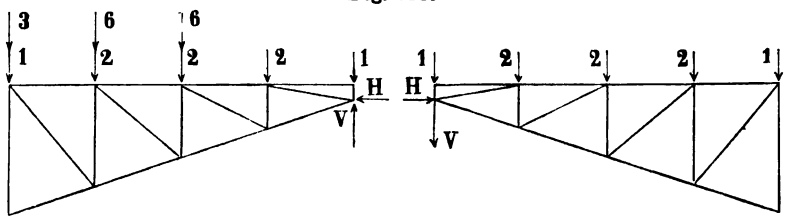
Fig. 164.



man die Stelle, wo ein Gewicht aufgelegt werden muss, wenn es in dem Stücke Z_3 gar keine Wirkung hervorbringen soll. Denn ein Gewicht Q an dieser Stelle giebt in Verbindung mit dem dadurch hervorgebrachten Scheiteldruck D eine Mittelkraft R, welche gerade durch den Drehpunkt J hindurchgeht. Jede Belastung rechts von dieser Verticalen erzeugt Druckspannung, weil sie für das Stück, dessen Momenten-Gleichung zur Bestimmung von Z_3 dienen wird, eine Kraft liefert, welche um den Punkt J rechts herumdreht (vergl. Fig. **166**); Z_3 dreht auch rechts herum, wird dadurch also negativ gemacht. Jede Belastung links von der Verticalen erzeugt dagegen für das betreffende Stück eine

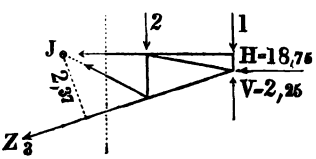
links um den Punkt J herumdrehende Kraft, macht Z_3 also positiv. Jene Verticale bildet folglich die Belastungsgrenze, welche alle diejenigen Punkte, deren Belastungen Druckspannung erzeugen, scheidet von denjenigen, deren Belastungen Zugspannung erzeugen. Um als Z_3 (max) zu bekommen, hat man den Scheiteldruck aus Fig. **165** zu bestimmen:

Fig. 165.



$$0 = -V.12 + H.4 - 1.12 - 2(9+6+3)$$
$$0 = -V.12 - H.4 + 1.12 + 2(9+6+3) + 6(6+3)$$
$$V = 2{,}25 \qquad H = 18{,}75,$$

Fig. 166.

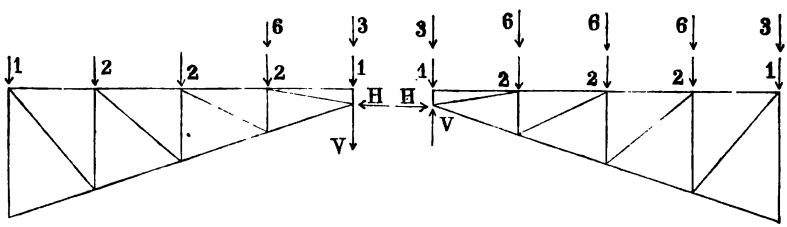


worauf dann Fig. **166** die Momenten-Gleichung für Z_3 (max) liefert:

$$0 = Z_3 . 2{,}37 - 2{,}25 . 6 + 18{,}75 . 0{,}5 + 1 . 6 + 2 . 3$$
$$Z_3 \text{ (max)} = -3{,}32 \text{ T.}$$

Um Z_3 (min) zu berechnen, ist der Scheiteldruck nach Fig. **167** zu bestimmen:

Fig. 167.



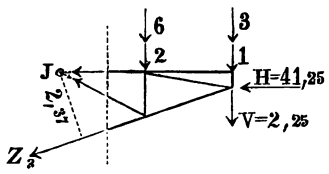
$$0 = V.12 + H.4 - 1.12 - 2(9+6+3) - 3.12 - 6(9+6+3)$$
$$0 = V.12 - H.4 + 1.12 + 2(9+6+3) + 3.12 + 6.9$$
$$V = 2{,}25 \qquad H = 41{,}25$$

und die Momenten-Gleichung nach Fig. **168** zu bilden:

$$0 = Z_3 \,.\, 2{,}37 + 2{,}25 \,.\, 6 + 41{,}25 \,.\, 0{,}5 + 4 \,.\, 6 + 8 \,.\, 3$$

$$Z_3\,(\min) = -\,34{,}6 \text{ T.}$$

Fig. 168.



Auf ähnliche Weise erhält man für die übrigen Grössen Z die folgenden Gleichungen:

Z_1.

Die Belastungsgrenze fällt mit dem ersten Punkt zusammen. Also kann nur von dem Minimum die Rede sein, welches bei voller Belastung eintritt. Für diese ergiebt sich:

$$V = 0 \qquad H = 48$$

$$0 = Z_1 \,.\, 4{,}27 + 48 \,.\, 0{,}5 + 4 \,.\, 12 + 8\,(9 + 6 + 3)$$

$$Z_1\,(\min) = -\,50{,}6 \text{ T.}$$

Z_2.

(Belastungsgrenze zwischen den Punkten 2 und 3.)

Für das Maximum ist: $V = 0{,}75$; $H = 14{,}25$

$$0 = Z_2 \,.\, 3{,}32 - 0{,}75 \,.\, 9 + 14{,}25 \,.\, 0{,}5 + 1 \,.\, 9 + 2\,(6 + 3)$$

$$Z_2\,(\max) = -\,8{,}25 \text{ T.}$$

Für das Minimum ist: $V = 0{,}75$; $H = 45{,}75$

$$0 = Z_2 \,.\, 3{,}32 + 0{,}75 \,.\, 9 + 45{,}75 \,.\, 0{,}5 + 4 \,.\, 9 + 8\,(6 + 3)$$

$$Z_2\,(\min) = -\,41{,}45 \text{ T.}$$

Z_4.

(Belastungsgrenze zwischen den Punkten 4 und 5.)

Für das Maximum ist: $V = 4{,}5$; $H = 25{,}5$

$$0 = Z_4 \,.\, 1{,}423 - 4{,}5 \,.\, 3 + 25{,}5 \,.\, 0{,}5 + 1 \,.\, 3$$

$$Z_4\,(\max) = -\,1{,}58 \text{ T.}$$

Für das Minimum ist: $V = 4{,}5$; $H = 34{,}5$

$$0 = Z_4 \,.\, 1{,}423 + 4{,}5 \,.\, 3 + 34{,}5 \,.\, 0{,}5 + 4 \,.\, 3$$

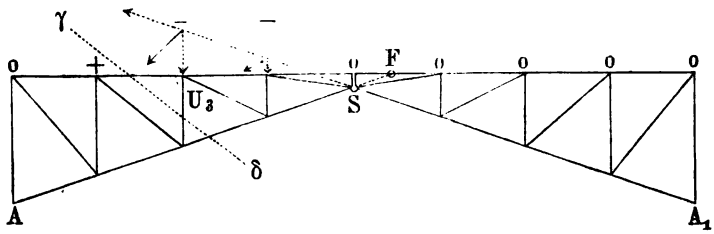
$$Z_4\,(\min) = -\,30{,}0 \text{ T.}$$

Berechnung der Spannungen U in den verticalen Stangen.

Die Stange U_3 soll als Beispiel gewählt werden, um die Berechnungsweise daran zu erläutern. Der Schnitt ist in der Richtung $\gamma\,\delta$ zu führen und der Punkt F (derselbe, welcher zur Bestimmung der Grössen Y als Drehpunkt diente) bildet den Drehpunkt für die Momenten-Gleichung. Auch hier zerfallen die Belastungspunkte hinsichtlich ihrer Bedeutung für die Stange U_3

in drei Gruppen, welche in Fig. **169** durch die übergeschriebenen Zeichen +, —, 0 kenntlich gemacht sind. Um das Maximum

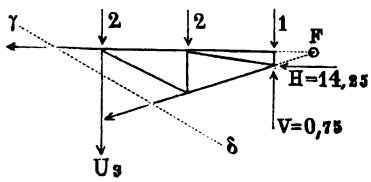
Fig. 169.



von U_3 zu finden, ist allein der 2te Punkt belastet anzunehmen und der Scheiteldruck nach Fig. **162** zu bestimmen. Man erhält (wie für diesen Belastungszustand dort schon gefunden wurde):

$$V = 0{,}75 \qquad H = 14{,}25.$$

Fig. 170.



Die Momenten-Gleichung für U_3 (max) ergiebt sich aus Fig. **170**:

$$0 = -U_3 \cdot 7{,}5 + 0{,}75 \cdot 1{,}5 + 14{,}25 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 1{,}5 - 2\,(4{,}5 + 7{,}5)$$

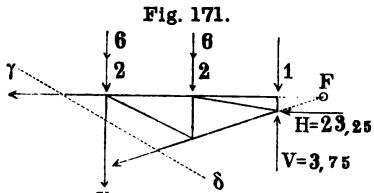
$$U_3\,(\max) = -2{,}3\ \text{T.}$$

Um U_3 (min) zu bestimmen, sind der 3te und 4te Punkt belastet anzunehmen und für den Scheiteldruck die für diesen Belastungszustand aus Fig. **160** schon berechneten Werthe

$$V = 3{,}75 \qquad H = 23{,}25$$

in Rechnung zu bringen. Man erhält dann aus Fig. **171** für U_3 (min) die Momenten-Gleichung:

Fig. 171.



$$0 = -U_3 \cdot 7{,}5 + 3{,}75 \cdot 1{,}5 + 23{,}25 \cdot 0{,}5 - 1 \cdot 1{,}5 - 8\,(4{,}5 + 7{,}5)$$

$$U_3\,(\min) = -10{,}7\ \text{T.}$$

Auf ähnliche Weise sind die übrigen Grössen U berechnet wie folgt:

U_1.

U_1 (max) bleibt unberücksichtigt, weil durch keine Belastungsweise Zugspannung in diesem Stück hervorgebracht werden kann.

U_1 (min) kann für volle Belastung berechnet werden, also $V = 0$, $H = 48$ und:

$$0 = -U_1 . 13{,}5 + 48 . 0{,}5 - 4 . 1{,}5 - 8\,(4{,}5 + 7{,}5 + 10{,}5) - 4 . 13{,}5$$
$$U_1\,(\min) = -16{,}0\ \text{T.}$$

U_2.

Auch hier ist das Maximum unberücksichtigt zu lassen. Das Minimum kann für volle Belastung berechnet werden, also:

$$V = 0 \qquad H = 48$$
$$0 = -U_2 . 10{,}5 + 48 . 0{,}5 - 4 . 1{,}5 - 8\,(4{,}5 + 7{,}5 + 10{,}5)$$
$$U_2\,(\min) = -15{,}4\ \text{T.}$$

U_4.

Das Maximum findet statt, wenn die Punkte 2 und 3 belastet sind und der Punkt 4 unbelastet. Dann ist:

$$V = 2{,}25 \qquad H = 18{,}75$$
$$0 = -U_4 . 4{,}5 + 2{,}25 . 1{,}5 + 18{,}75 . 0{,}5 - 1 . 1{,}5 - 2 . 4{,}5$$
$$U_4\,(\max) = +0{,}5\ \text{T.}$$

Das Minimum tritt ein, wenn der Punkt 4 belastet, 2 und 3 unbelastet sind, wobei:

$$V = 2{,}25 \qquad H = 18{,}75$$
$$0 = -U_4 . 4{,}5 + 2{,}25 . 1{,}5 + 18{,}75 . 0{,}5 - 1 . 1{,}5 - 8 . 4{,}5$$
$$U_4\,(\min) = -5{,}5\ \text{T.}$$

U_5.

Der fünfte Verticalständer ist durch die Scheitelfuge halbirt, und jede der beiden Hälften kann höchstens 4 Tonnen Druckspannung annehmen. Denn der Kopf des Verticalständers ist nur mit horizontalen Stangen in Berührung und die einzigen Verticalkräfte, welche daselbst angreifen, sind also die directen Belastungen dieser Stelle, welche für jede Hälfte nicht mehr als 4 Tonnen betragen können. Also:

$$U_5\,(\min) = -4\ \text{T.}$$

Die Resultate sind in Fig. 172 zusammengestellt.

Fig. 172.

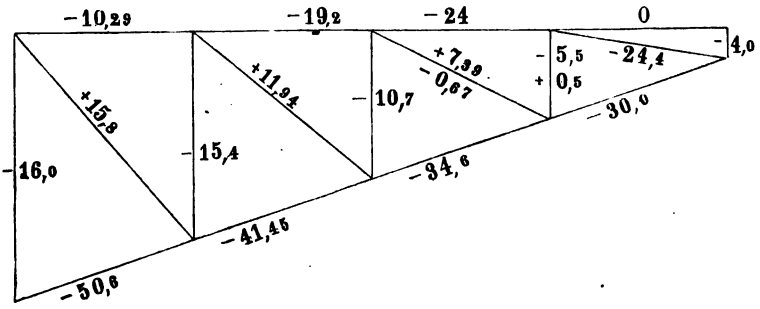
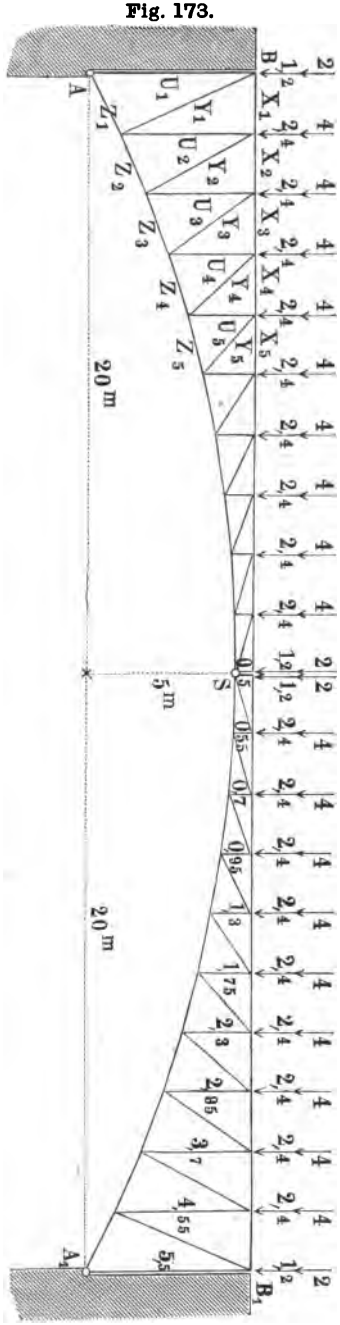


Fig. 173.



§ 22.

Bogenbrücke von 40m Spannweite.

(Theissbrücke bei Szegedin.)*)

Als permanente Last sind 2400k, als mobile Last 4000k pro laufenden Meter für ein Gleis gerechnet, wovon auf jede der zwei Tragwände die Hälfte kommt. Da die Länge eines Feldes 2m beträgt, so sind für jeden Knotenpunkt 2400k permanente Last und 4000k mobile Last in Rechnung zu bringen, oder (die Tonne zu 1000k gerechnet) 2,4 Tonnen permanente und 4 Tonnen mobile Last. Die beiden Brückenhälften berühren einander ausschliesslich an der Stelle S und sind daselbst durch ein Scharnier mit einander verbunden. Im Uebrigen sind Constructionsform und Dimensionen aus Fig. **173** zu entnehmen.

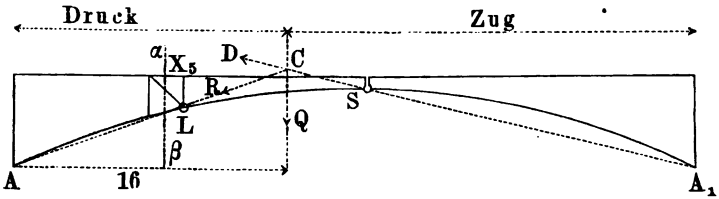
Berechnung der Spannungen X in den horizontalen Stangen.

Das Stück X_3 soll als Beispiel gewählt werden, um die Methode

*) Abgesehen von dem Scharnier in der Mitte, dessen Bedeutung später in der „Theorie der Bogenbrücken“ erklärt werden wird, und von der Abrundung einiger Maasszahlen stimmt die hier berechnete Construction mit der Theissbrücke überein. Dass die Diagonalen der Mittelfelder bei der Theissbrücke zu Blechwänden ausgedehnt sind, welche die ganze Fläche des Feldes ausfüllen, kann kaum als eine Abweichung im Constructionsprincip bezeichnet werden.

der Berechnung daran zu erläutern. Man hat zunächst zu untersuchen, welche Belastungen Zugspannung und welche Belastungen Druckspannung in diesem Stücke hervorbringen. Zu diesem Zwecke ist diejenige Stelle aufzusuchen, an welcher ein Gewicht liegen muss, um gar keine Wirkung auf das Stück auszuüben, denn sie bildet die Grenze. Man findet diese Stelle, indem man die Richtungen AL und $A_1 S$ bis zu ihrem Durchschnittspunkt C verlängert (s. Fig. **174**), denn ein an dieser Stelle aufgelegtes Ge-

Fig. 174.



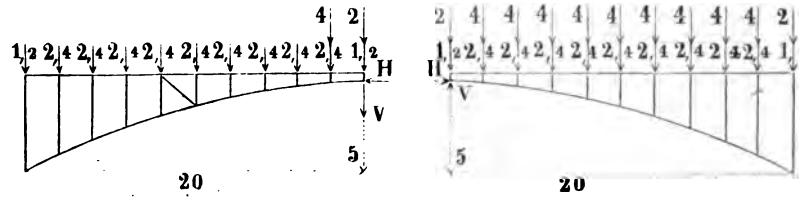
wicht Q erzeugt einen Scheiteldruck D, welcher in der Richtung $A_1 S$ wirkt (da er als Gegendruck für die andere Hälfte durch den Punkt A_1 gehen muss, um dieselbe nicht zu drehen) und giebt mit diesem zusammen eine Mittelkraft R, die nach dem Auflagerpunkte A gerichtet sein muss (weil sonst diese Hälfte um den Punkt A gedreht werden würde), also der Construction nach auch durch den Punkt L hindurchgeht. Da nun der Punkt L für die nachher zur Bestimmung von X_5 aufzustellende Momenten-Gleichung des zwischen der Scheitelfuge und dem Schnitt $\alpha\beta$ liegenden Stücks (vergl. Fig. **176**) als Drehpunkt dienen wird, so hat das Gewicht an dieser Stelle gar keinen Einfluss auf die Spannung X_5. Jede Belastung rechts von der durch den Punkt C gelegten Verticalen erzeugt für das Stück SL eine Kraft, welche unterhalb des Punktes L vorbeigeht, d. h. rechts drehend wirkt; Y_5 dreht links herum, wird also positiv gemacht durch eine solche Kraft.

Ein Gewicht links von jener Verticalen aber wirkt entgegengesetzt, entweder dadurch, dass die erzeugte Mittelkraft R oberhalb des Punktes L vorbeigeht oder — wenn das Gewicht ausserhalb des Schnitts $\alpha\beta$ liegt — dass der von ihm hervorgebrachte Scheiteldruck für sich allein eine solche links drehende Kraft bildet. Jene durch den Punkt C gelegte Verticale bildet also die Belastungsscheide, welche die ganze Brücke in zwei Abtheilungen scheidet, von denen die rechtsliegende belastet sein muss,

wenn X_5 ein Maximum, die linke, wenn X_5 ein Minimum werden soll.

Für das Stück X_5 fällt diese Belastungsscheide in die Entfernung 16^m vom linken Auflager, also gerade mit dem Verticalständer U_9 zusammen.*) Um also X_5 (max) zu bestimmen, sind die Punkte 10, 11, 12 ... 21 belastet, die übrigen unbelastet anzunehmen und für diesen Belastungszustand die beiden Seitenkräfte des Scheiteldrucks zu bestimmen. Aus Fig. **175** erhält man die beiden Momenten-Gleichungen:

Fig. 175.



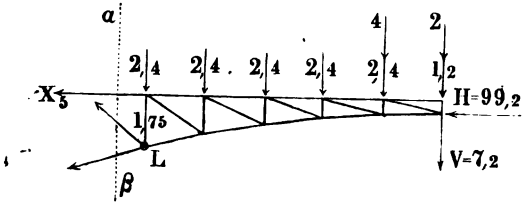
$$0 = V \,.\, 20 + H \,.\, 5 - 2{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + 16 + \ldots + 4 + 2) - 4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + 16 + \ldots + 4 + 2)$$

$$0 = V \,.\, 20 - H \,.\, 5 + 2{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + 16 + \ldots + 4 + 2) + 4\,(\tfrac{20}{2} + 18),$$

welche, wenn man sie einmal addirt und einmal von einander subtrahirt, die Werthe ergeben:

$V = 7{,}2 \quad H = 99{,}2.$

Fig. 176.



Man erhält dann aus Fig. **176** als Momenten-Gleichung in Beziehung auf den Drehpunkt L:

$$0 = -X_5 \,.\, 1{,}75 - 99{,}2 \,.\, 1{,}25 + 7{,}2 \,.\, 10 + 2{,}4\,(\tfrac{10}{2} + 8 + 6 + 4 + 2) + 4\,(\tfrac{10}{2} + 8)$$

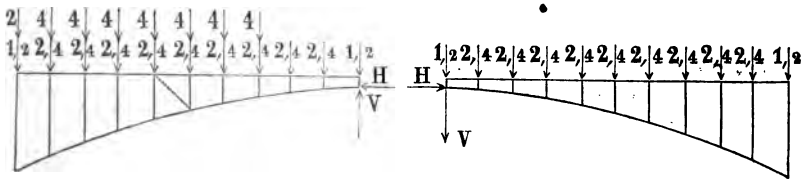
$$X_5\,(\max) = +\,34{,}29\ \mathrm{T}.$$

Um X_5 (min) zu bestimmen, hat man die Seitenkräfte des Scheiteldrucks für den in Fig. **177** dargestellten Belastungszustand zu berechnen:

*) Die Bestimmung der Drehpunkte und Belastungsscheiden auf dem Wege der **Rechnung** findet man im 11. Abschnitte dieses Buches.

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5 - 2{,}4\left(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 2\right)$$
$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 2{,}4\left(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 2\right) + 4(14 + 12 + \ldots 2)$$
$$V = 5{,}6 \qquad H = 70{,}4$$

Fig. 177.

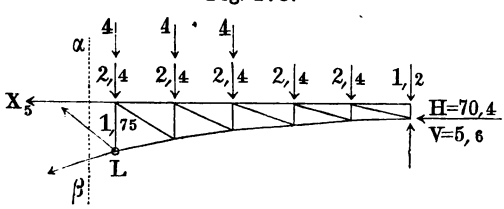


und dann für das Stück Fig. **178** die Momenten-Gleichung in Beziehung auf den Drehpunkt L zu bilden:

$$0 = -X_5 \cdot 1{,}75 - 5{,}6 \cdot 10 - 70{,}4 \cdot 1{,}25 + 2{,}4\left(\tfrac{10}{2} + 8 + 6 + 4 + 2\right) + 4(4 + 2)$$
$$X_5\,(\min) = -34{,}29\ \text{T.}$$

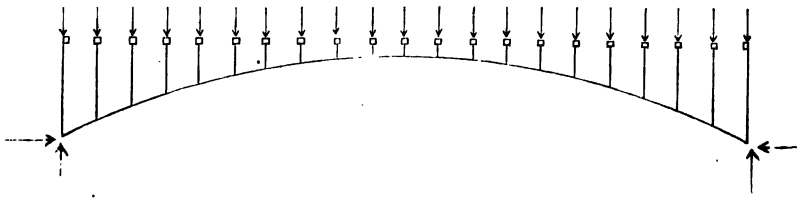
Es zeigt sich hier, dass die absoluten Werthe von X_5 (max) und X_5 (min) einander gleich sind, und hieraus folgt, dass $X_5 = 0$ wird, wenn die Belastungen, welche das Maximum hervorbringen, mit denen, welche das Minimum hervorbringen, gleichzeitig wirken, weil dann die von beiden Belastungszuständen hervorgebrachten Spannungen in X_5 einander aufheben. Bei voller Belastung ist also $X_5 = 0$ (denn die Belastung des neunten Verticalständers für sich allein erzeugt ebenfalls die Spannung Null in dem Stücke X_5). Diese Eigenschaft lässt sich schon aus der in § 8 gegebenen „Theorie der parabolischen Träger" leicht erklären. Es hat nämlich der Bogen die Form einer Parabel, und diese Form bildet, wie dort gezeigt wurde, die Gleichgewichtsform einer Kette, welche mit einer gleichförmig über die Spannweite vertheilten Last bedeckt ist. Sobald diese letztere Bedingung erfüllt ist, sind weder Diagonalen noch Horizontalstangen zur Aufrechterhaltung des Gleichgewichts erforderlich, die freistehenden Verticalständer allein, welche die oben aufgelegten Lasten auf die

Fig. 178.



Kette übertragen, sind ausreichend, um die Kette im Gleichgewicht zu erhalten (s. Fig. **179**).

Fig. 179.



Auch die permanente Last bildet der Annahme nach eine solche gleichförmig über die Spannweite vertheilte Last, hat also auf die Spannung der horizontalen Stangen durchaus keinen Einfluss.

Es folgt aus dem eben Bemerkten zweierlei: erstens bei der Berechnung der horizontalen Stangen kann die permanente Last ganz unberücksichtigt gelassen werden; zweitens, von den durch die mobile Last hervorgebrachten stärksten Zug- und Druck-Spannungen der Horizontalen braucht allemal nur **eine** berechnet zu werden, denn die andere muss mit ihr zusammen Null betragen, ergiebt sich also aus ihr durch blosse Umkehrung des Vorzeichens.

Man hätte also der Berechnung von X_5 auch folgende einfachere Form geben können:

$$X_5.$$

$$0 = -V.20 + H.5$$

$$0 = -V.20 - H.5 + 4(14 + 12 + \ldots 2),$$

$$V = 5{,}6 \qquad H = 22{,}4$$

$$0 = -X_5 . 1{,}75 - 5{,}6 . 10 - 22{,}4 . 1{,}25 + 4(4 + 2)$$

$$X_5 = \pm 34{,}29 \text{ T.}$$

Diese einfachere Form ist für die nachfolgende Berechnung der übrigen Grössen X als Norm gewählt.

$$X_1.$$

(Belastungsscheide im 7ten Felde.)

$$0 = -V.20 + H.5$$

$$0 = -V.20 - H.5 + 4(12 + 10 + \ldots 2)$$

$$V = 4{,}2 \qquad H = 16{,}8$$

$$0 = -X_1 . 4{,}55 - 4{,}2 . 18 - 16{,}8 . 4{,}05 + 4(10 + 8 + 6 + 4 + 2)$$

$$X_1 = \pm 5{,}20 \text{ T.}$$

X_2.

(Belastungsscheide im 8ten Felde.)

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$
$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4\,(14 + 12 + \ldots 2)$$
$$V = 5{,}6 \qquad H = 22{,}4$$
$$0 = -X_2 \cdot 3{,}7 - 5{,}6 \cdot 16 - 22{,}4 \cdot 3{,}2 + 4\,(10 + 8 + 6 + 4 + 2)$$
$$X_2 = \pm 11{,}16 \text{ T.}$$

X_3.

(Belastungsscheide im 8ten Felde.)

$$V = 5{,}6 \qquad H = 22{,}4$$
$$0 = -X_3 \cdot 2{,}95 - 5{,}6 \cdot 14 - 22{,}4 \cdot 2{,}45 + 4\,(8 + 6 + 4 + 2)$$
$$X_3 = \pm 18{,}06 \text{ T.}$$

X_4.

(Belastungsscheide im 8ten Felde.)

$$V = 5{,}6 \qquad H = 22{,}4$$
$$0 = -X_4 \cdot 2{,}3 - 5{,}6 \cdot 12 - 22{,}4 \cdot 1{,}8 + 4\,(6 + 4 + 2)$$
$$X_4 = \pm 25{,}88 \text{ T.}$$

X_6.

(Belastungsscheide im 9ten Felde.)

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$
$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4\,(16 + 14 + \ldots 2)$$
$$V = 7{,}2 \qquad H = 28{,}8$$
$$0 = -X_6 \cdot 1{,}3 - 7{,}2 \cdot 8 - 28{,}8 \cdot 0{,}8 + 4\,(4 + 2)$$
$$X_6 = \pm 43{,}57 \text{ T.}$$

X_7.

(Belastungsscheide im 9ten Felde.)

$$V = 7{,}2 \qquad H = 28{,}8$$
$$0 = -X_7 \cdot 0{,}95 - 7{,}2 \cdot 6 - 28{,}8 \cdot 0{,}45 + 4 \cdot 2$$
$$X_7 = \pm 50{,}70 \text{ T.}$$

X_8.

(Belastungsscheide im 10ten Felde.)

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$
$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4\,(18 + 16 + \ldots 2)$$
$$V = 9 \qquad H = 36$$
$$0 = -X_8 \cdot 0{,}7 - 9 \cdot 4 - 36 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 2$$
$$X_8 = \pm 50{,}29 \text{ T.}$$

X_9.

(Belastungsscheide im 10ten Felde.)

$$V = 9 \qquad H = 36$$
$$0 = -X_9 \cdot 0{,}55 - 9 \cdot 2 - 36 \cdot 0{,}05$$
$$X_9 = \pm 36{,}0 \text{ T.}$$

X_{10}.

In diesem Stücke kann niemals Spannung entstehen, weil an dem rechts liegenden Endpunkte desselben keine Horizontalkräfte angreifen. Es ist also

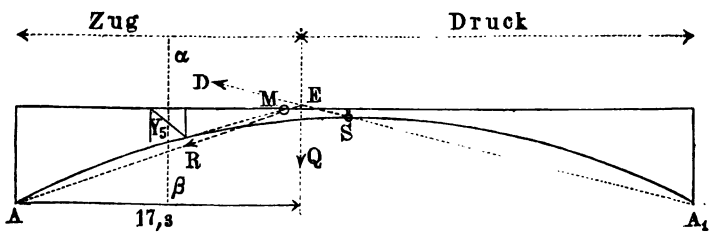
$$X_{10} = 0.$$

Berechnung der Spannungen Y in den Diagonalen.

Die mit Y_5 bezeichnete Diagonale soll als Beispiel gewählt werden, um die Berechnungsweise daran zu erläutern.

Für die nachher zur Bestimmung von Y_5 aufzustellende Momenten-Gleichung wird der Punkt M (s. Fig. **180**) den Drehpunkt

Fig. 180.



bilden. Verlängert man also die Richtungen AM und A_1S bis zu ihrem Durchschnittspunkte E, so bezeichnet die durch diesen Punkt gelegte Verticale diejenige Stelle, an welcher ein Gewicht liegen muss, um gar keine Wirkung auf das Stück Y_5 auszuüben. Denn hier bildet ein Gewicht Q mit dem durch dasselbe erzeugten Scheiteldruck D eine Mittelkraft R, welche gerade durch den Drehpunkt M hindurchgeht. Liegt das Gewicht weiter rechts, so wird entweder diese Mittelkraft R, oder, wenn es ganz auf der anderen Hälfte liegt, der Scheiteldruck unterhalb des Punktes M vorbeigehen, also auf das Stück $S\alpha\beta$ rechts drehend wirken, während Y_5 auch rechts drehend wirkt, folglich negativ dadurch gemacht wird.

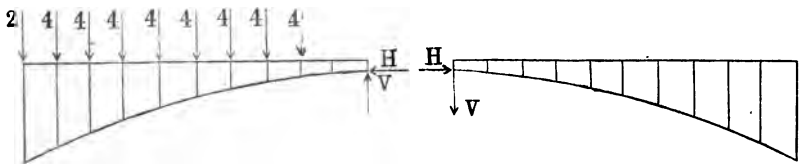
Liegt das Gewicht dagegen weiter links, so wird entweder die Mittelkraft R, oder — wenn es ganz jenseits des Schnitts $\alpha\beta$ liegt — der durch dasselbe hervorgerufene Scheiteldruck D oberhalb des Punktes M vorbeigehen, also auf das Stück $S\alpha\beta$ links drehend wirken, folglich Y_5 positiv machen.

Die durch den Punkt E gelegte Verticale bildet also die Belastungsscheide, welche die ganze Brücke in zwei Abtheilungen scheidet, von denen die links liegende ganz belastet angenommen

werden muss, um den grössten positiven Werth von Y_5, die rechts liegende dagegen, um den grössten negativen Werth von Y_5 zu ergeben.

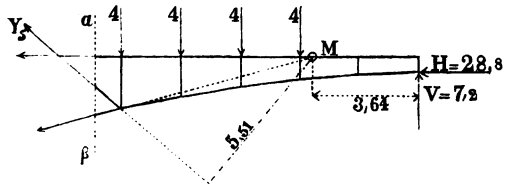
Da schon bei Gelegenheit der Berechnung der horizontalen Stangen die Bemerkung gemacht und begründet wurde, dass bei gleichförmiger Belastung weder die Horizontal- noch die Diagonal-Stangen Spannung annehmen, so erscheint es überflüssig, hier noch einmal den Beweis zu führen, dass es hinsichtlich der Diagonalstangen keinerlei Unterschied macht, ob man die permanente Last mit berücksichtigt oder nicht. Es soll also der Einfachheit wegen bei der Berechnung der Grössen Y die permanente Last ganz aus dem Spiele gelassen werden. Ebenso soll von den beiden Werthen, Maximum und Minimum, immer nur Einer (und zwar ersterer) berechnet werden; denn wenn bei voller

Fig. 181.



Belastung die Spannung Null ist, so muss nothwendig die Belastung des einen Theils gerade so viel positive, als die des anderen negative Spannung erzeugen, und sind also Maximum und Minimum immer nur dem Zeichen nach verschieden.

Fig. 182.



Man erhält demnach zur Bestimmung von Y_5 (max) für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks aus Fig. **181** — indem man das Eigengewicht der Brücke als nicht vorhanden ansieht — die Gleichungen:

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$
$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4\,(16 + 14 + \ldots + 2)$$
$$V = 7{,}2 \qquad H = 28{,}8$$

und für Y_5 (max) selbst aus Fig. **182** die Momenten-Gleichung:

$$0 = Y_5 \,.\, 5{,}51 - 7{,}2 \,.\, 3{,}64 + 28{,}8 \,.\, 0{,}5 - 4\,(0{,}36 + 2{,}36 + 4{,}36 + 6{,}36)$$

$$Y_5\,(\max) = +\,11{,}9 \text{ T.}$$

Da das Minimum seinem absoluten Werthe nach dieselbe Grösse hat, so kann man auch setzen:

$$Y_5 = \pm\,11{,}9 \text{ T.}$$

Auf ähnliche Weise erhält man für die Grössen $Y_1 \ldots Y_6$ die nachfolgenden Gleichungen:

Y_1.

(Belastungsscheide im 7ten Felde.)

$V = 4{,}2 \qquad H = 16{,}8$ (wie bei der Bestimmung von X_1)

$$0 = Y_1 \,.\, 10{,}6 - 4{,}2 \,.\, 8{,}42 + 16{,}8 \,.\, 0{,}5 + 4 \,.\, 0{,}42 - 4\,(1{,}58 + 3{,}58 + 5{,}58 + 7{,}58 + 9{,}58)$$

$Y_1 = \pm\,12{,}92$ T.

Y_2.

(Belastungsscheide im 8ten Felde.)

$V = 5{,}6 \qquad H = 22{,}4$ (wie bei der Bestimmung von X_2)

$$0 = Y_2 \,.\, 9{,}42 - 5{,}6 \,.\, 7{,}294 + 22{,}4 \,.\, 0{,}5 + 4 \,.\, 1{,}294 - 4\,(0{,}706 + 2{,}706 + 4{,}706 + 6{,}706 + 8{,}706)$$

$Y_2 = \pm\,12{,}59$ T.

Y_3.

(Belastungsscheide im 8ten Felde.)

$V = 5{,}6 \qquad H = 22{,}4$

$$0 = Y_3 \,.\, 8{,}16 - 5{,}6 \,.\, 6{,}13 + 22{,}4 \,.\, 0{,}5 + 4 \,.\, 0{,}13 - 4\,(1{,}87 + 3{,}87 + 5{,}87 + 7{,}87)$$

$Y_3 = \pm\,12{,}3$ T.

Y_4.

(Belastungsscheide im 9ten Felde.)

$V = 7{,}2 \qquad H = 28{,}8$ (wie bei der Bestimmung von X_6)

$$0 = Y_4 \,.\, 6{,}834 - 7{,}2 \,.\, 4{,}923 + 28{,}8 \,.\, 0{,}5 + 4 \,.\, 0{,}923 - 4\,(1{,}077 + 3{,}077 + 5{,}077 + 7{,}077)$$

$Y_4 = \pm\,12{,}07$ T.

Y_6.

(Belastungsscheide im 9ten Felde.)

$V = 7{,}2 \qquad H = 28{,}8$

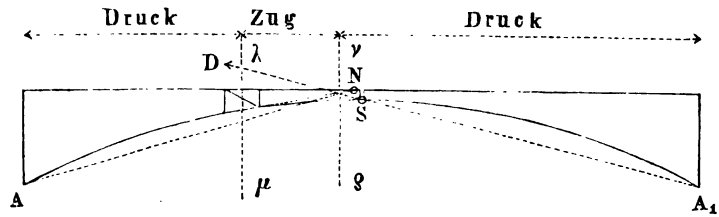
$$0 = Y_6 \,.\, 4{,}24 - 7{,}2 \,.\, 2{,}223 + 28{,}8 \,.\, 0{,}5 - 4\,(1{,}777 + 3{,}777 + 5{,}777)$$

$Y_6 = \pm\,11{,}07$ T.

Bei der Bestimmung von Y_7 findet es sich, dass der Drehpunkt N in das Mittelfeld hineinfällt, und dass hierdurch

eine Abweichung von dem bisherigen Verfahren bedingt wird (s. Fig. **183**). Es bilden sich hier nämlich **drei** Abtheilungen, eine

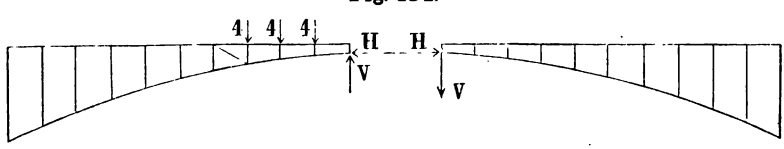
Fig. 183.



für Zugspannung und zwei für Druckspannung. Denn die Linie $A_1 S$ geht hier links an dem Drehpunkte N vorbei, folglich auch der Scheiteldruck, den eine Belastung der linken Hälfte erzeugt. Ein Gewicht, welches links von der Schnittlinie $\lambda\,\mu$ aufgelegt wird, bringt also in Bezug auf das Stück $S\,\lambda\,\mu$ eine Kraft D hervor, welche dasselbe um den Drehpunkt N **rechts** herum zu drehen strebt, folglich Y_7 negativ macht.

Die Schnittlinie $\lambda\,\mu$ bildet hier demnach eine zweite Belastungsscheide, denn rechts von derselben bis zur Linie $\nu\,\rho$ hin erzeugen die aufgelegten Gewichte wie früher eine (aus Gewicht und Scheiteldruck sich zusammensetzende) Kraft, welche links herum dreht, und noch weiter rechts — jenseits der Linie $\nu\,\rho$ — erzeugen die aufgelegten Gewichte wiederum Kräfte, welche das Stück $S\,\lambda\,\mu$ rechts herum zu drehen streben.

Fig. 184.

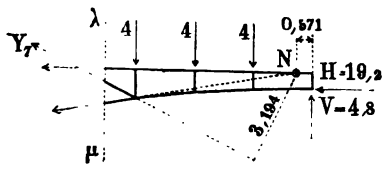


Zur Berechnung von Y_7 kann man also entweder die beiden Druckabtheilungen oder die Zugabtheilung belastet annehmen. Im letzteren Falle erhält man aus Fig. **184** als Gleichungen für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks:

$$0 = -V.20 + H.5$$
$$0 = -V.20 - H.5 + 4\,(18 + 16 + 14)$$
$$V = 4{,}8 \qquad H = 19{,}2$$

sodann aus Fig. **185** die Momenten-Gleichung:

Fig. 185.

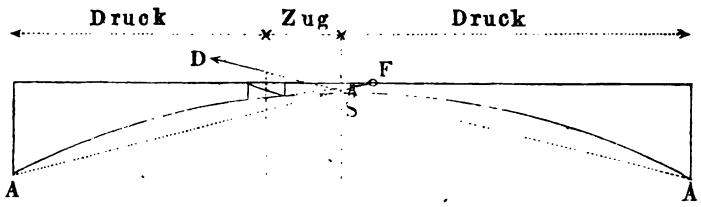


$$0 = Y_7 \,.\, 3{,}194 - 4{,}8 \,.\, 0{,}571 + 19{,}2 \,.\, 0{,}5 - 4\,(1{,}429 + 3{,}429 + 5{,}429)$$

$$Y_7 = \pm\, 10{,}73 \text{ T.}$$

Auch für Y_8 bilden sich drei Abtheilungen, indem der Drehpunkt F in das andere der beiden Mittelfelder hineinfällt (s. Fig. **186**), der Scheiteldruck D also auch hier eine rechts

Fig. 186.



drehende Kraft bildet. Die Berechnung ist also gerade wie bei dem vorigen Falle zu führen, und man erhält die Gleichungen:

$$0 = -V \,.\, 20 + H \,.\, 5$$

$$0 = -V \,.\, 20 - H \,.\, 5 + 4\,(18 + 16)$$

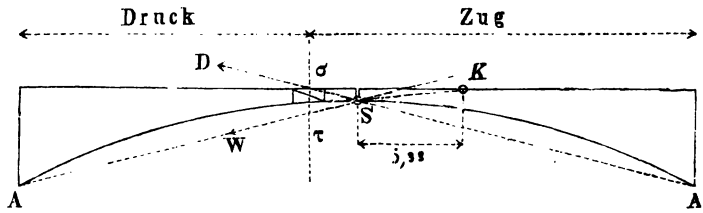
$$V = 3{,}4 \qquad H = 13{,}6$$

$$0 = Y_8 \,.\, 2{,}51 + 3{,}4 \,.\, 1{,}6 + 13{,}6 \,.\, 0{,}5 - 4\,(5{,}6 + 3{,}6)$$

$$Y_8 = \pm\, 9{,}8 \text{ T.}$$

Für Y_9 fällt der Drehpunkt K so, dass sich wiederum nur zwei Abtheilungen bilden (s. Fig. **187**). Hier ist die Schnittlinie

Fig. 187.



$\sigma\tau$ selbst die Belastungsscheide, denn jede Belastung links von derselben wirkt auf das Stück $S\sigma\tau$ nur mittelst des Scheitel-

drucks D, welcher rechts herum dreht, also Y_9 negativ macht. Jede Belastung der rechten Hälfte erzeugt einen Scheiteldruck W, der links herum dreht, und eine Belastung des Stücks $S\sigma\tau$ selbst erzeugt mit dem von ihr hervorgebrachten Scheiteldruck D eine Mittelkraft, welche ebenfalls links herum dreht.

Die Belastungsscheide liegt also im 9ten Felde, und für Belastung der Druckabtheilung findet man (wie früher bei der Bestimmung von X_6):

$$V = 7{,}2 \qquad H = 28{,}8.$$

Man erhält also für Y_9 die Gleichung:

$$0 = Y_9 \,.\, 2{,}47 + 7{,}2 \,.\, 5{,}33 \ldots + 28{,}8 \,.\, 0{,}5$$
$$Y_9 = \pm 21{,}4 \text{ T.}$$

Für Y_{10} bildet ebenfalls die Schnittlinie selbst die Belastungsscheide, und ist daher die Rechnung ebenso zu führen, wie für Y_9. Man erhält die Gleichungen:

$$0 = -V \,.\, 20 + H \,.\, 5$$
$$0 = -V \,.\, 20 - H \,.\, 5 + 4\,(18 + 16 + \ldots 2)$$
$$V = 9 \qquad H = 36$$
$$0 = Y_{10} \,.\, 5{,}324 + 9 \,.\, 20 + 36 \,.\, 0{,}5$$
$$Y_{10} = \pm 37{,}29 \text{ T.}$$

Berechnung der Spannungen U in den verticalen Stangen.

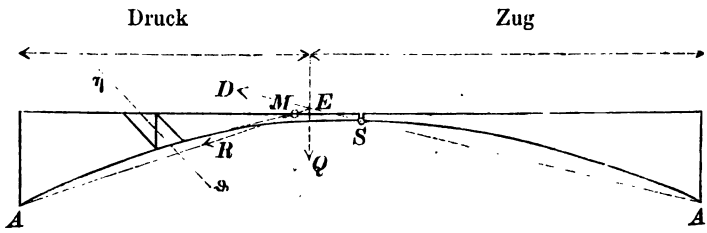
Aus Fig. **179** ist zu erkennen, welche Wirkung die permanente Belastung auf die Verticalständer ausübt. Sieht man die Punkte, welche in der horizontalen Fahrbahn liegen, als Angriffspunkte der einen Hälfte und die in dem Bogen liegenden als Angriffspunkte der anderen Hälfte des Eigengewichts an, so bekommt jeder Verticalständer dadurch eine Druckspannung von 1,2 Tonnen (mit Ausnahme des 1sten und 11ten, welche nur die Hälfte davon bekommen). Zu dieser permanenten Spannung kommt dann noch die wechselnde Spannung, welche durch die mobile Last in ihnen hervorgebracht wird.

Es sind also zunächst von dieser letzteren das Maximum und das Minimum zu berechnen und dann jene — 1,2 Tonnen hinzu zu addiren.

Die von der mobilen Last allein in dem Verticalständer U_5 hervorgebrachte stärkste Spannung, welche mit $\mathfrak{U}_5$ bezeichnet werden

soll, findet man, indem man die permanente Last ganz unberücksichtigt lässt und zunächst diejenige Stelle aufsucht, an welcher ein Gewicht liegen muss, um gar keine Wirkung auf denselben auszuüben. Dies geschieht durch dieselbe Construction, welche in Fig. **180** bei der Berechnung von Y_5 angewendet wurde, indem man die Linien AM und $A_1 S$ bis zu ihrem Durchschnittspunkte E verlängert. Denn derselbe Punkt M, welcher den Drehpunkt der Momenten-Gleichung für Y_5 bildete, wird auch hier als Drehpunkt zu nehmen sein. Ein Gewicht Q, in der durch den Punkt E gelegten Verticalen wirkend, erzeugt mit dem von ihm hervorgebrachten Scheiteldruck D für das Stück $S\eta_1\vartheta$ eine Mittelkraft R, welche durch den Drehpunkt hindurchgeht, also auf die Spannung $\mathfrak{U}_5$ keinen Einfluss hat. Diese Verticale bildet also die Belastungsscheide, alle rechts davon liegenden Gewichte erzeugen Zugspannung, alle links davon liegenden Druckspannung (s. Fig. **188**). Um $\mathfrak{U}_5$ (min) zu finden, ist die Druckabtheilung be-

Fig. 188.



lastet anzunehmen. Man erhält gerade wie bei der Bestimmung von Y_5 (max) als Seitenkräfte des Scheiteldrucks:

$$V = 7{,}2 \qquad H = 28{,}8.$$

Als Momenten-Gleichung des Stücks $S\eta_1\vartheta$ ergiebt sich sodann aus Fig. **189**:

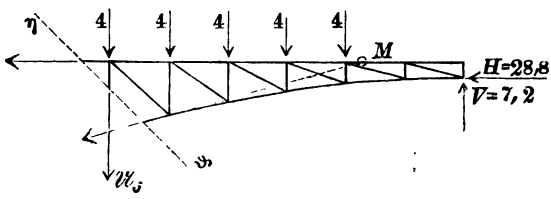
$$0 = -\mathfrak{U}_5 \cdot 8{,}36 - 7{,}2 \cdot 3{,}64 + 28{,}8 \cdot 0{,}5 - 4\,(0{,}36 + 2{,}36 + 4{,}36 + 6{,}36 + 8{,}36)$$

$$\mathfrak{U}_5\,(\text{min}) = -11{,}84\ \text{T}.$$

Das Maximum kann ohne neue Rechnung aus diesem Werthe abgeleitet werden, und zwar auf folgende Weise: Wenn ausser der Druckabtheilung auch noch die Zugabtheilung belastet wird, so muss die Spannung $= -4$ Tonnen werden, denn so viel

beträgt die Spannung jedes Verticalständers bei gleichförmig vertheilter mobiler Last (s. Fig. **179**). Daraus folgt, dass die Belastung der Zug-Abtheilung für sich allein genau so viel Spannung hervorbringt, als mit $\mathfrak{U}_5$ (min) zusammen — 4 beträgt. Es ergiebt sich hieraus die Gleichung:

Fig. 189.



$$\mathfrak{U}_5\,(\max) + \mathfrak{U}_5\,(\min) = -4$$

oder, wenn man für $\mathfrak{U}_5$ (min) den gefundenen Werth substituirt und die Gleichung auflöst:

$$\mathfrak{U}_5\,(\max) = -4 - (-11{,}84) = +7{,}84.$$

Die Werthe von U_5 (min) und U_5 (max) ergeben sich nun, wenn zu den beiden eben gefundenen — 1,2 hinzu addirt wird, also:

$$U_5\,(\min) = -11{,}84 - 1{,}2 = -13{,}04\text{ T.}$$
$$U_5\,(\max) = +7{,}84 - 1{,}2 = +6{,}64\text{ T.}^*)$$

Auf ähnliche Weise findet man für die übrigen Verticalständer folgende Gleichungen:

U_1.**)

$$0 = -\mathfrak{U}_1 . 11{,}58 - 4{,}2 . 8{,}42 + 16{,}8 . 0{,}5 + 4 . 0{,}42 - 4\,(1{,}58 + 3{,}58 + 5{,}58 + 7{,}58 + 9{,}58 + 11{,}58)$$

$\mathfrak{U}_1$ (min) $= -15{,}82$ $\qquad$ $\mathfrak{U}_1$ (max) $= +11{,}82$

U_1 (min) $= -17{,}02$ T.

U_1 (max) $= +10{,}62$ T.

---

*) Man hätte zwar kürzer die Werthe von U_5 (min) und U_5 (max) aus dem früher schon gefundenen Werthe von Y_5 (max) ableiten können, dadurch, dass man einmal zu der verticalen Seitenkraft von Y_5 (max) negativ genommen die Grösse — (4 + 1,2), das andere Mal zu jener Seitenkraft positiv genommen die Grösse — 1,2 hinzufügte. Da indessen diese Methode nicht für alle Verticalständer passt, so ist hier der obige etwas längere Weg vorgezogen.

**) Der erste Verticalständer wäre streng genommen als halber zu betrachten, da angenommen wurde, dass die andere Hälfte seiner Belastung unmittelbar vom Auflager getragen wird. Indessen ist derselbe hier voll gerechnet, wie man das in der Praxis wohl immer vorziehen wird.

U_2.

$$0 = -\mathfrak{u}_2 \cdot 10{,}706 - 5{,}6 \cdot 7{,}294 + 22{,}4 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 1{,}294 - 4\,(0{,}706 + 2{,}706 + 4{,}706 + 6{,}706 + 8{,}706 + 10{,}706)$$

$\mathfrak{u}_2$ (min) $= -15{,}08$ $\quad \mathfrak{u}_2$ (max) $= +11{,}08$

U_2 (min) $= -16{,}28$ T.

U_2 (max) $= +9{,}88$ T.

U_3

$$0 = -\mathfrak{u}_3 \cdot 9{,}87 - 5{,}6 \cdot 6{,}13 + 22{,}4 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}13 - 4\,(1{,}87 + 3{,}87 + 5{,}87 + 7{,}87 + 9{,}87)$$

$\mathfrak{u}_3$ (min) $= -14{,}2$ $\quad \mathfrak{u}_3$ (max) $= +10{,}2$

U_3 (min) $= -15{,}4$ T.

U_3 (max) $= +9{,}0$ T.

U_4.

$$0 = -\mathfrak{u}_4 \cdot 9{,}077 - 7{,}2 \cdot 4{,}923 + 28{,}8 \cdot 0{,}5 + 4 \cdot 0{,}923 - 4\,(1{,}077 + 3{,}077 + 5{,}077 + 7{,}077 + 9{,}077)$$

$\mathfrak{u}_4$ (min) $= -13{,}1$ $\quad \mathfrak{u}_4$ (max) $= +9{,}1$

U_4 (min) $= -14{,}3$ T.

U_4 (max) $= +7{,}9$ T.

U_6.

$$0 = -\mathfrak{u}_6 \cdot 7{,}777 - 7{,}2 \cdot 2{,}223 + 28{,}8 \cdot 0{,}5 - 4\,(1{,}777 + 3{,}777 + 5{,}777 + 7{,}777)$$

$\mathfrak{u}_6$ (min) $= -10{,}03$ $\quad \mathfrak{u}_6$ (max) $= +6{,}03$

U_6 (min) $= -11{,}23$ T.

U_6 (max) $= +4{,}83$ T.

U_7.

Schon bei der Berechnung der Diagonalen ergab sich, dass für das 7te Feld ein abweichendes Verfahren einzuschlagen war, insofern für Y_7 drei Abtheilungen sich bildeten. In ganz analoger Weise sind auch für U_7 drei Abtheilungen zu unterscheiden, nur ist zu bemerken, dass, während sonst die Belastungsscheiden für U mit denen für Y zusammenfielen, bei diesem Felde die eine der Belastungsscheiden um eine Feldlänge weiter nach links rückt wegen der schrägen Richtung des Schnitts $\varphi\,\psi$ (s. Fig. **190**).

Bei Belastung der Druckabtheilung ergeben sich für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks die Gleichungen:

$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5$$

$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 4\,(18 + 16 + 14 + 12)$$

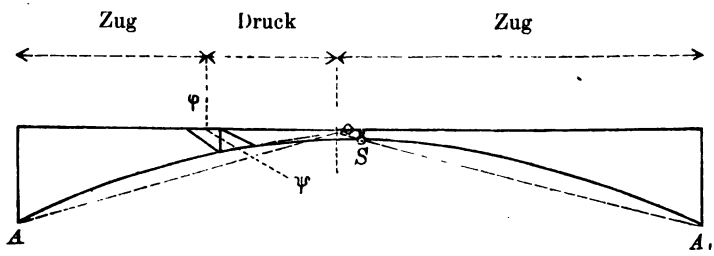
$$V = 6 \qquad H = 24$$

und als Momenten-Gleichung des Stücks $S\,\varphi\,\psi$:

$$0 = - u_7 \,.\, 7{,}429 - 6 \,.\, 0{,}571 + 24 \,.\, 0{,}5 - 4\,(1{,}429 + 3{,}429 + 5{,}429 + 7{,}429)$$

$$u_7\,(\min) = - 8{,}38 \qquad u_7\,(\max) = + 4{,}38.$$

Fig. 190.



Hieraus erhält man wie in den vorigen Fällen:

$U_7\,(\min) = - 9{,}58$ T.

$U_7\,(\max) = + 3{,}18$ T.

U_8.

Auch hier bilden sich drei Abtheilungen und die Berechnung geschieht wie bei dem vorigen Falle:

$$0 = - V \,.\, 20 + H \,.\, 5$$

$$0 = - V \,.\, 20 - H \,.\, 5 + 4 \,.\, (18 + 16 + 14)$$

$$V = 4{,}8 \qquad H = 19{,}2.$$

$$0 = - u_8 \,.\, 7{,}6 + 4{,}8 \,.\, 1{,}6 + 19{,}2 \,.\, 0{,}5 - 4\,(3{,}6 + 5{,}6 + 7{,}6)$$

$$u_8\,(\min) = - 6{,}57 \qquad u_8\,(\max) = + 2{,}57$$

$U_8\,(\min) = - 7{,}77$ T.

$U_8\,(\max) = + 1{,}37$ T.

U_9.

Wie für Y_9 bilden sich wieder nur zwei Abtheilungen, nur rückt wegen der schrägen Richtung des Schnitts die Belastungsscheide um eine Feldlänge weiter links (s. Fig. **191**). Für Belastung der Zugabtheilung erhält man die Gleichungen:

$$0 = - V \,.\, 20 + H \,.\, 5$$

$$0 = - V \,.\, 20 - H \,.\, 5 + 4\,(14 + 12 + \ldots 2)$$

$$V = 5{,}6 \qquad H = 22{,}4.$$

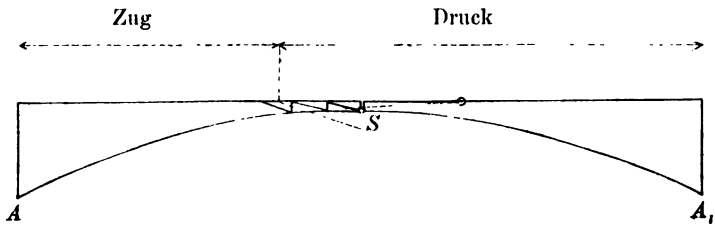
$$0 = - \mathfrak{U}_9 \,.\, 9{,}33 \ldots + 5{,}6 \,.\, 5{,}33 \ldots + 22{,}4 \,.\, 0{,}5$$

$$\mathfrak{U}_9 \,(\max) = + 4{,}4 \qquad \mathfrak{U}_9 \,(\min) = - 8{,}4$$

$$U_9 \,(\min) = - 9{,}6 \text{ T.}$$

$$U_9 \,(\max) = + 3{,}2 \text{ T.}$$

Fig. 191.



U_{10}.

Die Berechnung geschieht wie bei U_9. Die Belastungsscheide liegt im 9ten Felde, der Drehpunkt für die Momenten-Gleichung wie bei Y_{10}; man erhält also:

$$V = 7{,}2 \qquad H = 28{,}8$$

$$0 = - \mathfrak{U}_{10} \,.\, 22 + 7{,}2 \,.\, 20 + 28{,}8 \,.\, 0{,}5$$

$$\mathfrak{U}_{10} \,(\max) = + 7{,}2 \qquad \mathfrak{U}_{10} \,(\min) = - 11{,}2 \text{ T.}$$

$$U_{10} \,(\min) = - 12{,}4 \text{ T.}$$

$$U_{10} \,(\max) = + 6{,}0 \text{ T.}$$

U_{11}.

Der Verticalständer in der Mitte wird durch die Scheitelfuge halbirt, und jeder der beiden Theile steht oben nur mit einer horizontalen Stange in Verbindung, kann also nur durch die direct aufliegende Belastung eine Spannung erhalten, nämlich Druck-Spannung. Die Belastung beträgt für jede Hälfte 0,6 T. permanenter und 2 Tonnen mobiler Last, also ist

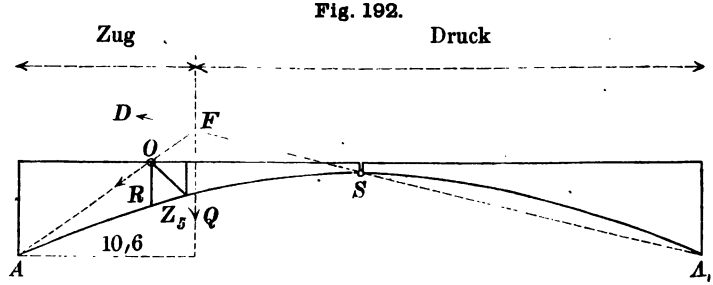
$$U_{11} \,(\min) = - 2{,}6 \text{ T.}$$

Berechnung der Spannungen Z in den Bogenstücken.

Das Stück Z_5 soll als Beispiel dienen, um das einzuschlagende Verfahren daran zu erklären. Man legt einen Verticalschnitt durch das 5te Feld und stellt für das zwischen diesem Schnitt und der Scheitelfuge liegende Stück die Momenten-Gleichung auf in Bezug auf den Durchschnittspunkt O von Diagonale und Horizontale (s. Fig. **192**).

Die Belastungsweise für Z_5 (max) und Z_5 (min) findet man, indem man zunächst die Belastungsscheide sucht, d. h. diejenige

Fig. 192.

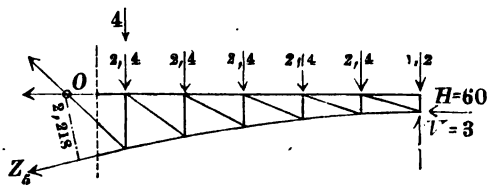


Stelle, wo ein Gewicht liegen muss, um weder Zug- noch Druck-Spannung in Z_5 zu erzeugen.

Wenn man die Linien $A\,O$ und $A_1\,S$ bis zu ihrem Durchschnittspunkte F verlängert und durch diesen Punkt eine Verticale legt, so bildet diese Verticale eine Belastungsscheide. Denn hier erzeugt ein Gewicht Q in Verbindung mit dem von demselben hervorgebrachten Scheiteldruck D eine Mittelkraft R, welche durch den Drehpunkt O hindurchgeht. Diese Belastungsscheide liegt für Z_5 in dem 6ten Felde.

Nimmt man die Zugabtheilung belastet an, so sind — da hier natürlich die permanente Last nicht unberücksichtigt bleiben darf — für die unbelasteten Punkte 2,4 Tonnen, für die belasteten 2,4 + 4 Tonnen in Rechnung zu bringen. Man erhält also für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks die Gleichungen:

Fig. 193.



$$0 = -V.20 + H.5 - 2{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + 16 + \ldots 2)$$
$$0 = -V.20 - H.5 + 2{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + 16 + \ldots 2)$$
$$+ 4\,(10 + 8 + \ldots 2)$$
$$V = 3 \qquad H = 60.$$

Aus Fig. **193** ergiebt sich sodann die Momenten-Gleichung:

$$0 = Z_5 . 2{,}218 - 3 . 12 + 60 . 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{12}{2} + 10 + \ldots 2) + 4 . 2$$
$$Z_5\,(\text{max}) = -39{,}86\ \text{T.}$$

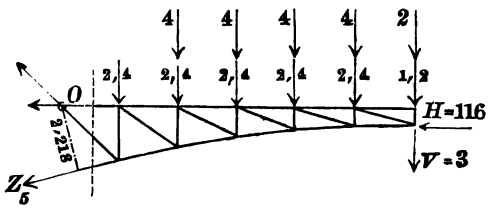
Bei Belastung der Druckabtheilung erhält man für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks die Gleichungen:

$$0 = V \,.\, 20 + H \,.\, 5 - 6{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 2)$$
$$0 = V \,.\, 20 - H \,.\, 5 + 2{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 2) + 4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 12)$$
$$V = 3 \qquad H = 116$$

und aus Fig. **194** die Momenten-Gleichung:

$$0 = Z_5 \,.\, 2{,}218 + 3 \,.\, 12 + 116 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{12}{2} + 10 + \ldots 2) + 4\,(\tfrac{12}{2} + 10 + \ldots 4)$$
$$Z_5\,(\min) = -\,142{,}70\ \text{T.}$$

Fig. 194.



Zur Vergleichung soll hier noch derjenige Werth berechnet werden, den Z_5 annimmt, wenn die ganze Brücke mit der mobilen Last bedeckt ist. Es ergeben sich für diesen Fall die Gleichungen:

$$0 = V \,.\, 20 + H \,.\, 5 - 6{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 2)$$
$$0 = V \,.\, 20 - H \,.\, 5 + 6{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 2)$$
$$V = 0 \qquad H = 128.$$
$$0 = Z_5 \,.\, 2{,}218 + 128 \,.\, 0{,}5 + 6{,}4\,(\tfrac{12}{2} + 10 + \ldots 2)$$
$$Z_5 = -\,132{,}7\ \text{T.}$$

Aus diesen Rechnungen lässt sich nun hinsichtlich der Spannungen Z in den Bogenstücken schon Folgendes entnehmen.

Erstens, dass die Druckspannung in den Bogenstücken bei **einseitiger** Belastung beträchtlich stärker werden kann als bei **voller** Belastung, dass es also auch hinsichtlich der Bogenstücke von Wichtigkeit ist, auf einseitige Belastungen Rücksicht zu nehmen. In diesem Punkte unterscheidet sich die parabolische **Bogen**-Brücke wesentlich von den früher untersuchten parabolischen **Balken**-Brücken — d. h. solchen, deren Auflagerpunkte nur verticale Gegendrücke leisten — in welchen stets bei voller Belastung die Spannung der Bogenstücke am stärksten wird.

Zweitens erkennt man aus der obigen Rechnung, dass es eigentlich nicht erforderlich ist, auch die Maxima von Z bei

dieser Brücke zu berechnen. Denn: sieht man einstweilen von dem Eigengewichte ab, so ist klar, dass die von der mobilen Last allein hervorgebrachte grösste positive Spannung zu der von ihr hervorgebrachten grössten negativen Spannung hinzu addirt diejenige Spannung ergeben muss, welche durch die mobile Last entsteht, wenn sie die ganze Brücke bedeckt. Diese ist aber immer negative Spannung, wie man aus der vorletzten von den obigen Gleichungen sofort erkennt (da im Vorzeichen von Z_5 keine Aenderung hervorgebracht wird, wenn man 4 statt 6,4 schreibt). Hieraus folgt, dass nothwendig die von der mobilen Last hervorgebrachte grösste Druckspannung stets grösser sein muss, als die von ihr hervorgebrachte grösste Zugspannung, während die permanente Last überdies noch eine permanente Druckspannung in den Bogenstücken erzeugt, also ebenfalls dahin wirkt, dass Z (min) überwiegt. Da nun Druckspannung ohnehin meistens einen grösseren Querschnitt erfordert als eine gleich grosse Zugspannung, so könnten bei dieser Construction die Maxima von Z ganz unberücksichtigt bleiben, da die Minima allein bei der Querschnittsbestimmung entscheiden.

Nichtsdestoweniger soll auch hier das Maximum berechnet werden und zwar aus folgendem Grunde. Genau dieselbe Methode würde nämlich auch in dem Falle anzuwenden sein, wenn die convexe Seite des Bogens nach unten gekehrt wäre, und die horizontale Fahrbahn unter dem Bogen hinge, d. h. wenn die Brücke als Hängebrücke construirt wäre. In diesem Falle aber würde Minimum werden was hier Maximum ist und umgekehrt. Bei sehr geringer Grösse des Eigengewichts könnten diese Minima möglicher Weise negativ werden und trotz ihrer kleineren absoluten Werthe bei der Wahl des Querschnitts den Ausschlag geben. Für solche Fälle ist es also von Nutzen, auch die Berechnungsweise derjenigen Werthe von Z kennen zu lernen, welche hier als Maxima auftreten.

Für die Spannungen Z in den übrigen Feldern erhält man nach der obigen Methode folgende Gleichungen:

Z_1.

Die Belastungsscheide fällt mit dem ersten Verticalständer zusammen. Für die unbelastete Brücke ist:

$$0 = V.20 + H.5 - 2{,}4\,(\tfrac{1}{2}^0 + 18 + \ldots 2)$$
$$0 = V.20 - H.5 + 2{,}4\,(\tfrac{1}{2}^0 + 18 + \ldots 2)$$
$$V = 0 \qquad H = 48$$

$0 = Z_1 \,.\, 4{,}968 + 48 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{1}{2}^0 + 18 + \ldots 2)$

$Z_1\,(\max) = -53{,}14$ T.

Bei voller Belastung wird:

$V = 0 \qquad H = 128$

$0 = Z_1 \,.\, 4{,}968 + 128 \,.\, 0{,}5 + 6{,}4\,(\tfrac{1}{2}^0 + 18 + \ldots 2)$

$Z_1\,(\min) = -141{,}71$ T.

Z_2.

(Belastungsscheide im 2ten Felde.)

$V = 0{,}2 \qquad H = 48{,}8$

$0 = Z_2 \,.\, 4{,}186 - 0{,}2 \,.\, 18 + 48{,}8 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{1}{2}^8 + 16 + \ldots 2)$

$Z_2\,(\max) = -51{,}41$ T.

$V = 0{,}2 \qquad H = 127{,}2$

$0 = Z_2 \,.\, 4{,}186 + 0{,}2 \,.\, 18 + 127{,}2 \,.\, 0{,}5 + 6{,}4\,(\tfrac{1}{2}^8 + 16 + \ldots 2)$

$Z_2\,(\min) = -139{,}89$ T.

Z_3.

(Belastungsscheide im 4ten Felde.)

$V = 1{,}2 \qquad H = 52{,}8$

$0 = Z_3 \,.\, 3{,}464 - 1{,}2 \,.\, 16 + 52{,}8 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{1}{2}^6 + 14 + \ldots 2) + 4 \,.\, 2$

$Z_3\,(\max) = -48{,}73$ T.

$V = 1{,}2 \qquad H = 123{,}2$

$0 = Z_3 \,.\, 3{,}464 + 1{,}2 \,.\, 16 + 123{,}2 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{1}{2}^6 + 14 + \ldots 2) + 4\,(\tfrac{1}{2}^6 + 14 + \ldots 4)$

$Z_3\,(\min) = -139{,}3$ T.

Z_4.

(Belastungsscheide im 5ten Felde.)

$V = 2 \qquad H = 56$

$0 = Z_4 \,.\, 2{,}805 - 2 \,.\, 14 + 56 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{1}{2}^4 + 12 + \ldots 2) + 4 \,.\, 2$

$Z_4\,(\max) = -44{,}77$ T.

$V = 2 \qquad H = 120$

$0 = Z_4 \,.\, 2{,}805 + 2 \,.\, 14 + 120 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{1}{2}^4 + 12 + \ldots 2) + 4\,(\tfrac{1}{2}^4 + 12 + \ldots 4)$

$Z_4\,(\min) = -140{,}3$ T.

Z_6.

(Belastungsscheide im 7ten Felde.)

$V = 4{,}2 \qquad H = 64{,}8$

$0 = Z_6 \,.\, 1{,}707 - 4{,}2 \,.\, 10 + 64{,}8 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{1}{2}^0 + 8 + \ldots 2) + 4 \,.\, 2$

$Z_6\,(\max) = -34{,}21$ T.

$V = 4{,}2 \qquad H = 111{,}2$

$0 = Z_6 \,.\, 1{,}707 + 4{,}2 \,.\, 10 + 111{,}2 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{1}{2}^0 + \ldots 2) + 4\,(\tfrac{1}{2}^0 + \ldots 4)$

$Z_6\,(\min) = -146{,}2$ T.

Z_7.

(Belastungsscheide im 8ten Felde.)

$V = 5{,}6 \qquad H = 70{,}4$

$0 = Z_7 \,.\, 1{,}28 - 5{,}6 \,.\, 8 + 70{,}4 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{8}{2} + 6 + 4 + 2) + 4 \,.\, 2$

$Z_7\,(\max) = -\,28{,}74$ T.

$V = 5{,}6 \qquad H = 105{,}6$

$0 = Z_7 \,.\, 1{,}28 + 5{,}6 \,.\, 8 + 105{,}6 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{8}{2} + 6 + 4 + 2) + 4\,(\tfrac{8}{2} + 6 + 4)$

$Z_7\,(\min) = -\,149{,}9$ T.

Z_8.

(Belastungsscheide im 8ten Felde.)

$V = 5{,}6 \qquad H = 70{,}4$

$0 = Z_8 \,.\, 0{,}943 - 5{,}6 \,.\, 6 + 70{,}4 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{6}{2} + 4 + 2)$

$Z_8\,(\max) = -\,24{,}6$ T.

$V = 5{,}6 \qquad H = 105{,}6$

$0 = Z_8 \,.\, 0{,}943 + 5{,}6 \,.\, 6 + 105{,}6 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{6}{2} + 4 + 2) + 4\,(\tfrac{6}{2} + 4 + 2)$

$Z_8\,(\min) = -\,152{,}8$ T.

Z_9.

(Belastungsscheide im 9ten Felde.)

$V = 7{,}2 \qquad H = 76{,}8$

$0 = Z_9 \,.\, 0{,}698 - 7{,}2 \,.\, 4 + 76{,}8 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{4}{2} + 2)$

$Z_9\,(\max) = -\,27{,}5$ T.

$V = 7{,}2 \qquad H = 99{,}2$

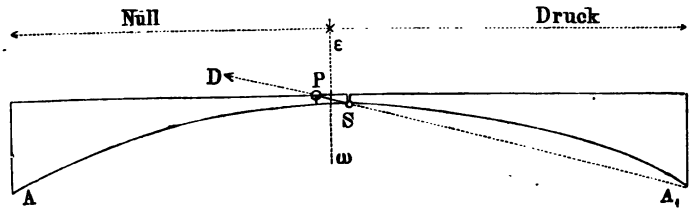
$0 = Z_9 \,.\, 0{,}698 + 7{,}2 \,.\, 4 + 99{,}2 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4\,(\tfrac{4}{2} + 2) + 4\,(\tfrac{4}{2} + 2)$

$Z_9\,(\min) = -\,149{,}0$ T.

Z_{10}.

Bei der Bestimmung von Z_{10} findet zwar keine Abweichung von dem vorigen Verfahren statt, es ist nur zu bemerken, dass hier die Druckabtheilung allein vorhanden ist, und dass die andere — im Gegensatze zu den vorigen Fällen — nicht mit

Fig. 195.



„Zug“, sondern vielmehr mit „Null“ zu bezeichnen ist (s. Fig. **195**). Denn die Richtung der Linie $A_1\,S$ fällt zufällig mit der Diagonale

Fig. 196.

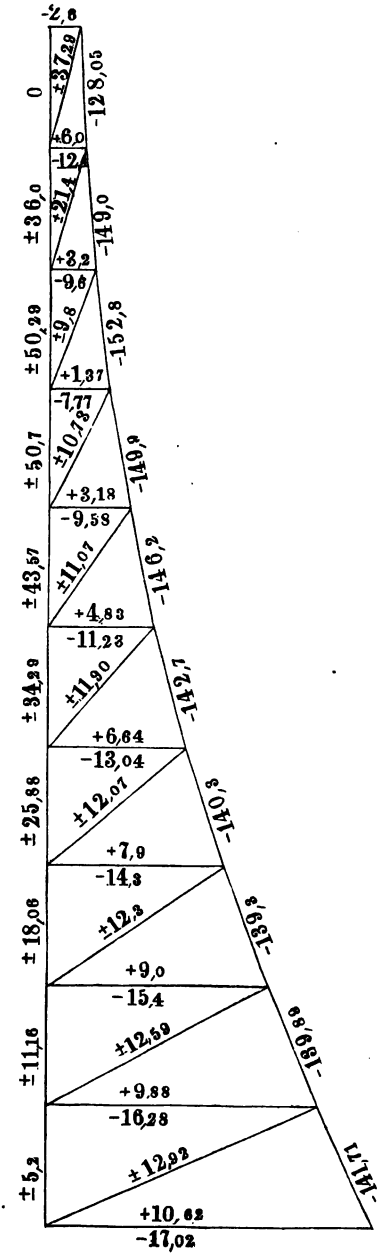
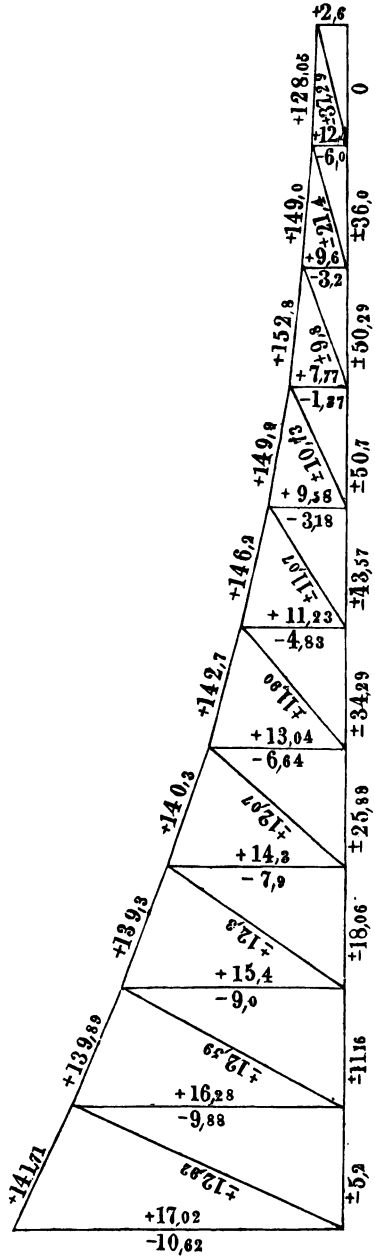


Fig. 197.



des 10ten Feldes zusammen, und jede Belastung links von der Schnittlinie $\varepsilon\,\omega$ wirkt daher auf das Stück $S\,\varepsilon\,\omega$ nur mittelst des von ihr hervorgebrachten Scheiteldrucks D, welcher durch den Drehpunkt P für die aufzustellende Momenten-Gleichung hindurch geht, folglich die Spannung Null in dem Stücke Z_{10} erzeugt.

Wenn man consequenter Weise auch für Z_{10} das Maximum und das Minimum bestimmen will, so kann man das eine Mal den Träger ganz leer (wenn man will, auch bis zum Punkte P hin belastet) und das andere Mal voll belastet (wenn man will, auch nur die rechte Seite bis zum Schnitt $\varepsilon\,\omega$ hin belastet) annehmen, und erhält dann die Gleichungen:

$$V = 0 \qquad H = 48$$

$$0 = Z_{10} \,.\, 0{,}5498 + 48 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4 \,.\, \tfrac{2}{3}$$

$$Z_{10}\,(\max) = -\,48{,}02 \text{ T.}$$

$$V = 0 \qquad H = 128$$

$$0 = Z_{10} \,.\, 0{,}5498 + 128 \,.\, 0{,}5 + 2{,}4 \,.\, \tfrac{2}{3} + 4 \,.\, \tfrac{2}{3}$$

$$Z_{10}\,(\min) = -\,128{,}05 \text{ T.}$$

Die Resultate der ganzen Rechnung sind in Fig. **196** übersichtlich zusammengestellt.

Wenn man in Fig. **196** statt eines jeden Plus-Zeichens ein Minus-Zeichen, statt eines jeden Minus-Zeichens ein Plus-Zeichen setzt, so gelten die Zahlen für dieselbe Brücke, wenn sie als Hängebrücke construirt ist, d. h. wenn sie in umgekehrter Lage an den beiden Punkten A und A_1 aufgehängt ist. Die in Fig. **197** eingeschriebenen Zahlen sind also die Spannungszahlen für eine solche Hängebrücke, welche der Form nach mit der vorigen congruent ist.

§ 23.

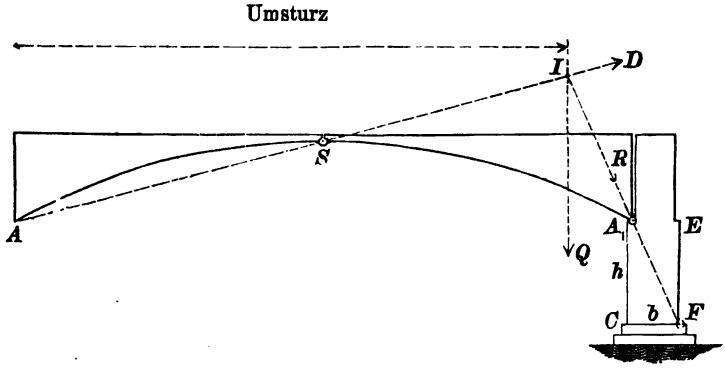
Stabilität der Pfeiler.

Dieselbe Methode, welche bei den vorigen Rechnungen angewendet wurde, um die grössten Spannungszahlen zu finden, kann man auch benutzen, um die Stabilität der Pfeiler zu prüfen und zu untersuchen, bei welcher Belastungsweise die Gefahr des Umsturzes am grössten wird.

Die Kraft, welche den Pfeiler umzuwerfen strebt, ist die horizontale Seitenkraft des auf den Auflagerdruck ausgeübten Drucks. Begünstigt wird die Stabilität des Pfeilers durch die verticale Seitenkraft dieses Drucks. Beide werden bei voller Belastung der Brücke am grössten. Es entsteht also die Frage, ob nicht bei partieller Belastung der Ueberschuss des Momentes der Horizontalkraft einen grösseren Werth erlangen kann, als bei voller Belastung, und wie gross dieser grösste Werth des Umsturz-Momentes werden kann.

Die Antwort auf diese Frage findet man, indem man nach dem früher befolgten Princip zunächst diejenige Stelle der Brücke aufsucht, wo ein Gewicht liegen muss, um gar keinen Einfluss auf die Stabilität des Pfeilers zu äussern. Das Umkippen würde in einer Drehung um den Punkt F bestehen (s. Fig. **198**). Soll

Fig. 198.



eine Kraft diese Drehung weder befördern noch verhindern, so muss sie durch den Drehpunkt hindurch gehen. Verlängert man die Richtungen FA_1 und AS bis zu ihrem Durchschnittspunkte I, so erhält man die Stelle, wo ein Gewicht Q liegen muss, um mit dem von ihm hervorgebrachten Scheiteldruck D zusammen eine Mittelkraft R zu erzeugen, welche gerade durch den Drehpunkt F hindurchgeht. Für ein weiter rechts liegendes Gewicht würde diese Kraft innerhalb, für eine weiter links liegende Kraft ausserhalb an dem Punkte F vorbeigehen. Die durch den Punkt I gelegte Verticale theilt also als Belastungsscheide die Brücke in zwei Abtheilungen, von denen die links liegende allein belastet

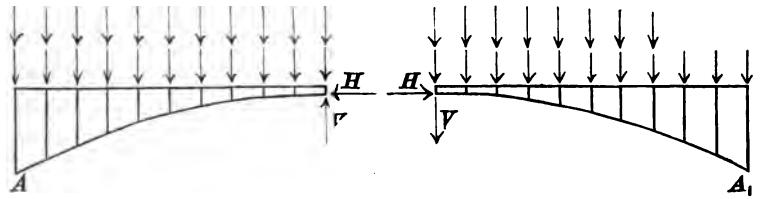
sein muss, wenn das Umsturz-Moment seinen grössten Werth annehmen soll. Die Lage dieser Linie hängt ab von dem Verhältniss $\frac{h}{b}$ der Höhe des Pfeilers (bis zum Auflagerpunkte A_1 gerechnet) zur Breite desselben.

Wenn beispielsweise angenommen wird, dass für die vorige Brücke dieses Verhältniss

$$\frac{h}{b} = 2$$

ist, so fällt die Belastungsscheide in das 18te Feld und man erhält bei Belastung der Umsturz-Abtheilung für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks aus Fig. **199** die Momenten-Gleichungen:

Fig. 199.



$$0 = -V \cdot 20 + H \cdot 5 - 2{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 2) - 4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 6)$$
$$0 = -V \cdot 20 - H \cdot 5 + 2{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 2) + 4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 2)$$
$$V = 0{,}6 \qquad H = 125{,}6.$$

Hiernach erhält man für den grössten Werth des Umsturz-Momentes die Gleichung:

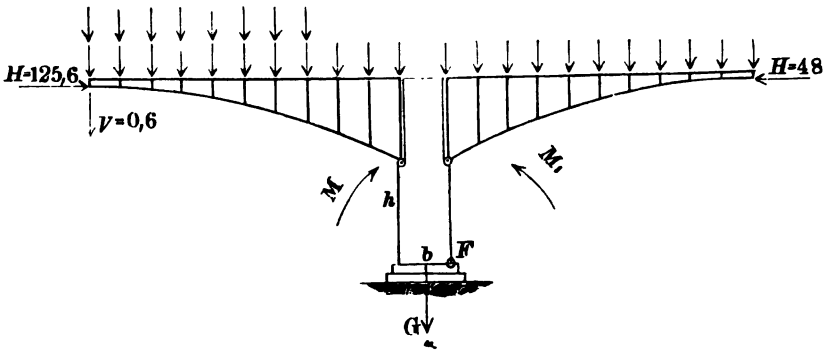
$$\frac{M}{2} = -0{,}6\,(b + 20) + 125{,}6\,(h + 5)$$
$$- 2{,}4\left[\left(\tfrac{20+b}{2}\right) + (18 + b) + \ldots + (2 + b) + \tfrac{b}{2}\right]$$
$$- 4\left[\left(\tfrac{20+b}{2}\right) + (18 + b) + \ldots + (6 + b)\right],$$

worin M das von der ganzen (aus zwei Tragwänden bestehenden) Brücke hervorgebrachte Moment bedeutet (s. Fig. **200**).

Diesem Umsturz-Momente wirken entgegen: erstens das Stabilitäts-Moment des Pfeilers, zweitens, wenn derselbe als Mittelpfeiler zwei angrenzenden Brücken-Abtheilungen als Stütze dient, auch das Moment, welches von der anderen Brücken-

Oeffnung her auf den Pfeiler übertragen wird. Letzteres Moment, welches natürlich ebenfalls auf den Punkt F zu beziehen ist,

Fig. 200.



wird dann am kleinsten, wenn diese andere Oeffnung ganz unbelastet ist, denn jedes dort aufgelegte Gewicht erzeugt für den Pfeiler eine Kraft, welche links an dem Punkte F vorbei geht. Die Gefahr des Umsturzes wird also am grössten, wenn die angrenzende Oeffnung ganz unbelastet ist. Für diesen Fall wird, wie früher gefunden, $H = 48$ und man erhält für das Gegen-Moment die Gleichung:

$$\frac{M_1}{2} = 48 \,.\, (5 + h) - 2{,}4\,(\tfrac{20}{2} + 18 + \ldots 2),$$

worin M_1 das ganze — zwei Tragwänden entsprechende — Gegen-Moment bezeichnet.

Die Bedingung also, welche erfüllt sein muss, wenn der Pfeiler nicht umkippen soll, lässt sich, wenn das Gewicht desselben mit G bezeichnet wird, durch folgende Ungleichung ausdrücken:

$$G \,.\, \frac{b}{2} > M - M_1,$$

aus welcher, wenn darin für M und M_1 ihre Werthe substituirt werden, die erforderlichen Dimensionen des Pfeilers bestimmt werden können.

§ 24.

Theorie der Scharnier-Brücken.

Obwohl es zur speciellen numerischen Berechnung einer vorliegenden Construction dieser Art keiner weiteren Theorie bedarf, wie die vorigen Zahlenbeispiele beweisen, so ist es doch nicht ohne Nutzen, über derartige Brücken von etwas allgemeineren Gesichtspunkten aus einige Untersuchungen anzustellen, um zu erkennen, worauf es bei der Construction einer solchen Brücke hauptsächlich ankommt.

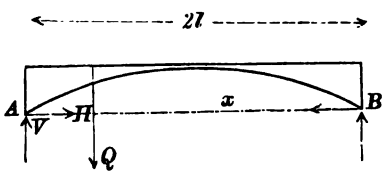
Sobald die **Richtungen** der Auflagerdrücke bekannt sind, kann man für jede gegebene Stangenverbindung mittelst der Methode der statischen Momente die Spannungszahlen berechnen. Bei allen Balkenbrücken — wie die in den vier ersten Abschnitten berechneten Constructionen im Gegensatze zu dem in diesem sechsten Abschnitt untersuchten genannt werden können — fand hinsichtlich dieser Richtungen keine Unbestimmtheit statt, weil bei jenen Brücken die Auflagerung an den Stützpunkten so beschaffen ist, dass von den letzteren nur verticale Gegendrücke zu erwarten sind. Bei den Sprengwerk- und Bogenbrücken dagegen gesellen sich zu den verticalen noch die **horizontalen** Gegendrücke der Auflagerpunkte und nur dann, wenn auch diese bestimmbar sind, können die Spannungszahlen genau berechnet werden.

Diese horizontalen Gegendrücke sind aber nur dann bestimmbar, wenn an irgend einer Stelle die Continuität des Trägers unterbrochen und daselbst ein Scharnier (oder ein ähnliches bewegliches Verbindungsglied) eingeschaltet ist. Von der Richtigkeit dieser Behauptung kann man sich auf folgende Weise überzeugen.

Wie in der „Theorie der parabolischen Träger“ (s. § 8) früher nachgewiesen, bildet die parabolische Form die Gleichgewichtsform einer an beiden Endpunkten unterstützten Kette, welche mit einer gleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilten Belastung bedeckt ist. Die Stützpunkte derselben leisten verticale und horizontale Gegendrücke, deren Grösse genau bestimmt werden konnte. Sobald entweder dieses Belastungsgesetz oder diese Form der Kette die geringste Aenderung erlitte, würde die Kette sofort zusammenstürzen, wenn nicht durch sonstige Mittel der Gleichgewichtszustand aufrecht erhalten würde. Solcher

Mittel können zweierlei Arten unterschieden werden: sie können darin bestehen, dass man die Beweglichkeit der Kettenglieder aufhebt, indem man sie zu einem steifen Bogen verbindet, dessen Biegungswiderstand der Formänderung entgegenwirkt, oder darin, dass man der Kette die Beweglichkeit ihrer Glieder zwar lässt, aber durch Hinzufügung eines Absteifungs-Systems, d. h. eines aus horizontalen, diagonalen und verticalen Stangen gebildeten Systems von Dreiecken die Verschiebbarkeit aufhebt. In beiden Fällen wird das Ganze in einen steifen Balken verwandelt, der aber an seinen Stützpunkten nicht blos durch verticale, sondern auch durch horizontale Druckkräfte im Gleichgewicht gehalten wird.

Fig. 201.



Die verticalen Gegendrücke haben immer einen ganz bestimmten Werth, wie man sofort erkennt, wenn man z. B. für Fig. **201** oder Fig. **202** die Momenten-Gleichung in Beziehung auf den Stützpunkt B bildet:

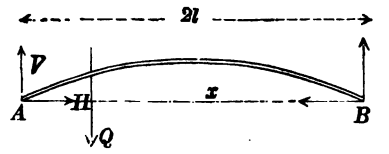
$$0 = V \cdot 2l - Qx$$

oder

$$V = Q\frac{x}{2l}.$$

Was dagegen die horizontalen Gegendrücke betrifft, so giebt es für sie unendlich viele verschiedene Werthe, welche der Bedingung des Gleichgewichts genügen, denn diese Bedingung besteht nur darin: dass der in dem Punkte A wirkende Horizontaldruck gleiche Grösse und entgegengesetzte Richtung mit dem in B wirkenden haben muss.

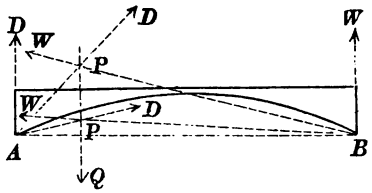
Fig. 202.



Man kann diese Bedingung auch so ausdrücken: die Mittelkräfte D und W aus den horizontalen und verticalen Drücken müssen mit der Richtung von Q in **einem** Punkte P zusammentreffen, damit ihre Mittelkraft durch die Kraft Q aufgehoben werde. Wo aber dieses Zusammentreffen erfolgt, das hängt von der Grösse der Horizontalkräfte ab. Der Punkt P wird oberhalb der Horizontalen $A\,B$ liegen (s. Fig. **203**), wenn die Horizontalkräfte nach innen, unterhalb, wenn sie nach aussen wirken (s. Fig. **204**); er

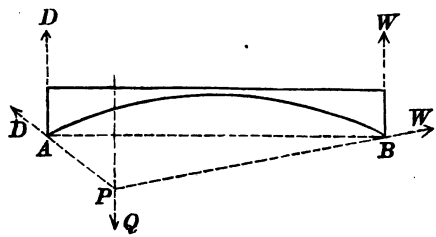
liegt in geringer Entfernung von der Horizontalen $A\,B$, wenn die Horizontalkräfte gross sind, in grosser Entfernung, wenn sie klein sind, in unendlich grosser Entfernung, wenn sie Null sind.

Fig. 203



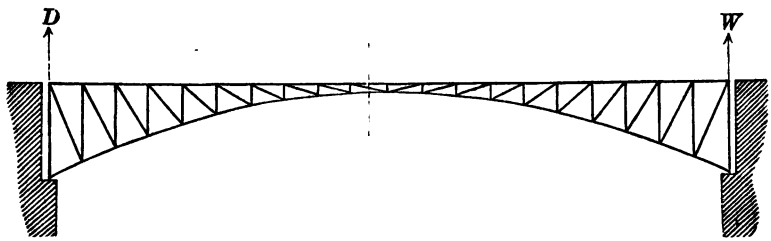
Wie gross nun aber in Wirklichkeit diese Horizontalkräfte sind, das hängt ab: von der Art der Aufstellung und Befestigung, von der Widerstandsfähigkeit der Widerlager, von der Temperatur etc., kurz von mancherlei Umständen und Zufälligkeiten, welche zum grösseren Theile der Rechnung gänzlich sich entziehen. Nichtsdestoweniger sind diese Umstände von der grössten Bedeutung für die Sicherheit der Construction. Sowohl durch sehr grosse als durch sehr kleine Werthe der Horizontalkräfte kann die Sicherheit der Construction gefährdet werden. Das erstere bedarf keines weiteren Beweises; das letztere aber ist leicht an einem Beispiele nachzuweisen.

Fig. 204.



Wenn die oben berechnete Bogenbrücke ohne Scharnier construirt wäre und in Folge eines geringen Ausweichens der Widerlager die horizontalen Gegendrücke derselben ganz aufhörten zu wirken, so würde die Brücke als Balkenbrücke (s. Fig. **205**) nach

Fig. 205.



den früheren Regeln zu berechnen sein und z. B. für das Stück X_{10} folgende Momenten-Gleichungen sich ergeben:

$$0 = X_{10} \cdot 0{,}5 + 6{,}4\,[(\tfrac{1}{20} + \tfrac{2}{20} + \ldots \tfrac{10}{20})\,20 + (\tfrac{11}{20} \cdot 20 - 2) + (\tfrac{12}{20} \cdot 20 - 4) + \ldots + (\tfrac{19}{20} \cdot 20 - 18)]$$

$$X_{10}\,(\min) = -\,1280\ \text{T.},$$

während bei der Scharnier-Brücke die stärkste Spannung in den horizontalen Stangen nur $\pm$ 50,7 T. (im 7ten Felde nämlich) beträgt.

Ebenso würde für Z_{10} die Gleichung sich ergeben:

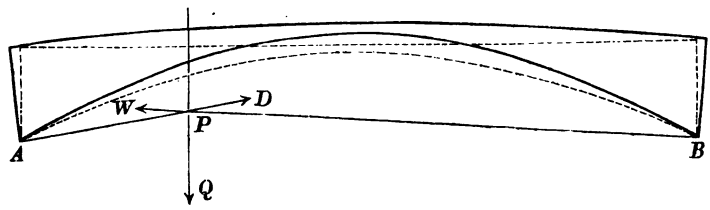
$$0 = -\,Z_{10} \cdot 0{,}5498 + 6{,}4\,[(\tfrac{1}{20} + \tfrac{2}{20} + \ldots \tfrac{11}{20})\,18 + (\tfrac{12}{20} \cdot 18 - 2) + (\tfrac{13}{20} \cdot 18 - 4) + \ldots + (\tfrac{19}{20} \cdot 18 - 16)]$$

$$Z_{10}\,(\max) = +\,1229\ \text{T.},$$

während früher nur — 128,05 T. als stärkste Spannuug in diesem Stücke gefunden wurde. Es würde also die Spannung im Bogen stellenweise auf fast das Zehnfache und in den horizontalen Stangen auf mehr noch als das Zehnfache sich steigern können, wenn das Scharnier weggelassen würde.

Dass in dem umgekehrten Falle, wenn die Widerlager unbeweglich bleiben, während der Brückenkörper — fest eingeklemmt zwischen den beiden Punkten A und B — durch Temperatur-Erhöhung ausgedehnt wird, ebenfalls die Spannung einzelner Theile bis zum Uebermaass gesteigert werden kann, ist nicht schwer einzusehen. In diesem Falle liegt die Gefahr in dem Wachsen der Horizontalkräfte, wobei die Auflagerdrücke mehr der horizontalen Richtung sich nähern (s. F. **206**).

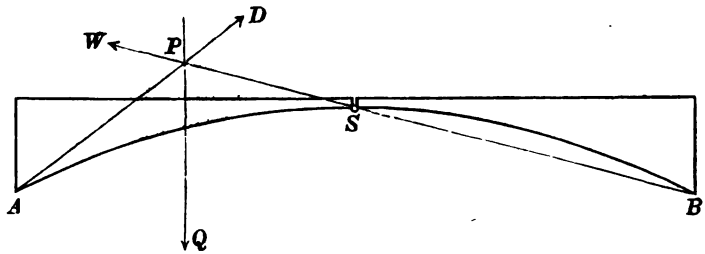
Fig. 206.



Diese Unbestimmtheit nun, so wie die Gefahr, welche dieselbe mit sich bringt, fällt gänzlich weg, sobald durch die Scheitelfuge und das Scharnier den Widerlagerdrücken eine ganz bestimmte Richtung angewiesen wird. Schon früher ist nachgewiesen,

dass in diesem Falle der von einem Gewichte Q an der unbelasteten Hälfte hervorgerufene Widerlagerdruck W stets durch den Scharnierpunkt S hindurchgeht; dadurch wird der Punkt P und mit ihm die Richtung des anderen Widerlagerdrucks sofort festgelegt (s. Fig. **207**). Beim Ausweichen der Widerlager wird

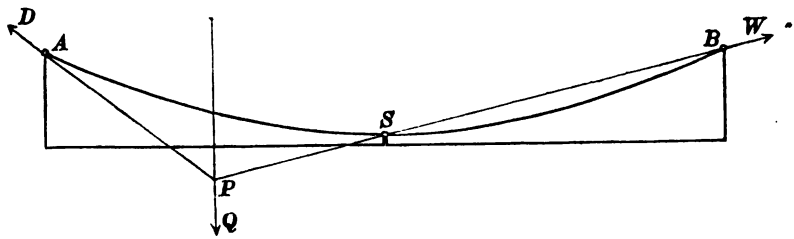
Fig. 207.



die Fuge sich ein wenig schliessen, bei Temperatur-Erhöhungen sich ein wenig öffnen und niemals kann eine Steigerung oder Verminderung der von den Punkten A und B ausgeübten Horizontal-Drücke anders als durch Veränderung des Belastungszustandes bewirkt werden.

Schon in § 8 ist darauf hingewiesen und am Schlusse von § 22 noch einmal hervorgehoben, dass hinsichtlich der Berechnungsweise gar kein Unterschied stattfindet zwischen der (bisher sogenannten) Bogenbrücke, d. h. einer solchen, deren Bogen seine convexe Seite nach oben kehrt, und einer hängenden Bogenbrücke, wie die in Fig. **208** dargestellte. Kehrt man erst die

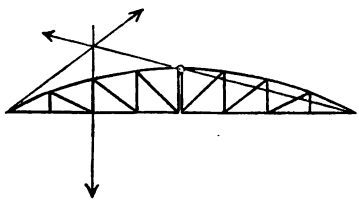
Fig. 208.



Figur und nachher alle Kraftrichtungen um, so erhält man aus Fig. **207** die Fig. **208**, und es ist leicht einzusehen, dass alles in

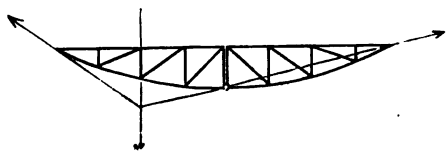
Bezug auf die erstere Nachgewiesene auch für die letztere Gültigkeit behält.

Fig. 209.



Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass das Princip der Scharnier-Brücken noch mannigfacher Modificationen fähig ist und sollen hier nur noch die in Fig. **209** und Fig. **210** dargestellten Formen erwähnt werden. Erstere kann als ein parabolischer Träger von der Form Fig. **39** angesehen werden, bei welchem das horizontale Zugband in der Mitte durchgeschnitten und statt dessen die Horizontalwiderstände der Auflagerpunkte als Ersatzkräfte in Anspruch genommen sind, und letztere als analoge Form mit hängender Kette. Die Berechnung solcher Brücken würde in ganz ähnlicher Weise, wie in § 21 und § 22 beschrieben, geschehen können.

Fig. 210.



Siebenter Abschnitt.

---

§ 25.

Transformation der Spannungszahlen für veränderte Spannweiten.

In den vorigen Abschnitten ist mit Absicht die Rechnung ganz ausführlich mitgetheilt und für jedes einzelne Stück die Momenten-Gleichung angegeben worden, weil die einmal gefundenen Zahlen und Gleichungen noch auf mannigfache Weise verwerthet werden können für Constructionen, welche den dort berechneten **geometrisch ähnlich** sind, d. h. für solche Constructionen,

die nur darin von jenen abweichen, dass ihnen eine andere Längeneinheit, ein anderer Maassstab zum Grunde liegt.

Die gefundenen Gleichungen und Zahlen würden sogar unmittelbar gültig bleiben für Constructionen von grösseren oder kleineren Spannweiten, wenn nicht die Belastungen und namentlich die Verhältnisse der permanenten zu den mobilen Belastungen sich änderten. Denn ob die Längeneinheit Fuss, Meter, Klafter oder Ruthe genannt wird, das macht hinsichtlich der Momenten-Gleichung und folglich auch hinsichtlich des Resultates gar keinen Unterschied, weil in den Gleichungen immer nur die **Verhältnisse** der Hebelarme, nicht aber deren absolute Längen, von Einfluss sind.

Wenn also bei Vergrösserung der Spannweite die permanente Last für jeden Belastungspunkt in demselben Verhältniss zunähme wie die mobile Last, so braucht man nur sämmtliche Spannungszahlen mit dieser gemeinschaftlichen Verhältnisszahl zu multipliciren, um die neuen Spannungszahlen zu erhalten. Dies ist aber im Allgemeinen nicht der Fall, es wächst vielmehr bei zunehmender Spannweite die permanente Last meistens rascher als die mobile Last und in Folge dessen äussert sich der Einfluss der Vergrösserung des Maassstabes bei verschiedenen Constructionstheilen in verschiedener Weise. Die hier zu lösende Aufgabe besteht also darin, diese Unterschiede zu ermitteln und mit Berücksichtigung derselben auf möglichst einfache Weise die neuen Spannungszahlen aus den früher gefundenen abzuleiten.

Für die früher schon berechnete Construction sollen mit p und m resp. die permanente und mobile Belastung eines Belastungspunktes bezeichnet werden, für die neu zu berechnende mit p_1 und m_1.

Jede Spannungszahl kann man sich in zwei Theile zerlegt denken, von denen der eine durch die permanente, der andere durch die mobile Belastung für sich allein hervorgebracht wird. Multiplicirt man ersteren mit der Verhältnisszahl $\frac{p_1}{p}$, letzteren mit der Verhältnisszahl $\frac{m_1}{m}$, so bildet die Vereinigung der beiden so erhaltenen Zahlen die neue Spannungszahl.

Hinsichtlich ihres Verhaltens gegen den Einfluss der permanenten und mobilen Last zerfallen nun die Constructionstheile in drei verschiedene Gruppen:

Die erste umfasst alle diejenigen Theile, deren Spannungszahlen ganz allein von der mobilen Last abhängen; für sie erhält man die neuen Spannungszahlen, indem man die früher gefundenen mit der Verhältnisszahl $\frac{m_1}{m}$ multiplicirt.

Die zweite Gruppe umfasst alle diejenigen Theile, deren Spannungszahlen ausschliesslich durch die Grösse der Totalbelastung $(p+m)$ bedingt werden. Für sie erhält man die neuen Spannungszahlen, wenn man die alten mit der Verhältnisszahl $\frac{p_1+m_1}{p+m}$ multiplicirt.

In der dritten Gruppe endlich sind alle die Theile enthalten, welche den beiden vorigen nicht angehören, also diejenigen, bei welchen jede von den beiden Belastungen in besonderer Weise ihren Einfluss geltend macht. Für einen solchen Theil erhält man die neue Spannungszahl, indem man die von der permanenten Last hervorgebrachte Spannung mit $\frac{p_1}{p}$, den Rest mit $\frac{m_1}{m}$ multiplicirt und die beiden Zahlen dann wieder zu Einer vereinigt.

Also nur die letzte Classe erfordert eine neue Berechnung — und zwar eine meistens sehr leicht auszuführende — für die ersten beiden dagegen lassen sich die beiden Zahlen auf eine sehr einfache Weise aus den früher gefundenen ableiten, wie dies jetzt an einigen Beispielen gezeigt werden soll.

a. Parabolischer Träger.

Hier gehören die Diagonalen der ersten, die Horizontalen und Bogenstücke der zweiten, die Verticalständer der dritten Gruppe an.

Um beispielsweise aus der Zahlen-Figur **27** die Spannungszahlen für einen ihr geometrisch ähnlichen Träger von 48^m Spannweite abzuleiten, bei welchem die permanente Belastung 8000^k, die mobile 12000^k für jeden Knotenpunkt beträgt, hat man die 6 Diagonalzahlen mit der Zahl

$$\frac{12000}{5000} = 2{,}4$$

zu multipliciren und erhält als neue Spannungszahlen:

$\pm$ 15000, $\pm$ 16400, $\pm$ 17000, $\pm$ 16400, $\pm$ 15000, $\pm$ 13130.

Die gemeinschaftliche Spannungszahl der horizontalen Stangen — 48000 ist mit der Zahl

$$\frac{8000+12000}{1000+5000} = \frac{10}{3}$$

zu multipliciren und erhält als neue Spannungszahl

$$-160000.$$

Ebenso sind die 4 Spannungszahlen der Bogenstücke mit $\frac{10}{8}$ zu multipliciren, und man erhält als neue Spannungszahlen:

$$+175000,\ +167700,\ +163000,\ +160300.$$

Die Spannungszahlen der Verticalständer sind zu zerlegen in den von der permanenten Last hervorgebrachten Theil, welcher für jeden

$$-1000$$

beträgt und den Rest, welchen man erhält, wenn man diese Zahl -1000 von der ganzen Spannungszahl subtrahirt. Diese Zerlegung ergiebt folgende Zahlen:

für die Maxima

$$\left\{\begin{matrix}-1000\\0\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}-1000\\+1560\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}-1000\\+2500\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}-1000\\+2800\end{matrix}\right\}$$

und für die Minima

$$\left\{\begin{matrix}-1000\\-5000\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}-1000\\-6560\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}-1000\\-7500\end{matrix}\right\}\quad\left\{\begin{matrix}-1000\\-7800\end{matrix}\right\}$$

Man erhält die neuen Spannungszahlen, indem man allemal den ersten Theil mit 8, den zweiten Theil mit 2,4 multiplicirt, also:

für die Maxima

$$\left\{\begin{matrix}-8000\\0\end{matrix}\right\}=-8000;\quad\left\{\begin{matrix}-8000\\+3740\end{matrix}\right\}=-4260;$$

$$\left\{\begin{matrix}-8000\\+6000\end{matrix}\right\}=-2000;\quad\left\{\begin{matrix}-8000\\+6720\end{matrix}\right\}=-1280$$

und für die Minima

$$\left\{\begin{matrix}-8000\\-12000\end{matrix}\right\}=-20000;\quad\left\{\begin{matrix}-8000\\-15700\end{matrix}\right\}=-23700;$$

$$\left\{\begin{matrix}-8000\\-18000\end{matrix}\right\}=-26000;\quad\left\{\begin{matrix}-8000\\-18700\end{matrix}\right\}=-26700.$$

Da bei den drei anderen Verticalständern dieselben Zahlen wiederkehren, so genügt die Transformation der Zahlen für die vier ersten.

b. Fachwerkbrücken mit parallelen Gurtungen.

Hier ist die erste jener drei Classen gar nicht vertreten, der zweiten Classe gehören sämmtliche horizontalen Stangen an, der dritten die Diagonalen und Verticalständer.

Um also z. B. aus der Zahlenfigur **57** die Spannungszahlen für eine ihr geometrisch ähnliche Fachwerkbrücke von 48^m Spannweite abzuleiten, bei welcher (wie im vorigen Falle angenommen wurde) die permanente Belastung 8000^k, die mobile 12000^k beträgt, hat man die vier verschiedenen Spannungszahlen der horizontalen Stangen mit

$$\frac{8000+12000}{1000+5000}=\frac{10}{3}$$

zu multipliciren und erhält die Zahlen:

70000, 120000, 150000, 160000,

welche negativ für die oberen, positiv für die unteren Stangen zu nehmen sind.

In Betreff der Diagonalen und Verticalständer wird es zwar ungefähr gleich viel Zeit in Anspruch nehmen, mag man die früher gefundenen Gleichungen nach Substitution der neuen Belastungszahlen noch einmal auflösen, oder consequent die vorige Methode durchführend auch hier durch Zerlegung der Spannungszahlen die neuen berechnen.

Indessen hat der letztere Weg doch noch den Vorzug, dass man bei dieser Gelegenheit auch die Spannungszahlen, welche die permanente Last für sich allein, so wie diejenigen, welche die mobile Last für sich allein hervorbringt, kennen lernt, und überhaupt in die Rolle, welche diese Stücke bei dem Zusammenwirken der Constructionstheile spielen, einen besseren Einblick erhält. Es soll deshalb hier der letztere Weg eingeschlagen und die Berechnung an der Diagonale und dem Verticalständer des 3ten Feldes gezeigt werden.

Für $Y_3 = -V_3 \cdot \sqrt{2}$ wurde in § 10 die Gleichung gefunden:

$$0 = Y_3 \cdot 0{,}707 - 1000\left[\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\ldots\tfrac{5}{8}\right)-\left(1-\tfrac{6}{8}\right)-\left(1-\tfrac{7}{8}\right)\right]$$
$$-5000\left(\tfrac{1}{8}+\tfrac{2}{8}+\ldots\tfrac{5}{8}\right)+5000\left[\left(1-\tfrac{6}{8}\right)+\left(1-\tfrac{7}{8}\right)\right].$$

Lässt man hierin einmal die beiden mit 5000 multiplicirten Glieder fort, und löst die Gleichung auf, so erhält man die der permanenten Belastung entsprechende Spannungszahl:

$$+2120$$

und wenn man ein anderes Mal die mit 1000 multiplicirten Glieder fortlässt, so erhält man die von der mobilen Last allein hervorgebrachten extremen Werthe:

$$+13260 \text{ und } -2650.$$

Die letzteren beiden sind mit der Verhältnisszahl

$$\frac{12000}{5000} = 2{,}4$$

zu multipliciren und hierauf mit dem ersteren, nachdem derselbe mit der Verhältnisszahl

$$\frac{8000}{1000} = 8$$

multiplicirt ist, wieder zu vereinigen, woraus für Maximum und Minimum der neuen Spannungszahl folgende Werthe sich ergeben:

$$\left\{\begin{matrix}+16960\\+31824\end{matrix}\right\} = +48784; \quad \left\{\begin{matrix}+16960\\-6360\end{matrix}\right\} = +10600.$$

Für den rechts angrenzenden Verticalständer erhält man die Spannungszahlen, indem man die vorigen mit $-\frac{1}{\sqrt{2}}$ multiplicirt, also:

$$\left\{\begin{matrix}-12000\\-22500\end{matrix}\right\} = -33500; \quad \left\{\begin{matrix}-12000\\+4500\end{matrix}\right\} = -7500.$$

c. Bogenbrücken und Hängebrücken.

Zu der ersten Classe gehören hier die diagonalen und die horizontalen Stangen, die zweite ist gar nicht vertreten, zu der dritten Classe gehören die Bogenstücke und die Verticalständer.

Wenn also z. B. eine Hängebrücke von 120^{m} Spannweite zu berechnen wäre, welche der in § 22 berechneten Bogenbrücke geometrisch ähnlich ist, und bei welcher die Belastung eines jeden Feldes 20 Tonnen an permanenter und 12 Tonnen an mobiler Last beträgt, so würde man die in Fig. **197** für die horizontalen Stangen eingeschriebenen Zahlen nur mit der Verhältnisszahl

$$\tfrac{12}{4} = 3$$

zu multipliren brauchen, um die neuen Spannungszahlen zu erhalten:

$$\pm 15{,}6 \,|\, \pm 33{,}48 \,|\, \pm 54{,}18 \,|\, \pm 77{,}64 \,|\, \pm 102{,}87 \,|\, \pm 130{,}71 \,|\, \pm 152{,}1$$
$$\pm 150{,}87 \,|\, \pm 108{,}0 \,|\, 0.$$

Sämmtliche für die Diagonalen eingeschriebenen Zahlen sind ebenfalls mit 3 zu multipliciren, man erhält also für die neue Brücke:

$$\pm 38{,}76 \,|\, \pm 37{,}77 \,|\, \pm 36{,}9 \,|\, \pm 36{,}21 \,|\, \pm 35{,}7 \,|\, \pm 33{,}21 \,|\, \pm 32{,}19 \,|\, \pm 29{,}4$$
$$\pm 64{,}2 \,|\, \pm 111{,}87.$$

Für die Verticalstangen können die früher gefundenen (für die Hängebrücke mit entgegengesetztem Vorzeichen zu nehmenden) Werthe von U_1, U_2 ... benutzt werden, welche den Einfluss der mobilen Last repräsentiren. Wenn man dieselben mit der Verhältnisszahl $\frac{12}{4} = 3$ multiplicirt, so erhält man:

für die Maxima

$+47{,}46 \mid +45{,}24 \mid +42{,}6 \mid +39{,}3 \mid +35{,}52 \mid +30{,}09 \mid +25{,}14$
$+19{,}71 \mid +25{,}2 \mid +33{,}6 \mid +6,$

für die Minima

$-35{,}46 \mid -33{,}24 \mid -30{,}6 \mid -27{,}3 \mid -23{,}52 \mid -18{,}09 \mid -13{,}14$
$-7{,}71 \mid -13{,}2 \mid -21{,}6 \mid 0.$

Die der permanenten Last entsprechende Spannungszahl betrug für jeden Verticalständer (mit Ausnahme des 11ten, welcher nur die Hälfte davon bekommt) + 1,2 und ist mit der Verhältnisszahl

$$\frac{20}{2{,}4} = 8{,}33 \ldots$$

zu multipliciren. Für die neue Brücke ist also die der permanenten Last entsprechende Spannungszahl:

$$1{,}2 \,.\, 8{,}33 \ldots = +10$$

und, wenn man diese mit den oben gefundenen vereinigt, so erhält man folgende neue Spannungszahlen für die Verticalstangen:

+ 57,46	+ 55,24	+ 52,6	+ 49,3	+ 45,52	+ 40,09	+ 35,14
— 25,46	— 23,24	— 20,6	— 17,3	— 13,52	— 8,09	— 3,14
+ 29,71	+ 35,2	+ 43,6	+ 11			
+ 2,29	— 3,2	— 11,6	+ 5			

Bei der Berechnung der neuen Spannungszahlen für die Bogenstücke bietet die Methode der Zerlegung der Spannungszahlen ebenfalls Vorzüge vor dem anderen Verfahren; denn der eine Theil, welcher der permanenten Last entspricht, lässt sich, da dieselbe gleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilt ist, einfach nach der Theorie der Kettenlinie (s. § 8) bestimmen. Den andern findet man durch Subtraction des Vorigen von der ganzen Spannungszahl. Die Resultate dieser Zerlegung der in Fig. **197** eingeschriebenen Zahlen sind folgende:

53,2	52,2	51,2	50,5	49,8	49,3	48,7	48,4	48,1	48
88,5	87,7	88,1	89,8	92,9	96,9	101,2	104,4	100,9	80

von denen die oberen der permanenten, die unteren der mobilen Last entsprechen.

Die ersteren sind mit der Verhältnisszahl

$$\frac{20}{2{,}4} = 8{,}33\ldots$$

die unteren mit der Verhältnisszahl

$$\frac{12}{4} = 3$$

zu multipliciren, woraus sich folgende Zahlen ergeben:

443	434,5	427	421	415	410	406	403	401	400
265	263	264	269	279	291	304	313	303	240

deren Vereinigung die neuen Spannungszahlen für die Bogenstücke liefert:

708 | 697,5 | 691 | 690 | 694 | 701 | 710 | 716 | 704 | 640.

Achter Abschnitt.

§ 26.

Hängebrücke von 120m Spannweite der Haupt-Oeffnung und je 60m Spannweite der Neben-Oeffnungen.

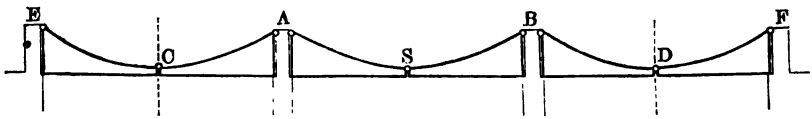
Die Vergleichung der Bogenbrücken und Hängebrücken hinsichtlich des Materialaufwandes ergiebt insofern für die letzteren ein ungünstiges Resultat, als bei ersteren die Befestigungspunkte tief liegen und durch den Horizontalschub gegen die Landseite hin gedrängt werden, während umgekehrt bei den Hängebrücken die Aufhängepunkte hoch liegen und überdies die Horizontalkräfte nach der Wasserseite hin die Pfeiler umzuwerfen streben — also nach derjenigen Seite hin, für welche ihr Stabilitäts-Moment gerade am kleinsten sein würde.

Während also die Bogenbrücken — namentlich wo feste felsige Ufer als natürliche Landpfeiler benutzt werden können — einen verhältnissmässig geringen Materialaufwand für letztere

erfordern, würde bei einer Hängebrücke dieser Aufwand eine übermässige Grösse erreichen, wenn man die Kette an den frei stehenden Landpfeilern aufhängen wollte.

Weniger ungünstig für Hängebrücken fällt der Vergleich aus, wenn mehrere solcher Brücken neben einander aufgehängt sind (s. Fig. **211**). An den Mittelpfeilern A und B heben alsdann —

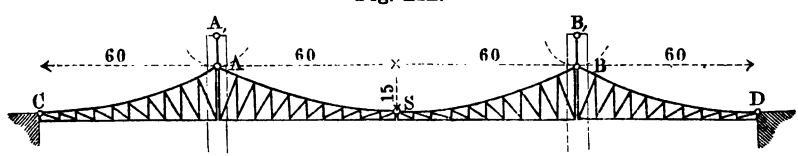
Fig. 211.



bei voller Belastung wenigstens — die Horizontalkräfte einander auf, nur bei den Landpfeilern E und F würde der Uebelstand derselbe bleiben. In einer solchen Construction würden bei voller Belastung sämmtliche Horizontal- und Diagonalstangen in spannungslosem Zustande sich befinden, vorausgesetzt, dass die Ketten parabolische Form haben.

In letzterer Beziehuug wird sich Nichts ändern, wenn man die Hälften CE und DF ganz weglässt und statt dessen die Punkte C und D befestigt. Es wird hierdurch der Vortheil erreicht, dass nun die Befestigungspunkte, welche dem Horizontalzuge widerstehen sollen, tiefer, also für die Stabilität der Landpfeiler günstiger zu liegen kommen. Wenn man überdies bei den Punkten A und B die Brücke an verticalen Hängestangen aufhängt, welche in den Punkten A_1 und B_1 ihre Aufhängepunkte haben, so werden dadurch die Mittelpfeiler — auch bei einseitiger Belastung — von allem Horizontalzuge gänzlich befreit werden, weil alsdann in den Punkten A_1 und B_1 nur vertical abwärts

Fig. 212.



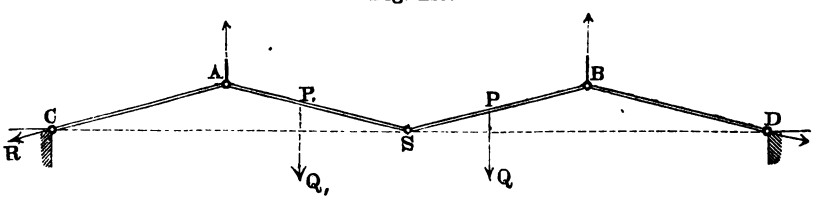
wirkende Kräfte auf die Pfeiler übertragen werden können (s. Fig. **212**). Für die Hauptbrücke AB dienen die angesetzten Hälften AC und BD als Spannketten, deren Material gleich-

zeitig für die Ueberbrückung der beiden Seitenöffnungen verwerthet wird.

Was die Art der Aufhängung in den 4 Punkten *A*, *B*, *C*, *D* betrifft, so ist die in Fig. **212** dargestellte hier nur vorläufig gewählt worden, um die Aufgabe zunächst in ihrer einfachsten, übersichtlichsten Form erscheinen zu lassen. Es wird sich später zeigen, dass die erwähnten Vortheile auch durch andere Art der Aufhängung erreicht werden können.

Eine solche Brücke kann, im Grossen und Ganzen betrachtet, als eine Verbindung von 4 Stangen angesehen werden, welche unter einander durch Gelenkbolzen verbunden, von den beiden festen Punkten *C*, *D* und ausserdem in *A* und *B* durch verticale Hängestangen getragen werden (s. Fig. **213**). Betrachtet man

Fig. 213.

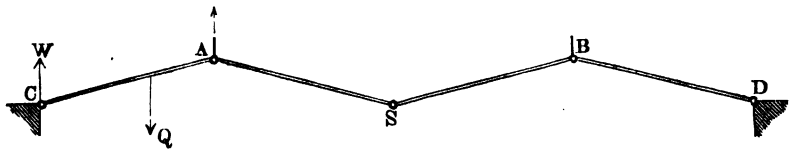


diese Stangen zunächst als gewichtlos und untersucht, welche Wirkung durch ein einzelnes irgendwo aufgehängtes Gewicht *Q* in dem System hervorgebracht wird, so überzeugt man sich leicht davon, dass bei einer **unbelasteten** Stange die an einem ihrer Endpunkte wirkende Kraft immer mit der Richtung der Stange zusammenfallen muss, weil sie sonst dieselbe um den anderen Endpunkt drehen würde. Ein Gewicht *Q* an der Stelle *P* kann daher an dem Auflagerpunkte *C* nur einen Widerstand *R* hervorbringen, welcher mit der Richtung *AC* zusammenfällt; ein Gewicht Q_1 an der Stelle P_1 erzeugt daselbst ebenfalls einen Widerstand, der in die Richtung *AC* fällt.

Wenn dagegen irgendwo an der Stange *AC* ein Gewicht *Q* aufgehängt wird, so erzeugt dasselbe in dem Punkte *C* nur einen verticalen Widerstand *W* (s. Fig. **214**). Denn käme die geringste horizontale Seitenkraft hinzu, so müsste auch in dem Punkte *A* und folglich auch in dem Punkte *S* ein Horizontalzug stattfinden. Es kann aber in dem Punkte *S* bei diesem Belastungszustande überhaupt kein Zug wirken, denn da beide Stangen *AS* und *BS* unbelastet sind, so müsste dieser Zug — der oben

erwähnten Bedingung entsprechend — mit beiden Stangenrichtungen zugleich zusammenfallen, was unmöglich ist. Eine Be-

Fig. 214.



lastung der Stange AC hat demnach durchaus keine Wirkung auf die drei anderen Stangen $ASBD$.

Es verhält sich also die Stange AC, wenn sie allein belastet wird, genau wie ein an beiden Enden unterstützter Balken, und die Stangen ASB, wenn sie belastet werden, befinden sich genau in demselben Zustande, wie wenn ihre Aufhängepunkte A und B feste Punkte wären.

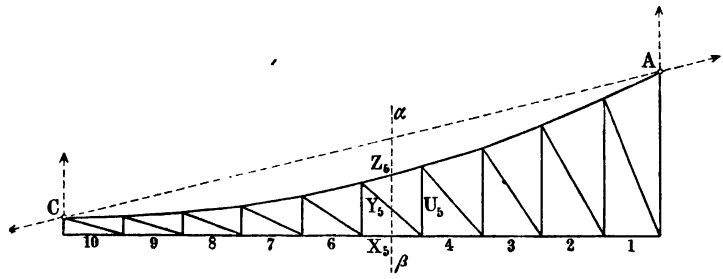
a. Berechnung der Hauptbrücke AB.

Die beiden Hälften AS und BS der Hauptbrücke sind demnach ganz so wie die Zahlenfigur **197** zu berechnen. Für sie gelten also, da sie ihrer Form nach jener Figur geometrisch ähnlich vorausgesetzt werden, die am Schlusse des vorigen Paragraphen für die neue Spannweite von 120^{m} bereits transformirten Spannungszahlen.

b. Berechnung der Nebenbrücke AC (Fig. **215**).

Auch die beiden Brückenabtheilungen AC und BD sind ihrer Form und Construction nach den beiden Hälften der in

Fig. 215.



§ 22 berechneten Bogenbrücke geometrisch ähnlich angenommen, und sind die gleichen Buchstaben für die Bezeichnung der gleich-

liegenden Stangen gewählt. Die Belastungen sind für die ganze Brücke dieselben, wie in § 25 c. angenommen wurde, nämlich 20 Tonnen permanenter und 12 Tonnen mobiler Last für jedes Feld. Bei der Berechnung der Spannungszahlen sind dieselben Principien zu befolgen, nach denen die Bogenbrücke in § 22 berechnet wurde. Für jede Stange ist die Voruntersuchung zu führen: welche Punkte der ganzen Brücke belastet werden müssen, wenn Zugspannung, und welche Punkte belastet werden müssen, wenn Druckspannung in ihr hervorgebracht werden soll. Bei dieser Untersuchung sind die oben bewiesenen beiden Sätze zu benutzen, welche hier noch einmal wiederholt werden sollen:

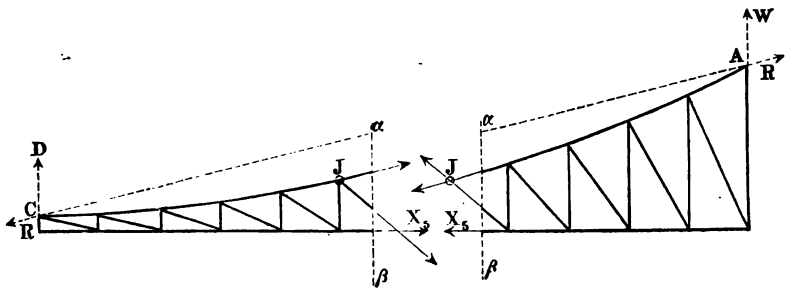
1) Eine Belastung der Hauptbrücke erzeugt für das Stück $A\,C$ an den Punkten A und C Gegendrücke R, welche in die Richtung $A\,C$ fallen.

2) Eine Belastung des Stücks $A\,C$ selbst erzeugt an den beiden Punkten A und C verticale Gegendrücke.

Berechnung der Spannungszahlen X für die horizontalen Stangen.

Zur Bestimmung von X_5 ist der Schnitt $\alpha\beta$ zu führen und entweder für das Stück Fig. **216** oder Fig. **217** die Momenten-

Fig. 216. Fig. 217.



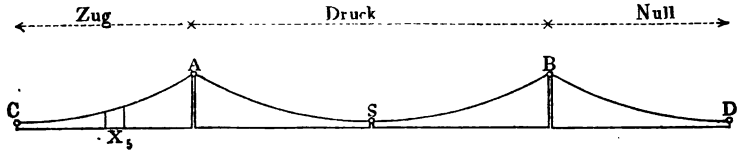
Gleichung in Bezug auf den Drehpunkt J aufzustellen. Eine Belastung des Stücks Fig. **216** erzeugt für das Stück Fig. **217** einen Gegendruck W, welcher links drehend wirkt. X_5 dreht rechts herum, wird also positiv dadurch gemacht. Mithin gehört das Stück $C\alpha\beta$ zur Zugabtheilung.

Eine Belastung des Stücks Fig. **217** erzeugt für das Stück Fig. **216** einen verticalen Gegendruck D, welcher rechts dreht, X_5 dreht in dieser Figur links herum, wird also positiv dadurch gemacht. Mithin gehört auch das Stück $A\alpha\beta$ zur Zugabtheilung.

Eine Belastung der Hauptbrücke erzeugt für das Stück Fig. **216** einen Gegendruck R, welcher links drehend wirkt, macht also X_5 negativ. Die ganze Hauptbrücke gehört also zur Druckabtheilung.

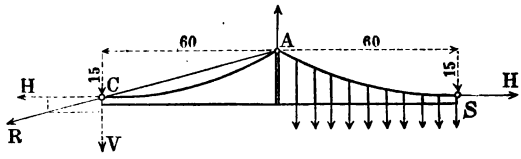
Eine Belastung der anderen Nebenbrücke BD übt gar keine Wirkung auf die Abtheilung AC aus; es ist folglich die Abtheilung BD mit der Ueberschrift Null zu bezeichnen (s. Fig. **218**).

Fig. 218.



Da bei gleichförmig über die ganze Brücke vertheilter Belastung die Spannungen sämmtlicher horizontalen Stangen Null werden, so kann das Eigengewicht ganz unberücksichtigt bleiben, und muss die Belastung der Zugabtheilung gerade so viel positive als die der Druckabtheilung negative Spannung in dem Stück X_5 erzeugen. Es braucht also nur einer von den beiden Werthen X_5 (max) und X_5 (min) berechnet zu werden, und man kann nach Belieben entweder die ganze Hauptbrücke oder die ganze Nebenbrücke belastet annehmen. Im ersteren Falle erhält man für den von der mobilen Last allein hervorgebrachten Horizontaldruck im Punkte S die Gleichung (s. Fig. **219**):

Fig. 219.



$$0 = -H \cdot 15 + 12\left(\tfrac{60}{2} + 54 + 48 + \ldots + 12 + 6\right)$$

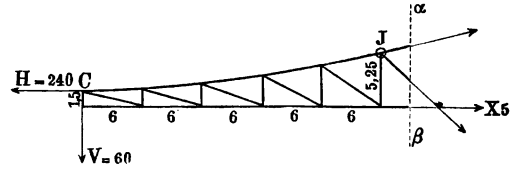
$$H = 240.$$

Genau so viel beträgt die horizontale Seitenkraft von R. Die verticale Seitenkraft von R steht zu der horizontalen in dem Verhältniss 15:60 oder 1:4; es ist also:

$$V = 60.$$

Man erhält also für X_5 aus Fig. **220** die Momenten-Gleichung:

Fig. 220.



$$0 = - X_5 \,.\, 5{,}25 + 240 \,.\, 3{,}75 - 60 \,.\, 30$$
$$X_5 \,(\min) = - 171{,}4 \text{ T.}$$

[Zur Gegenprobe kann man X_5 (max) berechnen, indem man des Stück $A\,C$ allein belastet annimmt und dasselbe als Balkenbrücke behandelt. Man erhält dann die Gleichung:

$$0 = - X_5 \,.\, 5{,}25 + 12\,[(\tfrac{1}{10} + \ldots \tfrac{5}{10})\,30 + (\tfrac{6}{10} \,.\, 30 - 6) + (\tfrac{7}{10} \,.\, 30 - 12) + (\tfrac{8}{10} \,.\, 30 - 18) + (\tfrac{9}{10} \,.\, 30 - 24)]$$
$$X_5 \,(\max) = + 171{,}4 \text{ T.},$$

durch welche die Richtigkeit dieser Rechnungsweise bestätigt wird.]

Für die anderen horizontalen Stangen erhält man in ähnlicher Weise die nachfolgenden Gleichungen:

$$0 = - X_1 \,.\, 13{,}65 + 240 \,.\, 12{,}15 - 60 \,.\, 54$$
$$X_1 = \pm 23{,}7 \text{ T.}$$
$$0 = - X_2 \,.\, 11{,}1 + 240 \,.\, 9{,}6 - 60 \,.\, 48$$
$$X_2 = \pm 51{,}9 \text{ T.}$$
$$0 = - X_3 \,.\, 8{,}85 + 240 \,.\, 7{,}35 - 60 \,.\, 42$$
$$X_3 = \pm 85{,}4 \text{ T.}$$
$$0 = - X_4 \,.\, 6{,}9 + 240 \,.\, 5{,}4 - 60 \,.\, 36$$
$$X_4 = \pm 125{,}2 \text{ T.}$$
$$0 = - X_6 \,.\, 3{,}9 + 240 \,.\, 2{,}4 - 60 \,.\, 24$$
$$X_6 = \pm 221{,}5 \text{ T.}$$
$$0 = X_7 \,.\, 2{,}85 + 240 \,.\, 1{,}35 - 60 \,.\, 18$$
$$X_7 = \pm 265{,}3 \text{ T.}$$
$$0 = - X_8 \,.\, 2{,}1 + 240 \,.\, 0{,}6 - 60 \,.\, 12$$
$$X_8 = \pm 274{,}3 \text{ T.}$$
$$0 = - X_9 \,.\, 1{,}65 + 240 \,.\, 0{,}15 - 60 \,.\, 6$$
$$X_9 = \pm 196{,}4 \text{ T.}$$
$$0 = - X_{10} \,.\, 1{,}5$$
$$X_{10} = 0.$$

Berechnung der Spannungszahlen Y für die Diagonalen.

Auch hier kann die permanente Last unberücksichtigt bleiben und braucht von den beiden extremen Werthen nur einer berechnet zu werden, weil Maximum und Minimum zusammen gleich Null sind.

Zur Bestimmung von Y_5 ist der Schnitt $\alpha\beta$ zu führen und die Momenten-Gleichung entweder für das Stück Fig. **221** oder für das Stück Fig. **222** aufzustellen in Bezug auf den Drehpunkt L.

Fig. 221.

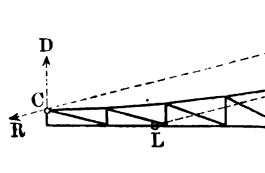
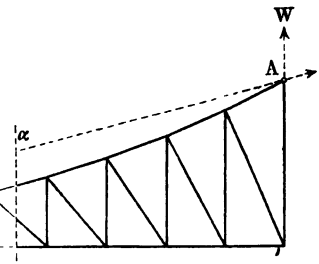


Fig. 222.

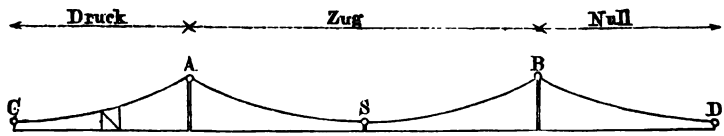


Eine Belastung der Hauptbrücke erzeugt in dem Punkte C einen Gegendruck R, welcher links um den Punkt L dreht, also Y_5 positiv macht.

Eine Belastung des Stücks $A\,\alpha\,\beta$ erzeugt in dem Punkte C einen vertical aufwärts gerichteten Gegendruck D, welcher in gleichem Sinne mit Y_5 dreht, also Y_5 negativ macht.

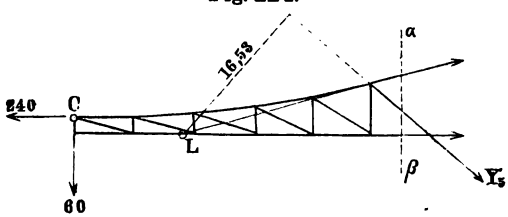
Eine Belastung des Stücks $C\,\alpha\,\beta$ erzeugt in dem Punkte A (Fig. **222**) einen Gegendruck W, welcher mit Y_5 gleiche Drehungs-

Fig. 223.



richtung hat, also Y_5 negativ macht. Mithin bilden sich die in Fig. **223** angegebenen Belastungsabtheilungen und man hat, um

Fig. 224.



Y_5 (max) zu bestimmen, die Hauptbrücke belastet anzunehmen, wobei in dem Punkte C wiederum die Gegendrücke entstehen:

$H = 240$; $V = 60$.

Man erhält also aus Fig. **224** die Momenten-Gleichung:

$$0 = Y_5 \,.\, 16{,}53 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 10{,}92$$

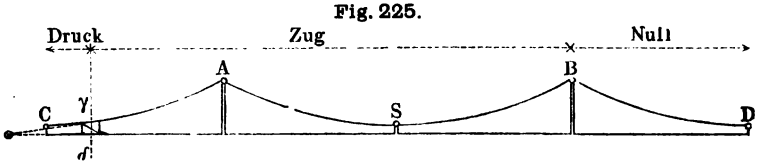
$$Y_5 = \pm 61{,}4 \text{ T.}$$

Auf ähnliche Weise ergeben sich für die übrigen Y folgende Gleichungen:

$$0 = Y_1 \cdot 31{,}8 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 25{,}26$$
$$Y_1 = \pm 59{,}0 \text{ T.}$$
$$0 = Y_2 \cdot 28{,}26 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 21{,}88$$
$$Y_2 = \pm 59{,}2 \text{ T.}$$
$$0 = Y_3 \cdot 24{,}48 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 18{,}39$$
$$Y_3 = \pm 59{,}8 \text{ T.}$$
$$0 = Y_4 \cdot 20{,}5 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 14{,}77$$
$$Y_4 = \pm 60{,}8 \text{ T.}$$
$$0 = Y_6 \cdot 12{,}72 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 6{,}66 \ldots$$
$$Y_6 = \pm 59{,}7 \text{ T.}$$
$$0 = Y_7 \cdot 9{,}58 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 1{,}713$$
$$Y_7 = \pm 48{,}3 \text{ T.}$$

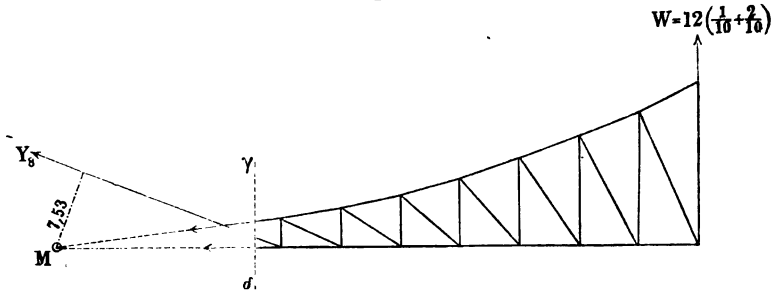
Für Y_8 kommt der Drehpunkt links von dem Punkte C zu liegen; in Folge dessen erhält der in dem Punkte C erzeugte verticale Gegendruck D hier die entgegengesetzte Drehungsrichtung und die Belastungsabtheilungen bilden sich daher — abweichend von den vorhergehenden Fällen — in der Weise, dass die Zugabtheilung über den Punkt A hinaus bis an die Schnitt-

Fig. 225.



linie $\gamma\,\delta$ sich erstreckt, die letztere also zugleich die Belastungsscheide bildet (s. Fig. **225**). Auch ist hier das Minimum einfacher zu

Fig. 226.

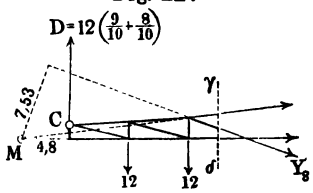


berechnen, für welches aus Fig. **226** (oder Fig. **227**) die Momenten-Gleichung sich ergiebt:

$$0 = - Y_8 \cdot 7{,}53 - 12\,(\tfrac{1}{10} + \tfrac{2}{10})\,64{,}8$$
$$Y_8 = \pm 31 \text{ T.}$$

Für Y_9 fällt der Drehpunkt noch weiter links, so dass nun auch die durch Belastung der Hauptbrücke entstehende Kraft R die entgegengesetzte Drehungsrichtung erhält, und die Hauptbrücke dadurch zur Druckabtheilung wird (s. Fig. **228**). Auch hier ist das Minimum am leichtesten zu berechnen, für welches aus Fig. **229** die Momenten-Gleichung sich ergiebt:

Fig. 227.

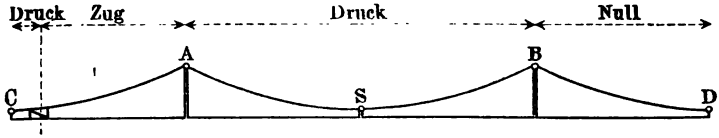


$$0 = Y_9 \,.\, 7{,}41 - 240 \,.\, 1{,}5 + 60 \,.\, 16 + 12\,(22 - \tfrac{9}{10} \,.\, 16)$$

$$Y_9 = \pm\, 93{,}3 \text{ T.}$$

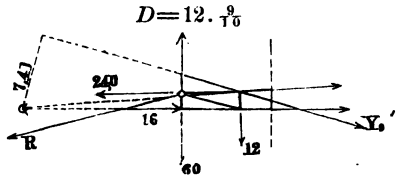
Für Y_{10} endlich fällt die Druckabtheilung zur Linken ganz

Fig. 228.



weg, und entspricht das Minimum also der Belastung der Hauptbrücke für sich allein; im Uebrigen geschieht die Berechnung wie im vorigen Falle. Man erhält die Gleichung:

Fig. 229.



$$0 = Y_{10} \,.\, 15{,}97 - 240 \,.\, 1{,}5 + 60 \,.\, 60$$

$$Y_{10} = \pm\, 202{,}9 \text{ T.}$$

Berechnung der Spannungszahlen U für die Verticalständer.

Die Spannungszahl jedes Verticalständers kann zerlegt werden in zwei Theile, von denen der eine durch die permanente, der andere durch die mobile Last allein hervorgebracht wird. Der erstere ist für alle Verticalständer derselbe und beträgt $+ 10$; denn auch hier soll angenommen werden, dass die permanente Last (20 Tonnen für jedes Feld) zur Hälfte auf die oberen, zur anderen Hälfte auf die unteren Knotenpunkte sich vertheilt.

Für den anderen Theil, der (wie in § 22) mit $\mathfrak{U}$ bezeichnet werden soll, findet wie dort die Beziehung statt:

$$\mathfrak{U}\,(\max) + \mathfrak{U}\,(\min) = +\,12.$$

Denn bei voller Belastung der ganzen Brücke bringt die mobile Last in jedem Verticalständer eine Zugspannung von 12 Tonnen hervor (weil dieselbe an den unteren Knotenpunkten angreift), und diese Wirkung setzt sich zusammen aus den Wirkungen aller derjenigen Belastungen, welche Zugspannung, und aus den Wirkungen aller derjenigen, welche Druckspannung in dem Verticalständer erzeugen. Man braucht also nur einen der beiden Werke, z. B. $\mathfrak{U}$ (min) zu berechnen und findet den anderen dann aus der Gleichung:

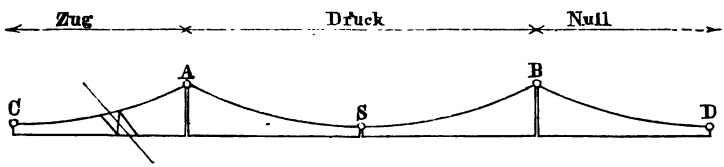
$$\mathfrak{U}\,(\max) = +\,12 - \mathfrak{U}\,(\min).$$

Hierauf erhält man dann die ganze Spannungszahl des Verticalständers, indem man die permanente Spannungszahl hinzufügt, also:

$$U\,(\max) = \mathfrak{U}\,(\max) + 10$$
$$U\,(\min) = \mathfrak{U}\,(\min) + 10.$$

Die Drehpunkte für die Spannungen der Verticalständer sind dieselben wie für die Diagonalen; es gelten daher im Allgemeinen die Belastungsabtheilungen für Y, nachdem bei ihnen die Ueberschriften „Zug“ und „Druck“ mit einander vertauscht sind, auch für die Verticalständer. Nur bei den letzten drei Feldern, wo die Schnittlinie selbst eine Belastungsscheide bildet, wird dieselbe für die Verticalständer um eine Feldlänge nach rechts verschoben wegen schräger Lage der Schnittlinie.

Fig. 230.



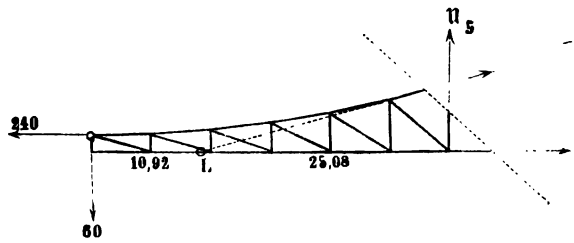
So erhält man z. B. für $\mathfrak{U}_5$ die in Fig. **230** angegebenen Belastungsabtheilungen und aus Fig. **231** die Momenten-Gleichung:

$$0 = -\,\mathfrak{U}_5 \,.\, 25{,}08 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 10{,}92$$
$$\mathfrak{U}_5\,(\min) = -\,40{,}5.$$

Hieraus ergiebt sich nach den oben angegebenen Beziehungen:

$$\mathfrak{U}_5\,(\max) = +\,12 - (-\,40{,}5) = +\,52{,}5\text{ T.}$$
$$U_5\,(\max) = +\,52{,}5 + 10 = +\,62{,}5\text{ T.}$$
$$U_5\,(\min) = -\,40{,}5 + 10 = -\,30{,}5\text{ T.}$$

Fig. 231.



Auf ähnliche Weise erhält man für die übrigen Verticalständer folgende Gleichungen:

$$0 = -\,\mathfrak{U}_1 \cdot 34{,}74 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 25{,}26$$
$$\mathfrak{U}_1\,(\min) = -\,54 \qquad \mathfrak{U}_1\,(\max) = +\,66$$
$$U_1\,(\min) = -\,44\text{ T.} \qquad U_1\,(\max) = +\,76\text{ T.}$$
$$0 = -\,\mathfrak{U}_2 \cdot 32{,}12 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 21{,}88$$
$$\mathfrak{U}_2\,(\min) = -\,52{,}1 \qquad \mathfrak{U}_2\,(\max) = +\,64{,}1$$
$$U_2\,(\min) = -\,42{,}1\text{ T.} \qquad U_2\,(\max) = +\,74{,}1\text{ T.}$$
$$0 = -\,\mathfrak{U}_3 \cdot 29{,}61 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 18{,}39$$
$$\mathfrak{U}_3\,(\min) = -\,49{,}5 \qquad \mathfrak{U}_3\,(\max) = +\,61{,}5$$
$$U_3\,(\min) = -\,39{,}5\text{ T.} \qquad U_3\,(\max) = +\,71{,}5\text{ T.}$$
$$0 = -\,\mathfrak{U}_4 \cdot 27{,}23 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 14{,}77$$
$$\mathfrak{U}_4\,(\min) = -\,45{,}8 \qquad \mathfrak{U}_4\,(\max) = +\,57{,}8$$
$$U_4\,(\min) = -\,35{,}8\text{ T.} \qquad U_4\,(\max) = +\,67{,}8\text{ T.}$$
$$0 = -\,\mathfrak{U}_6 \cdot 23{,}33 \ldots - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 6{,}66 \ldots$$
$$\mathfrak{U}_6\,(\min) = -\,32{,}6 \qquad \mathfrak{U}_6\,(\max) = +\,44{,}6$$
$$U_6\,(\min) = -\,22{,}6\text{ T.} \qquad U_6\,(\max) = +\,54{,}6\text{ T.}$$
$$0 = -\,\mathfrak{U}_7 \cdot 22{,}29 - 240 \cdot 1{,}5 - 60 \cdot 1{,}713$$
$$\mathfrak{U}_7\,(\min) = -\,20{,}8 \qquad \mathfrak{U}_7\,(\max) = +\,32{,}8$$
$$U_7\,(\min) = -\,10{,}8\text{ T.} \qquad U_7\,(\max) = +\,42{,}8\text{ T.}$$

Für die nun folgenden Verticalständer ist allemal die Gleichung für $\mathfrak{U}$ (max) aufgestellt, und $\mathfrak{U}$ (min) daraus abgeleitet. Die Belastungsabtheilungen bilden sich wie bei den Diagonalen derselben Felder, nur rückt wegen schräger Lage der Schnittlinie die eine Belastungsscheide um eine Feldlänge nach rechts und sind die Ueberschriften „Zug“ und „Druck“ mit einander zu vertauschen.

$$0 = \mathfrak{U}_8 \cdot 22{,}8 - 12\,(\tfrac{1}{10} + \tfrac{2}{10} + \tfrac{3}{10})\,64{,}8$$

$\mathfrak{U}_8\,(\max) = +20{,}5$ $\qquad$ $\mathfrak{U}_8\,(\min) = -8{,}5$

$U_8\,(\max) = +30{,}5$ T. $\qquad$ $U_8\,(\min) = +1{,}5$ T.

$$0 = -\mathfrak{U}_9 \cdot 28 - 240 \cdot 1{,}5 + 60 \cdot 16 + 12\,[(22 - \tfrac{9}{10} \cdot 16) + (28 - \tfrac{8}{10} \cdot 16)]$$

$\mathfrak{U}_9\,(\max) = +31{,}2$ $\qquad$ $\mathfrak{U}_9\,(\min) = -19{,}2$

$U_9\,(\max) = +41{,}2$ T. $\qquad$ $U_9\,(\min) = -9{,}2$ T.

$$0 = -\mathfrak{U}_{10} \cdot 66 - 240 \cdot 1{,}5 + 60 \cdot 60 + 12\,(66 - \tfrac{9}{10} \cdot 60)$$

$\mathfrak{U}_{10}\,(\max) = +51{,}3$ $\qquad$ $\mathfrak{U}_{10}\,(\min) = -39{,}3$

$U_{10}\,(\max) = +61{,}3$ T. $\qquad$ $U_{10}\,(\min) = -29{,}3$ T.

In dem 11ten Verticalständer endlich kann nur durch die unten angehängte Last eine Spannung hervorgebracht werden. Diese beträgt im Maximum 6 Tonnen an mobiler und $\frac{1}{2}^0$ Tonnen an permanenter Last, folglich ist:

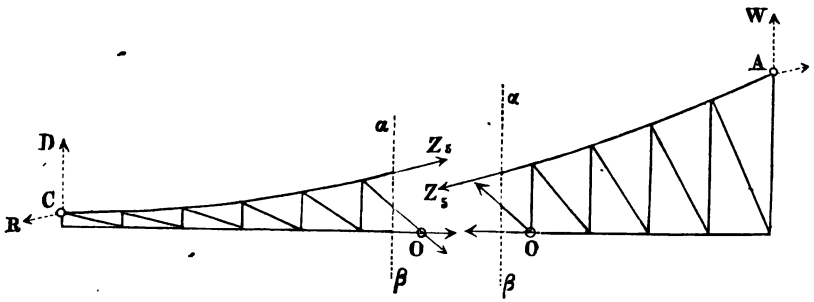
$U_{11}\,(\max) = +11$ T.

Berechnung der Spannungszahlen Z für die Bogenstücke.

Die drei Kräfte, von deren Drehungsrichtungen das Vorzeichen von Z_5 abhängt, sind R, D und W. Erstere entsteht durch Belastung der Hauptbrücke, letztere beiden werden durch Belastung der Nebenbrücke hervorgebracht.

Aus Fig. **232** erkennt man, dass R und Z_5 entgegengesetzte Drehungsrichtungen in Bezug auf den Drehpunkt O haben, dass also eine Belastung der Hauptbrücke Z_5 positiv macht.

Fig. 232. Fig. 233.

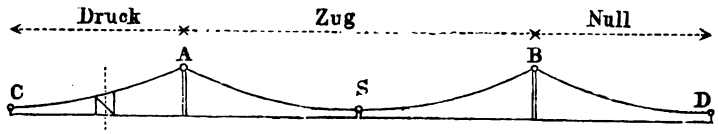


Wenn das Stück $A\,\alpha\,\beta$ (Fig. **233**) belastet wird, so entsteht dadurch in dem Punkte C ein verticaler Gegendruck D, welcher mit Z_5 in Fig. **232** gleiche Drehungsrichtung hat, also Z_5 negativ macht.

Wenn das Stück $C\,\alpha\,\beta$ (Fig. **232**) belastet wird, so entsteht dadurch in dem Punkte A ein verticaler Gegendruck W, welcher mit Z_5 in Fig. **233** gleiche Drehungsrichtung hat, also Z_5 negativ macht.

Die grösste Zugspannung tritt also ein, wenn die Hauptbrücke, die grösste Druckspannung, wenn die Nebenbrücke allein belastet ist (s. Fig. **234**).

Fig. 234.



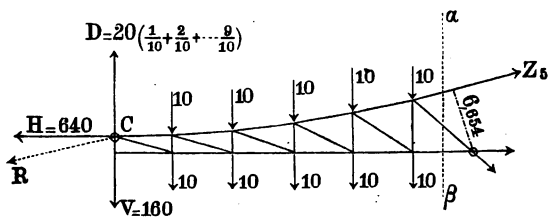
Um Z_5 (max) und Z_5 (min) zu bestimmen, hat man die Wahl zwischen folgenden zwei Wegen:

Einmal kann man unter Mitberücksichtigung der permanenten Last die directe Momenten-Gleichung für Z_5 aufstellen und hat dann für Z_5 (max) die Gleichung aus Fig. **235** zu bilden:

$$0 = Z_5 \,.\, 6{,}654 - H \,.\, 1{,}5 - V \,.\, 36 + D \,.\, 36 - 20\,(6 + 12 + \ldots 30).$$

Hierin bedeuten H und V die Seitenkräfte desjenigen Drucks R, welcher in dem Punkte C durch die Total-Belastung der Hauptbrücke entsteht. Die durch die mobile Belastung der Hauptbrücke allein hervorgebrachten Werthe von H und V wurden früher schon resp. zu 240 und 60 gefunden. Diese Werthe sind mit der Verhältnisszahl

Fig. 235.



$$\frac{20+12}{12} = \frac{8}{3}$$

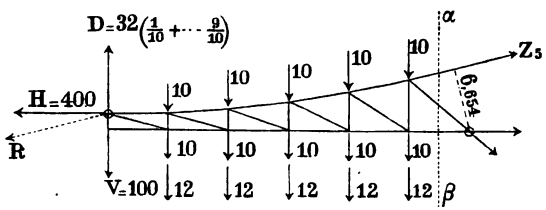
zu multipliciren, um die hier zu substituirenden Werthe zu ergeben. Ferner bezeichnet D den in dem Punkte C durch die permanente Belastung der Nebenbrücke erzeugten verticalen Gegendruck.

Durch Substitution der in der Figur eingeschriebenen Zahlenwerthe erhält man die Gleichung:

$$0 = Z_5 \,.\, 6{,}654 - 640 \,.\, 1{,}5 - 160 \,.\, 36 + 20\left(\tfrac{1}{10} + \ldots \tfrac{9}{10}\right) . 36$$
$$- 20\,(6 + 12 + \ldots 30)$$
$$Z_5\,(\max) = + 794 \text{ T.}$$

Für Z_5 (min) ist die Momenten-Gleichung nach Fig. **236** zu bilden, worin H und V die Seitenkräfte desjenigen Drucks R bedeuten, welcher in dem Punkte C durch die permanente Belastung der Hauptbrücke allein hervorgebracht wird, und D den durch die totale Belastung der Nebenbrücke in dem Punkte C hervorgebrachten verticalen Gegendruck bezeichnet. Man erhält also:

Fig. 236.



$$H = \tfrac{2}{3}\tfrac{0}{2} \,.\, 640 = 400$$
$$V = \tfrac{2}{3}\tfrac{0}{2} \,.\, 160 = 100$$
$$0 = Z_5 \,.\, 6{,}654 - 400 \,.\, 1{,}5 - 100 \,.\, 36 + 32\left(\tfrac{1}{10} + \ldots \tfrac{9}{10}\right) 36$$
$$- 32\,(6 + 12 + \ldots 30)$$
$$Z_5\,(\min) = + 285 \text{ T.}$$

Der zweite Weg besteht darin, dass man zunächst die Spannungszahl Z_5 zerlegt in den von der permanenten Last hervorgebrachten constanten Theil $\mathfrak{P}_5$ und den von der mobilen Last hervorgebrachten veränderlichen Theil, der mit $\mathfrak{Z}_5$ bezeichnet werden soll. Die Werthe von $\mathfrak{P}_5$ sind bereits im siebenten Abschnitt § 25 c. berechnet (denn bei gleichförmig über die ganze Brücke vertheilter Belastung befindet sich die Nebenbrücke genau in derselben Lage, wie eine der beiden Hälften der Hauptbrücke) und war z. B.

$$\mathfrak{P}_5 = + 415$$

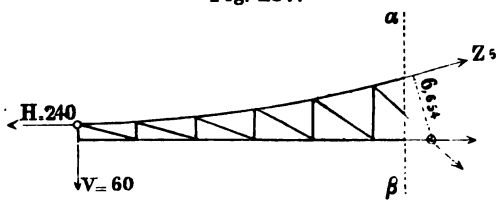
gefunden. Von den beiden Werthen $\mathfrak{Z}_5$ (max) und $\mathfrak{Z}_5$ (min) braucht nur einer berechnet zu werden, denn beide zusammen müssen so viel betragen als die Spannungszahl, welche die über die ganze Brücke gleichförmig vertheilte mobile Last hervorbringt, und welche

man erhält, wenn man $\mathfrak{P}_5$ mit der Verhältnisszahl $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$ multiplicirt. Demnach ist:

$$\mathfrak{Z}_5\,(\max) + \mathfrak{Z}_5\,(\min) = \tfrac{3}{5} \,.\, 415 = + 249$$
$$\mathfrak{Z}_5\,(\min) = 249 - \mathfrak{Z}_5\,(\max).$$

Hierin ist $\mathfrak{Z}_5\,(\max)$ auf die leichtere Weise zu bestimmen, indem man nur aus Fig. **237** die Momenten-Gleichung zu bilden braucht (mit Substitution der früher bereits gefundenen durch die mobile Belastung der Haupt-Brücke hervorgebrachten Werthe von H und V):

Fig. 237.



$$0 = \mathfrak{Z}_5 \,.\, 6{,}654 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 36$$
$$\mathfrak{Z}_5\,(\max) = 379.$$

Wenn man diesen Werth in die obige Gleichung substituirt, so erhält man:

$$\mathfrak{Z}_5\,(\min) = 249 - 379 = - 130.$$

Die Vereinigung der Spannungszahlen $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{Z}$ ergiebt die Werthe:

$$Z_5\,(\max) = 415 + 379 = + 794 \text{ T.}$$
$$Z_5\,(\min) = 415 - 130 = + 285 \text{ T.}$$

Beide Wege führen, wie man sieht, zu denselben Resultaten, der letztere jedoch auf einfachere Weise. Es soll deshalb bei den folgenden Rechnungen dieser letztere Weg eingeschlagen werden.

Man erhält dann für die übrigen Bogenstücke die folgenden Gleichungen:

$$0 = \mathfrak{Z}_1 \,.\, 14{,}904 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 60$$
$$\mathfrak{Z}_1\,(\max) = + 265{,}5$$
$$\mathfrak{Z}_1\,(\min) = 265{,}5 - 265{,}5 = 0$$
$$Z_1\,(\max) = 443 + 265{,}5 = + 708{,}5 \text{ T.}$$
$$Z_1\,(\min) = 443 + 0 = + 443 \text{ T.}$$
$$0 = \mathfrak{Z}_2 \,.\, 12{,}56 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 54$$
$$\mathfrak{Z}_2\,(\max) = 286{,}5$$
$$\mathfrak{Z}_2\,(\min) = 261 - 286{,}5 = - 25{,}5$$
$$Z_2\,(\max) = 434{,}5 + 286{,}5 = + 721 \text{ T.}$$
$$Z_2\,(\min) = 434{,}5 - 25{,}5 = + 409 \text{ T.}$$

$0 = \mathfrak{Z}_3 \,.\, 10{,}39 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 48$

$\mathfrak{Z}_3\,(\max) = 312$

$\mathfrak{Z}_3\,(\min) = 256 - 312 = -56$

$Z_3\,(\max) = 427 + 312 = +739$ T.

$Z_3\,(\min) = 427 - 56 = +371$ T.

$0 = \mathfrak{Z}_4 \,.\, 8{,}415 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 42$

$\mathfrak{Z}_4\,(\max) = 342$

$\mathfrak{Z}_4\,(\min) = 252 - 342 = -90$

$Z_4\,(\max) = 421 + 342 = +763$ T.

$Z_4\,(\min) = 421 - 90 = +331$ T.

$0 = \mathfrak{Z}_6 \,.\, 5{,}121 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 30$

$\mathfrak{Z}_6\,(\max) = 422$

$\mathfrak{Z}_6\,(\min) = 246 - 422 = -176$

$Z_6\,(\max) = 410 + 422 = +832$ T.

$Z_6\,(\min) = 410 - 176 = +234$ T.

$0 = \mathfrak{Z}_7 \,.\, 3{,}84 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 24$

$\mathfrak{Z}_7\,(\max) = 469$

$\mathfrak{Z}_7\,(\min) = 244 - 469 = -225$

$Z_7\,(\max) = 406 + 469 = +875$ T.

$Z_7\,(\min) = 406 - 225 = +181$ T.

$0 = \mathfrak{Z}_8 \,.\, 2{,}83 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 18$

$\mathfrak{Z}_8\,(\max) = 509$

$\mathfrak{Z}_8\,(\min) = 242 - 509 = -267$

$Z_8\,(\max) = 403 + 509 = +912$ T.

$Z_8\,(\min) = 403 - 267 = +136$ T.

$0 = \mathfrak{Z}_9 \,.\, 2{,}094 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 12$

$\mathfrak{Z}_9\,(\max) = 516$

$\mathfrak{Z}_9\,(\min) = 241 - 516 = -275$

$Z_9\,(\max) = 401 + 516 = +917$ T.

$Z_9\,(\min) = 401 - 275 = +126$ T.

$0 = \mathfrak{Z}_{10} \,.\, 1{,}649 - 240 \,.\, 1{,}5 - 60 \,.\, 6$

$\mathfrak{Z}_{10}\,(\max) = 437$

$\mathfrak{Z}_{10}\,(\min) = 240 - 437 = -203$

$Z_{10}\,(\max) = 400 + 437 = +837$ T.

$Z_{10}\,(\min) = 400 - 203 = +197$ T.

Die Resultate der ganzen Rechnung sind in Fig. **238** zusammengestellt. Der besseren Uebersicht wegen sind auch noch die im siebenten Abschnitt § 21 c. aus Fig. **197** abgeleiteten Spannungszahlen für die Hauptbrücke in Fig. **239** daneben gestellt.

Fig. 238.

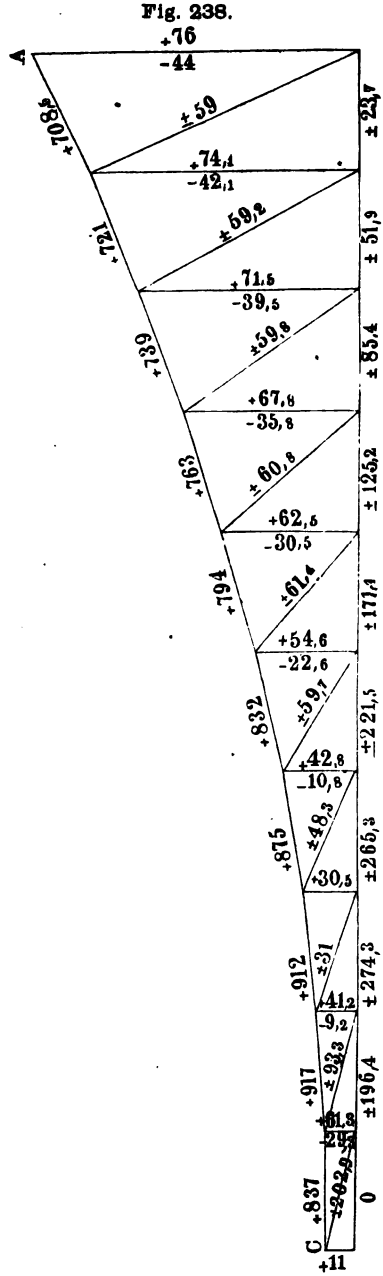
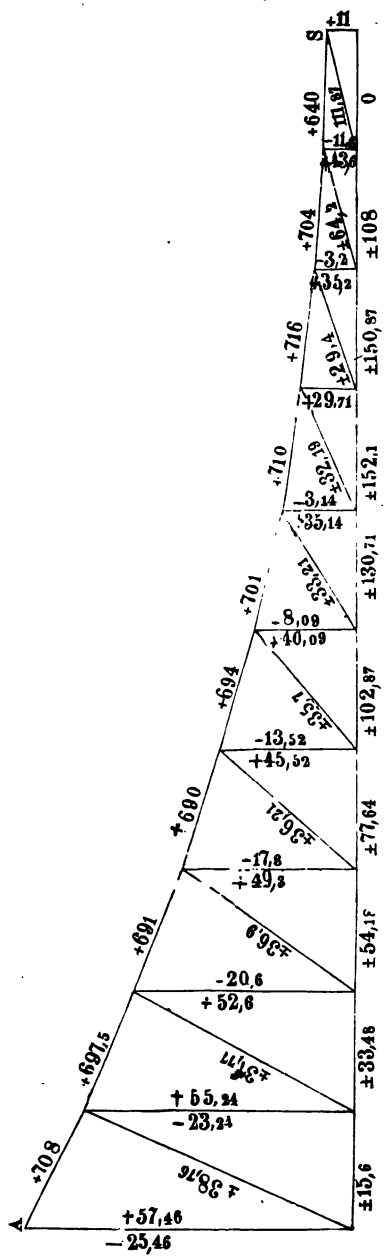


Fig. 239.



§ 27.
Stabilität der Mittelpfeiler.

Die eben gefundenen Spannungszahlen wurden unter der Voraussetzung berechnet, dass die vier Brückenabtheilungen so aufgehängt seien, wie in Fig. **212** dargestellt ist. Eine der Grundbedingungen ihrer Gültigkeit ist diejenige: dass in den Punkten A und B nur Verticalkräfte gegen die Brücke ausgeübt werden, dass also diese Punkte in horizontaler Richtung vollkommen freie Beweglichkeit haben. Bei dieser Art der Aufhängung wird die Stabilität der Mittelpfeiler gar nicht in Anspruch genommen. Die in Fig. **212** dargestellte Art ist indessen nicht die einzige, mit welcher dieser Vortheil verbunden ist; sie wurde vielmehr nur der grösseren Deutlichkeit halber gewählt, um die Grundlagen der Rechnung so weit als möglich zu vereinfachen. Derselbe Zweck kann auch durch andere noch vortheilhaftere Aufhängungsarten erreicht werden.

So z. B. können die festen Drehpunkte A_1 und B_1 für die verticalen Stangen AA_1 und BB_1, an deren Endpunkten die Brücke hängt, auch nach unten hin verlegt werden, ohne dass die gemachten Voraussetzungen aufhören, erfüllt zu sein (s. Fig. **240**).

Auch ist es nicht nöthig, dass an der Stelle A die beiden Brückenabtheilungen AC und AS an einem und demselben Punkte

Fig. 240.

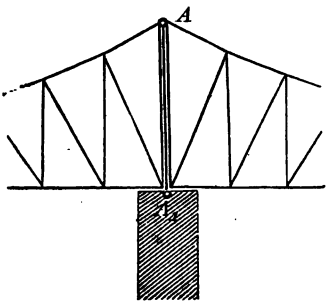
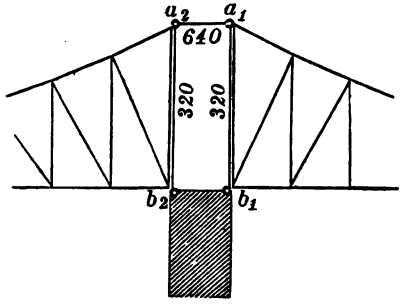


Fig. 241.



aufgehängt sind, man kann vielmehr, um an Spannweite zu gewinnen, ihre beiden Aufhängepunkte trennen, und zwei Punkte a_1 a_2, welche um die Pfeilerbreite von einander entfernt sind, dazu wählen. Die horizontale Beweglichkeit dieser beiden Punkte

lässt sich dann auf verschiedene Arten herstellen. Ein Mal dadurch, dass man aus den drei Stangen $a_1\,a_2$, $a_1\,b_1$ und $a_2\,b_2$ ein verschiebbares Parallelogramm bildet, dessen vierte feste Seite $b_1\,b_2$ durch den Kopf des Pfeilers dargestellt wird (s. Fig. **241**). Die Spannungszahlen dieser drei Stangen ergeben sich unmittelbar aus den früheren Rechnungen und sind in Fig. **241** eingeschrieben.

Eine andere solche Aufhängungsart bestände darin, dass man die beiden Brückenabtheilungen an den Achsen zweier Frictionsrollen a_1 und a_2 aufhängte, denen die horizontale Oberfläche des Pfeilers als Unterlage und Rollbahn diente (s. Fig. **242**); oder darin, dass man die Punkte a_1 und a_2 an einer Platte befestigte, deren horizontale Beweglichkeit durch untergelegte Walzen gesichert würde (s. Fig. **243**). In allen diesen Fällen bleiben die

Fig. 242.

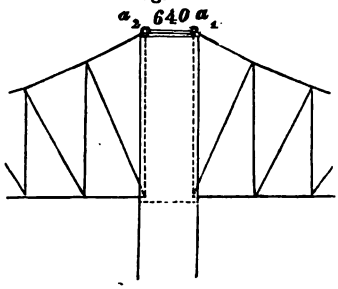
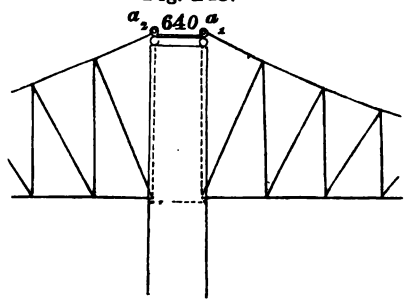


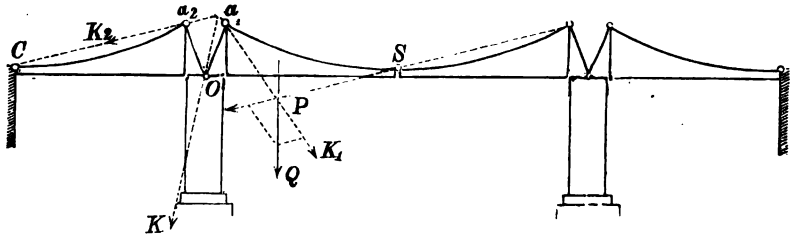
Fig. 243.



Voraussetzungen erfüllt, und behalten die oben berechneten Spannungszahlen ihre Gültigkeit.

Ungültig dagegen würden die gefundenen Zahlen, und aufgegeben würde der in Betreff der Pfeiler-Stabilität zu erstrebende

Fig. 244.

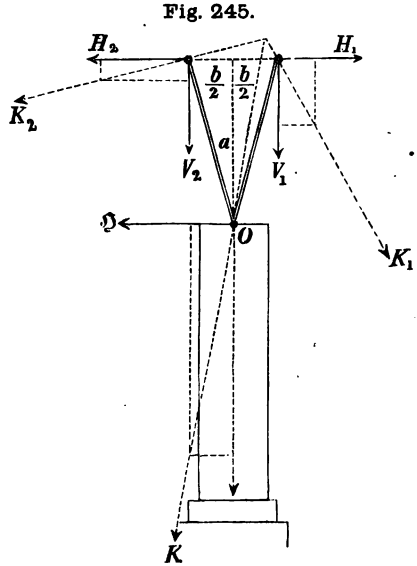


Vortheil, wenn man die Endpunkte eines **Winkelhebels** als Aufhängepunkte wählte (s. Fig. **244**). In diesem Falle würde zwar

bei voller Belastung der ganzen Brücke die auf den Pfeiler wirkende Kraft eine verticale Richtung haben, nicht aber bei **einseitiger** Belastung.

Man überzeugt sich hiervon leicht, wenn man vorläufig untersucht, welche Wirkung durch das Auflegen eines einzelnen Gewichts Q auf die gewichtlos gedachte Brücke an dem festen Drehpunkte O des Winkelhebels hervorgebracht wird. Nach der in § 22 und § 26 angewendeten Methode findet man, dass die Kraft K_1 in der Richtung a_1 P und die Kraft K_2 in der Richtung a_2 C wirkt. Diese beiden Kräfte halten den Winkelhebel im Gleichgewicht, folglich geht ihre Mittelkraft K durch den Drehpunkt O hindurch. Die horizontale Seitenkraft dieser Mittelkraft bildet einen Horizontalschub $\mathfrak{H}$, welcher den Pfeiler umzuwerfen strebt. Dieser Schub wird um so grösser, je mehr Gewichte an solchen Stellen aufgelegt werden, wo sie eine ähnliche Wirkung hervorbringen, und erreicht ein Maximum, wenn die Abtheilung a_1 S ganz belastet ist. In diesem Falle wäre

Fig. 245.



$$Q = 120 \text{ Tonnen}$$

zu setzen, und man erhielte die Gleichungen (s. Fig. **245**):

$$H_1 = 120; \quad V_1 = 90$$

$$0 = H_1 \,.\, a + V_1 \frac{b}{2} - H_2\, a - V_2 \,.\, \frac{b}{2}$$

oder, wenn man in letzterer Gleichung $V_1 = \frac{3}{4} H_1$ und $V_2 = \frac{1}{4} H_2$ substituirt und die Gleichung für H_2 auflöst:

$$H_2 = H_1 \left(\frac{8 + 3\frac{b}{a}}{8 + \frac{b}{a}} \right)$$

Hieraus erhält man den Horizontalschub $\mathfrak{H}$ mittelst der Gleichung:

$$\mathfrak{H} = H_2 - H_1 = 2\, H_1 \left(\frac{\frac{b}{a}}{8 + \frac{b}{a}} \right)$$

Wenn man hierin für H_1 seinen Werth 120 substituirt und beispielsweise $\frac{b}{a} = \frac{1}{2}$ annimmt, so erhält man:

$$2 \cdot \mathfrak{H} = 2 \cdot 14{,}1 = 28{,}2 \text{ Tonnen}$$

als den von beiden Tragwänden zusammen hervorgebrachten Horizontalschub.

Ungefähr ebenso gross würde der nach der entgegengesetzten Richtung hin wirkende Horizontalschub werden, wenn die Abtheilung $a_2\ C$ allein die belastete wäre.

Die Kraft $\mathfrak{H}$ — folglich auch die Gefahr des Umsturzes — wird um so geringer, je kleiner das Verhältniss $\frac{b}{a}$, und Null wenn $\frac{b}{a} = 0$ wird, d. h. wenn die beiden Arme des Winkelhebels zusammenfallen und in einen einfachen Verticalhebel übergehen. Aus diesem Grunde ist die letztere Construction oder die dasselbe leistende in Fig. **241** dargestellte vorzuziehen. Der Verticaldruck auf den Mittelpfeiler ist bei voller Belastung gleich dem Gewichte der beiden angrenzenden Brückenabtheilungen $A\ S$ und $A\ C$, beträgt also in allen obigen Fällen im Maximum:

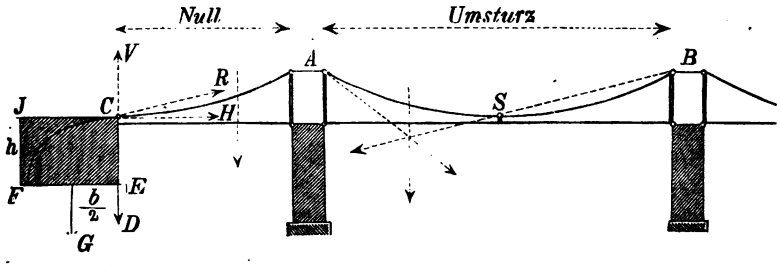
$$2 \cdot (32 \cdot 10 + 32 \cdot 10) = 1280 \text{ Tonnen.}$$

§ 28.

Stabilität der Landpfeiler.

Jede Belastung der Hauptbrücke $A\ B$ (s. Fig. **246**) erzeugt in dem Punkte C eine Zugkraft R, welche den Landpfeiler $CEFJ$

Fig. 246.



um die Innenkante E zu drehen und zugleich auf seiner Basis EF nach innen zu verschieben strebt. Jede Belastung der Nebenbrücke hingegen erzeugt daselbst einen vertical abwärts gerichteten Druck D, welcher in Bezug auf Umkippen gar keine Wirkung

ausübt, in Bezug auf das Schieben aber der Stabilität des Pfeilers zu Gute kommt.

Das Umsturz-Moment wird also am grössten, wenn die Hauptbrücke ganz belastet ist, in welchem Falle die horizontale Seitenkraft von R:

$$H(\max) = 640 \text{ T.}$$

wird. Die verticale Seitenkraft von R geht ebenso wie D durch den Drehpunkt E hindurch, hat also gar keine Wirkung in Bezug auf Drehung. Das Gewicht G des ganzen Landpfeilers muss gross genug sein, um dem von beiden Tragwänden zusammen hervorgebrachten Horizontalschube $2\,H$ in Bezug auf Drehung um die Kante E das Gleichgewicht zu halten; es muss also:

$$1) \quad G \,.\, \frac{b}{2} > 2 \,.\, 640 \,.\, h$$

sein, wonach die Grösse bestimmt werden kann, welche der Pfeiler **wenigstens** haben muss, um nicht umzukippen.

Es ist aber zweitens der Gleichgewichtszustand des Pfeilers in Bezug auf Verschiebung in Betracht zu ziehen.

Beide Seitenkräfte von R — sowohl die horizontale H als die verticale V — wirken auf Verschiebung des Pfeilers, erstere direct, letztere indirect, indem sie den Druck auf die Basis und damit auch den Reibungswiderstand vermindert. Diese Kräfte werden am grössten, wenn die Hauptbrücke ganz belastet ist.

Der Druck D, welchen eine Belastung der Nebenbrücke hervorbringt, vermehrt den Reibungswiderstand und wirkt dadurch der Verschiebung entgegen. Die Gefahr des Schiebens wird also am grössten, wenn die Hauptbrücke ganz belastet und die Nebenbrücke ganz unbelastet ist, wobei D gleich dem halben Gewichte des unbelasteten Stückes $A\,C$ wird (s. Fig. **247**).

Man erhält für diesen Belastungszustand die Werthe:

$$H = 640, \qquad V = 160, \qquad D = 100;$$

welche doppelt zu nehmen sind, um die von beiden Tragwänden zusammen ausgeübten Wirkungen darzustellen.

Wenn also mit f der Reibungs-Coefficient bezeichnet wird, so muss:

$$f(G + 2\,D - 2\,V) > 2\,H; \text{ oder}$$

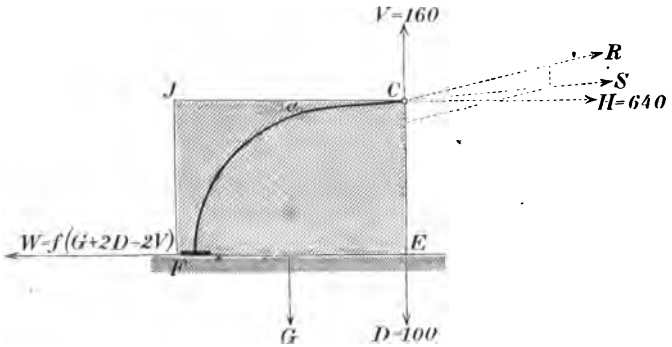
$$2) \quad f(G + 2 \,.\, 100 - 2 \,.\, 160) > 2 \,.\, 640$$

sein, wenn der Landpfeiler nicht nach innen verschoben werden soll.

Wenn also weder ein Umkippen noch ein Verschieben des Landpfeilers eintreten soll, so muss das Gewicht desselben wenig-

stens so gross sein als der **grössere** von den beiden Werthen G, welche aus den beiden Ungleichungen 1) und 2) sich ergeben.

Fig. 247.



Es ist hierbei vorausgesetzt, dass der Punkt C, als Aufhängepunkt der Brückenabtheilung CA, mit der ganzen Masse des Landpfeilers genügend verbunden ist. Dies kann mittelst einer Spannkette bewerkstelligt werden, welche von C aus in das Innere des Mauerwerks hineingeführt und unten an der Basis bei F gehörig verankert wird. Die Richtung dieser Spannkette darf bei dem Punkte C nicht horizontal sein, weil sonst der Punkt C sich heben würde, wenn die Hauptbrücke belastet und die Nebenbrücke unbelastet ist. Denn in diesem Falle ist die vertical aufwärts wirkende Kraft V (= 160 Tonnen) grösser als die vertical abwärts wirkende Kraft D (= 100 Tonnen). Die Spannkette muss vielmehr von dem Punkte C aus **abwärts** in das Mauerwerk hineingeführt werden in einer Richtung, deren Abweichung α von der Horizontalen auf folgende Weise bestimmt wird. Dieser Winkel α muss **wenigstens** so gross sein, als der Winkel, den die Mittelkraft S der beiden Kräfte R und D (oder der drei Kräfte H, V und D) bei jenem Belastungszustande mit der Horizontalen einschliesst. Die Tangente dieses letzteren Winkels ist:

$$\frac{V-D}{H} = \frac{160-100}{640} = \frac{3}{32} = 0{,}09375.$$

Es muss also $\operatorname{tg}\alpha > 0{,}09375$ oder $\alpha > 5^0\,22'$ sein.

Für die Spannkette erhält man die Spannungszahl, indem man die horizontale Seitenkraft ihrer Spannung gleich dem Maximum des Horizontalschubes, also = 640 Tonnen setzt.

Neunter Abschnitt.

§ 29.

Kuppelförmige Dach-Constructionen.

Bei allen früher berechneten Constructionen durfte ohne Bedenken für jeden einzelnen Belastungspunkt die Belastung gleich gross angenommen werden — sowohl mobile als permanente. Wenn auch das Eigengewicht nicht immer eine ganz genau gleichförmig über die Spannweite vertheilte Belastung bildete, so brauchte man sich nur so viel an todter Last hinzugelegt zu denken, als nöthig war, um die etwaigen Ungleichförmigkeiten aufzuheben und die berechneten Spannungszahlen in aller Strenge richtig zu machen.

Bei kuppelförmigen Dach-Constructionen dagegen, in denen die einzelnen Träger nach der Mitte hin gleich den Radien eines Kreises gegen einander convergiren, ist diese Auffassungsweise nicht mehr zulässig, vielmehr muss man hier die Belastung als eine vom Auflager nach dem Scheitel hin allmälig abnehmende in Rechnung bringen.

Man kann die Oberfläche einer solchen Kuppel als eine durch Umdrehung irgend einer passend geformten Curve um eine verticale Drehachse entstandene Rotationsfläche, und die zwischen je zwei Meridian-Ebenen gelegenen Theile der Kuppel als Belastungen der Rippen ansehen, welche die Kuppel unterstützen. Wenn eine solche Rippe wie ein Fachwerkträger mit dreieckigen (gleich grossen) Feldern construirt ist, so wachsen die Belastungen der einzelnen Felder (oder der einzelnen Belastungspunkte) vom Scheitel nach dem Auflager hin nach demselben Gesetze, wie die Bogentheile der Parallelkreise, welche in jene Flächenstücke hineinfallen.

Diese Bogenlängen sind allemal proportional ihren Halbmessern oder den Entfernungen der Belastungspunkte von der verticalen Drehachse. Wenn also die Belastung desjenigen Knotenpunktes, dessen Drehungshalbmesser als Einheit gewählt wird, mit

p bezeichnet wird, so ist $\rho \cdot p$ die Belastung eines Knotenpunktes, dessen Entfernung von der Achse gleich ρ ist. Es reicht also hin, die Belastung irgend eines Punktes zu kennen, um danach die Belastungen aller übrigen Punkte durch Messung ihrer Drehungshalbmesser zu bestimmen.

Sobald man aber die Belastungen der einzelnen Punkte einmal bestimmt hat, so stehen nun der Anwendung der bereits früher erklärten Methode keinerlei Schwierigkeiten mehr entgegen. Es ist als ein weiterer Vorzug der Methode der statischen Momente hervorzuheben, dass ihre Anwendbarkeit vollkommen unabhängig ist von der Art des Belastungsgesetzes.

Theils um diesen Vorzug in das rechte Licht zu setzen, theils einiger sonstiger bei der Berechnung auftretender Eigenthümlichkeiten wegen, verdient das nachfolgende Zahlenbeispiel hier noch einen Platz zu finden.

§ 30.

Kuppel von 100^m Spannweite.

Als äussere Oberfläche der Kuppel ist eine Halbkugelfläche von 51^m Halbmesser und 16338$\square^m$ Flächeninhalt angenommen. Jede der 8 Rippen trägt also einen Theil der Kuppel, dessen Oberfläche 2042$\square^m$ enthält.

Als Belastung pro Quadratmeter der Kuppeloberfläche (Gewicht der Bedachung nebst Wind- und Schneedruck) sind 235^k angenommen, also die Belastung für jede Rippe $2042 \cdot 235 = 480000^k$ oder 480 Tonnen (die Tonne zu 1000^k gerechnet). Diese ganze Belastung ist als eine veränderliche oder mobile Last in Rechnung zu bringen, nicht allein der Veränderlichkeit des Wind- und Schneedrucks wegen, sondern auch aus dem Grunde: weil es vorkommen kann, dass ein Theil der Kuppel zeitweise seiner Bedachung entkleidet wird. Als permanente Last ist nur das eigene Gewicht der Rippe anzusehen, welches zu 60 Tonnen veranschlagt ist. Dieses Eigengewicht kann als eine gleichförmig über die äussere Bogenlänge der Rippe vertheilte Last angesehen werden. Jede Rippe besteht aus zwei concentrischen Bogen, deren Abstand von einander 2^m beträgt, und ist durch ein Diagonalen-System in 15 Felder von gleicher Länge getheilt (s. Fig. **248** und **249**). Die permanente Last beträgt also für jeden Belastungspunkt 4 Tonnen.

Um das Gesetz zu ermitteln, nach welchem die mobile Last auf die einzelnen Belastungspunkte sich vertheilt, müssen die Ab-

Fig. 248.

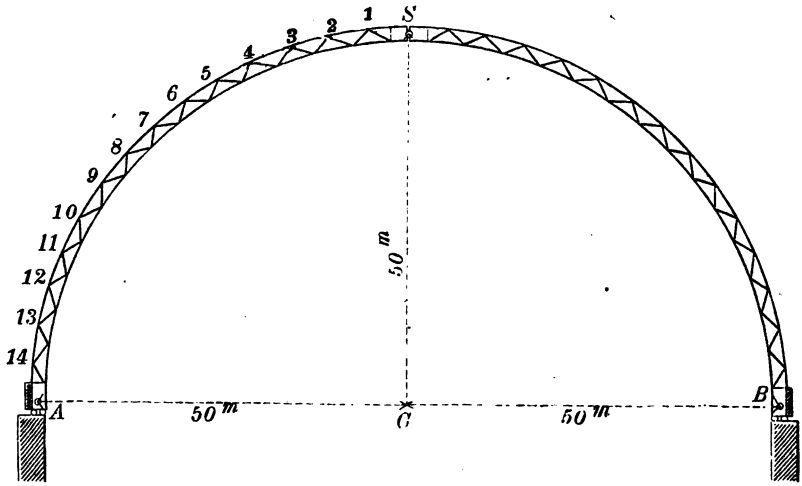
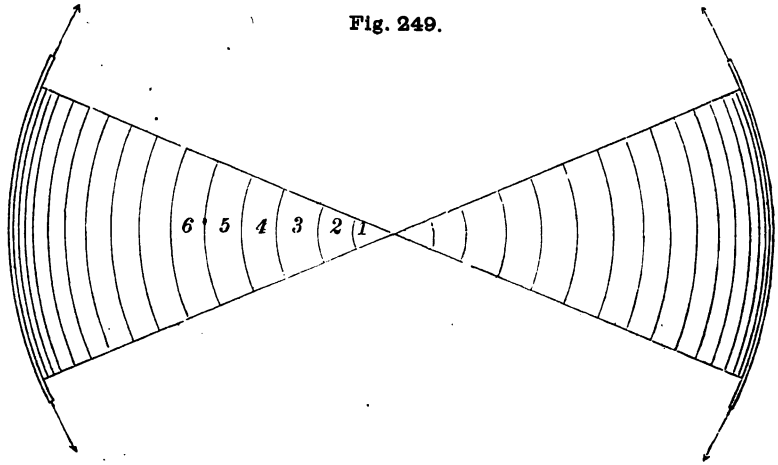


Fig. 249.



stände der Belastungspunkte von der verticalen Mittellinie zuvor gemessen werden, für welche sich folgende Zahlen ergeben:

0	5,3	10,6	15,8	20,7	25,5	30	34,1	37,9	41,3	44,2	46,6	48,5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

49,9	50,7	51
13	14	15

Diesen Zahlen proportional sind die Theile der mobilen Last, welche auf die einzelnen Belastungspunkte kommen. Dividirt man also die ganze mobile Last 480 durch die Summe der obigen Zahlen (welche 512 beträgt) und multiciplirt den Quotienten dann der Reihe nach mit jeder der obigen Zahlen, so erhält man die Belastungen der 14 Zwischenpunkte:

5	9,9	14,8	19,4	23,9	28,1	32	35,5	38,7	41,4	43,7	45,5
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

46,8	47,6
13	14

Um die Spannungszahlen der einzelnen Constructionstheile zu berechnen, muss die Art und Weise der Unterstützung oder Auflagerung an den Punkten A und B genau bekannt sein. Es soll hier angenommen werden, dass die Widerlager dadurch von allem Horizontalschube befreit sind, dass unten am Auflager um die Kuppel herum ein Spannring gelegt ist, durch dessen Spannung die horizontalen Gegendrücke an den Punkten A und B hervorgebracht werden, so dass die Auflagerpunkte selbst nur verticale Gegendrücke zu leisten haben. Die Rippen befinden sich dann genau in demselben Zustande, als wenn sie unten an festen Punkten befestigt wären.

Um sich unabhängig zu machen von den Spannungsveränderungen, welche durch Temperaturwechsel oder durch Aenderungen in der Spannung des Ringes hervorgebracht werden könnten, ist es zweckmässig und soll deshalb hier vorausgesetzt werden, dass je zwei einander gegenüber liegende Rippen in dem Scheitelpunkte S durch ein Scharnier mit einander verbunden sind.*) Dadurch wird zugleich dieser Fall — was die Methode der Berechnung anbelangt — auf den in § 22 behandelten Fall zurükgeführt.

Genau dasselbe Verfahren, welches dort z. B. zur Bestimmung des Scheiteldrucks führte, ist auch hier einzuschlagen. Man findet, dass bei voller Belastung sowohl, als bei ganz unbelastetem Zu-

*) Um an dem Gedanken an die mehrfach in dem Punkte S einander durchkreuzenden Scharnierverbindungen keinen Anstoss zu nehmen, braucht man sich nur statt des Bolzens eine Kugel oder ein beliebig geformtes Gehäuse eingeschaltet zu denken, welches den an dasselbe sich anlehnenden Rippen kugelförmig abgerundete Flächen darbietet.

stande der beiden Träger die verticale Seitenkraft dieses Scheiteldrucks gleich Null ist, letzterer also in beiden Fällen horizontale Richtung hat. Um die Grösse H dieses Horizontalschubes zu bestimmen, hat man das Moment desselben in Bezug auf den Punkt A gleich zu setzen der Summe der Momente aller einzelnen Belastungen in Beziehung auf denselben Punkt. Die Hebelarme der Belastungen erhält man, indem man die oben angegebenen Entfernungen der Belastungspunkte von der Mitte subtrahirt von der halben Spannweite 50:

50	44,7	39,4	34,2	29,3	24,5	20	15,9	12,1	8,7	5,8	3,4	1,5
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

0,1	− 0,7
13	14

Wenn also die Rippen ganz unbelastet sind, so ergiebt sich für den Horizontalschub folgende Gleichung:

$$H \,.\, 50 = 4\,(\tfrac{50}{2} + 44{,}7 + 39{,}4 + \ldots + 1{,}5 + 0{,}1 - 0{,}7) = 1056$$
$$H = 21{,}12.$$

Wenn dagegen beide Rippen voll belastet sind, so erhält man für den Horizontalschub die Gleichung:

$$H \,.\, 50 = 4\,(\tfrac{50}{2} + 44{,}7 + 39{,}4 + \ldots + 1{,}5 + 0{,}1 - 0{,}7)$$
$$+ 5 \,.\, 44{,}7 + 9{,}9 \,.\, 39{,}4 + \ldots + 45{,}5 \,.\, 1{,}5 + 46{,}8 \,.\, 0{,}1$$
$$- 47{,}6 \,.\, 0{,}7.$$

Die letzteren Zahlen, welche die Momente der mobilen Lasten in Beziehung auf den Punkt A darstellen, werden bei den späteren Rechnungen mehrfach wieder gebraucht und sollen deshalb einzeln hier angegeben werden:

223,5	390	506,2	568,4	585,6	562	508,8	429,6	336,7	240,1
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

148,6	68,3	4,7	− 33,3
11	12	13	14

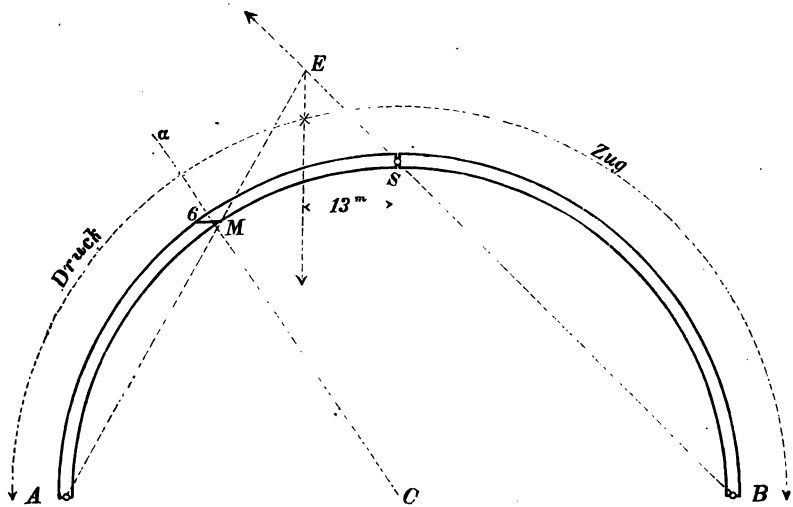
Die Substitution dieser Werthe ergiebt für H die Gleichung:

$$H \,.\, 50 = 1056 + 223{,}5 + 390 + \ldots + 68{,}3 + 4{,}7 - 33{,}3 = 5595$$
$$H = 111{,}9.$$

Berechnung der Spannungszahlen X für die äusseren Bogenstücke.

Das zwischen den Punkten 5 und 6 liegende Stück des äusseren Bogens soll als Beispiel gewählt werden, um die Berechnungsweise zu erklären. Für die später aufzustellende Momenten-Gleichung dieses Stücks wird der Punkt M als Drehpunkt dienen. Man findet also die Belastungsscheide (vergl. § 22), indem man die beiden Richtungen AM und BS bis zu ihrem Durchschnittspunkte E verlängert und durch diesen Punkt eine Verticale legt. Dieselbe liegt in dem Abstand 13^m von der Mitte, fällt also zwischen den zweiten und dritten Belastungspunkt. Die Belastungs-Abtheilungen bilden sich also wie in Fig. **250** angegeben.

Fig. 250.



Die Spannung X wird ein Maximum, wenn die Punkte 3, 4, 5, ... 14*) unbelastet, alle übrigen belastet sind. Statt dessen kann

*) Da die Verticale des 14ten Belastungspunktes **links** an dem Punkte A vorbeigeht (im Abstande von $0^m,72$), so bildet streng genommen dieser Belastungspunkt für sich allein wiederum eine „Zug-Abtheilung", und da gegenüber bei dem Punkte B das Gleiche stattfindet, so sind eigentlich 4 Abtheilungen zu unterscheiden. Es soll jedoch — um durch eine solche pedantische Berücksichtigung zufälliger unwesentlicher Umstände die Uebersichtlichkeit der Figuren und der Rechnungen nicht zu beeinträchtigen — bei dieser wie bei den folgenden Berechnungen der 14te Belastungspunkt stets mit zu der Gruppe seiner Nachbarpunkte gezählt werden — ein Fehler, der auf das Resultat einen verschwindend kleinen Einfluss hat.

man auch sagen: wenn die Punkte 3, 4, 5, ... 14 **entlastet** sind, d. h. wenn an dem vollbelasteten Träger an diesen zwölf Punkten vertical aufwärts wirkende Kräfte — entsprechend den mobilen Belastungen dieser Punkte — angebracht werden.

Um die Seitenkräfte des Scheiteldrucks für diesen Belastungszustand zu finden, braucht man nur die Momenten-Gleichung für jede der beiden Rippen in Beziehung auf ihren Auflagerpunkt aufzustellen und für die linke Seite die zwölf **Ent**lastungs-Momente 3, 4, 5, ... 14 als negative Zahlen zu der bereits gefundenen vollen Momenten-Summe hinzuzufügen; man erhält dann die Gleichungen:

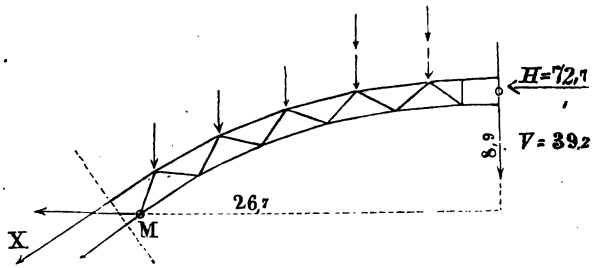
$$0 = H \,.\, 50 + V \,.\, 50 - 5595 \text{ (für die rechte Seite)}$$
$$0 = -H \,.\, 50 + V \,.\, 50 + 5595 - 506 - 568 - 586 - \ldots - 4{,}7 + 33{,}3 \text{ (für die linke Seite)}$$

$$H = 72{,}7 \qquad V = 39{,}2.$$

Hiernach erhält man dann für X (max) aus Fig. **251** die Momenten-Gleichung:

$$0 = -X \,.\, 2 - 72{,}7 \,.\, 8{,}9 + 39{,}2 \,.\, 26{,}7 + 4\left(\frac{26{,}7}{2} + 21{,}4 + 16{,}1 + 10{,}9 + 6 + 1{,}2\right) + 5 \,.\, 21{,}4 + 9{,}9 \,.\, 16{,}1$$
$$X\,(\max) = + 470{,}9 \text{ Tonnen.}$$

Fig. 251.



Um X (min) zu bestimmen, sind die Punkte 3, 4, 5, ... 14 allein belastet anzunehmen. Man erhält die Seitenkräfte des Scheiteldrucks für diesen Belastungszustand, indem man für jede der beiden Seiten die Momenten-Gleichung aufstellt und für die

linke Seite die zwölf Belastungs-Momente zu der Momenten-Summe der permanenten Belastungen hinzufügt:

$$0 = H \,.\, 50 - V \,.\, 50 - 1056$$

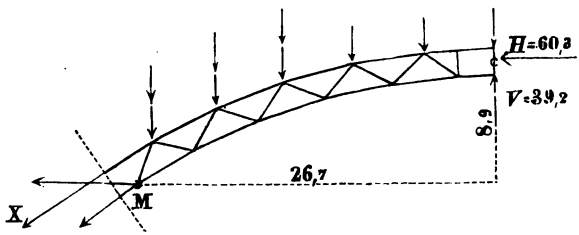
$$0 = -H \,.\, 50 - V \,.\, 50 + 1056 + 506 + 568 + 586 + \ldots + 4{,}7 - 33{,}3$$

$$H = 60{,}3 \qquad V = 39{,}2.$$

Die Momenten-Gleichung für X (min) ergiebt sich sodann aus Fig. **252**:

$$0 = -X \,.\, 2 - 60{,}3 \,.\, 8{,}9 - 39{,}2 \,.\, 26{,}7$$
$$+ 4\left(\frac{26{,}7}{2} + 21{,}4 + 16{,}1 + 10{,}9 + 6 + 1{,}2\right)$$
$$+ 14{,}8 \,.\, 10{,}9 + 19{,}4 \,.\, 6 + 23{,}9 \,.\, 1{,}2$$
$$X \text{ (min)} = -500{,}6 \text{ Tonnen}.$$

Fig. 252.

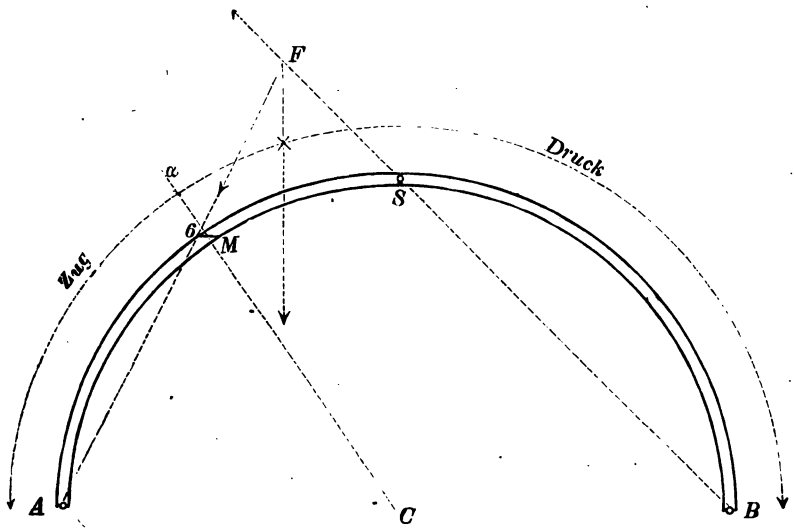


Berechnung der Spannungszahlen Z für die Theile des inneren Bogens.

Das von derselben Schnittlinie $C\alpha$ getroffene Stück des inneren Bogens, welches dem Punkte 6 gegenüberliegt, soll als Beispiel dienen. Für die später aufzustellende Momenten-Gleichung von Z wird der Punkt 6 den Drehpunkt bilden. Man findet also die Belastungsscheide, indem man den Durchschnittspunkt F der von A nach dem Punkte 6 gezogenen Linie mit der Richtung $B\,S$ construirt, und durch diesen Punkt eine Verticale legt (s. Fig. **253**). Die Belastungsscheide fällt in die Entfernung von $17^{m},3$ von der Mitte, also zwischen den dritten und vierten Belastungspunkt. Wenn Z ein Maximum werden soll, müssen die Punkte 4, 5, ... 14 allein die belasteten sein, und man erhält für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks bei diesem Belastungszustande die Gleichungen:

$$0 = H \,.\, 50 - V \,.\, 50 - 1056$$
$$0 = -H \,.\, 50 - V \,.\, 50 + 1056 + 568 + 586 + \ldots + 4{,}7 - 33{,}3$$
$$H = 55{,}3 \qquad V = 34{,}2.$$

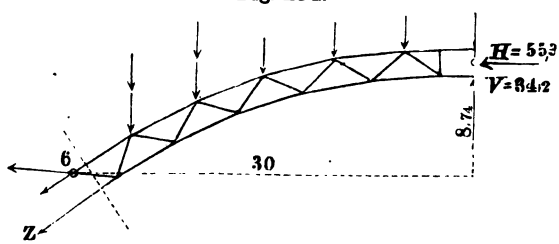
Fig. 253.



Aus Fig. **254** erhält man dann für Z (max) die Momenten-Gleichung:

$$0 = Z \,.\, 2 - 55{,}3 \,.\, 8{,}74 - 34{,}2 \,.\, 30$$
$$+ 4\left(\tfrac{30}{2} + 24{,}7 + 19{,}4 + 14{,}2 + 9{,}3 + 4{,}5\right)$$
$$+ 19{,}4 \,.\, 9{,}3 + 23{,}9 \,.\, 4{,}5$$
$$Z\,(\text{max}) = + 436{,}5 \text{ Tonnen.}$$

Fig. 254.



Um Z (min) zu bestimmen, hat man die Punkte 4, 5, ... 14 allein entlastet anzunehmen und erhält für die Seitenkräfte des

Scheiteldrucks bei diesem Belastungszustande, indem man die Momente 4, 5, ... 14 negativ zu der Momenten-Summe des vollbelasteten linken Trägers hinzufügt, die Gleichungen:

$$0 = H \,.\, 50 + V \,.\, 50 - 5595$$

$$0 = -H \,.\, 50 + V \,.\, 50 + 5595 - 568 - 586 - \ldots - 4{,}7 + 33{,}3$$

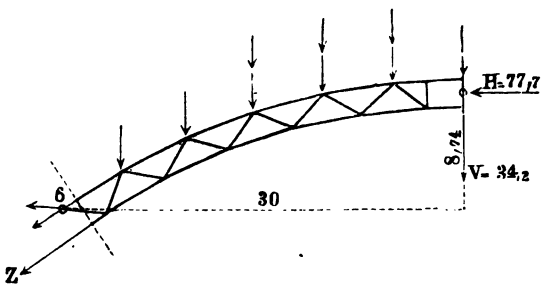
$$H = 77{,}7 \qquad V = 34{,}2.$$

Die Momenten-Gleichung für Z (min) ist dann nach Fig. **255** zu bilden:

$$0 = Z \,.\, 2 - 77{,}7 \,.\, 8{,}74 + 34{,}2 \,.\, 30 + 4\left(\tfrac{30}{2} + 24{,}7 + 19{,}4 + 14{,}2 + 9{,}3 + 4{,}5\right) + 5 \,.\, 24{,}7 + 9{,}9 \,.\, 19{,}4 + 14{,}8 \,.\, 14{,}2$$

$$Z\,(\text{min}) = -\,610{,}5 \text{ Tonnen.}$$

Fig. 255.



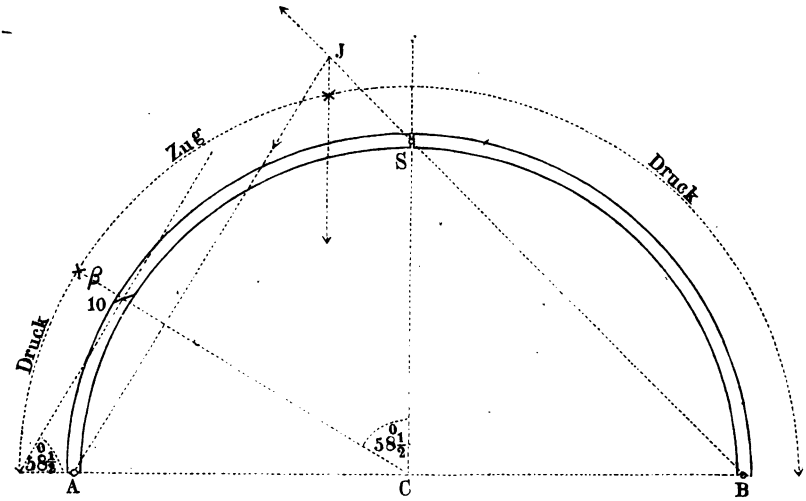
Berechnung der Spannungszahlen Y für die Diagonalen.

Von den beiden Diagonalen, welche zwischen den beiden Punkten 9 und 10 sich befinden, soll diejenige, welche mit dem Punkte 10 verbunden ist, als Beispiel dienen, um die Methode zu erläutern.

Bei der Berechnung der Diagonalen dieses Trägers tritt wiederum der schon im dritten Abschnitt § 9 ausführlich erörterte Ausnahmefall auf: dass der Drehpunkt für die Momenten-Gleichung in unendliche Ferne rückt. Die gerade Richtungslinie, in deren unendlich entferntem Endpunkte man sich den Drehpunkt zu denken hat, ist die an die Mittelkreislinie gelegte Tangente, welche dieselbe berührt an derjenigen Stelle, wo sie von der Diagonale geschnitten wird. Der Halbmesser dieses Punktes bildet mit dem verticalen Scheitelhalbmesser einen Winkel von $58\frac{1}{2}^0$, folglich bildet jene Tangente mit der Horizontalen einen Winkel von $58\frac{1}{2}^0$.

Alle diejenigen auf das Stück $S\beta$ wirkenden Kräfte also, welche dieser Tangenten-Richtung parallel sind, hat man als durch den Drehpunkt hindurchgehend zu betrachten (s. Fig. **256**), und ihre

Fig. 256.



Momente gleich Null zu setzen. Es unterscheidet sich dieser Fall nur dadurch von dem in § 9 behandelten Falle, dass die Tangenten-Richtung an die Stelle der dort horizontalen Richtungslinie tritt.

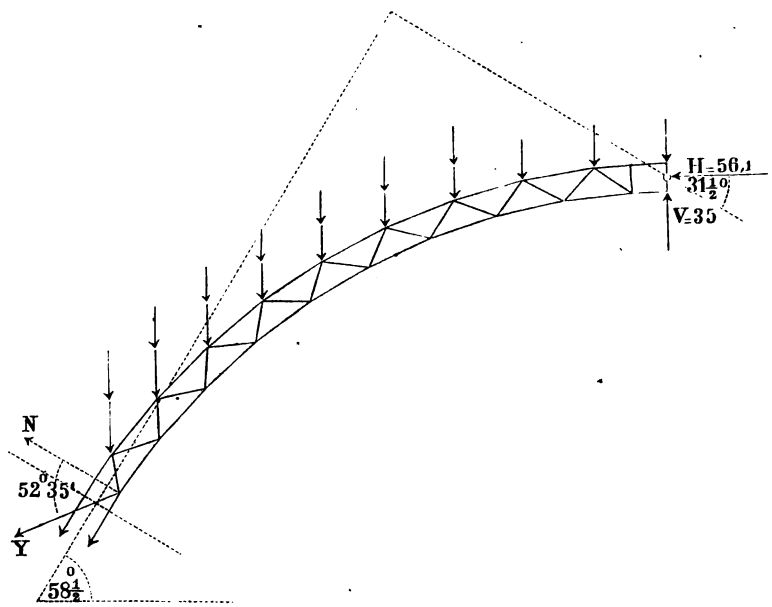
Es ist demnach jede auf das Stück $S\beta$ wirkende Kraft zu zerlegen in zwei Seitenkräfte, von denen die eine parallel, die andere normal zu dieser Tangenten-Richtung ist: und die algebraische Summe der letzteren Seitenkräfte ist dann gleich Null zu setzen.

Wenn von der Spannung Y diejenige Seitenkraft, welche normal zur Tangenten-Richtung ist, mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet wird, so werden alle diejenigen Kräfte, welche $\mathfrak{N}$ positiv machen, auch Y positiv machen. Diejenigen auf das Stück $S\beta$ wirkenden Kräfte also, welche mit $\mathfrak{N}$ gleiche Richtung haben, machen Y negativ, diejenigen, welche der Kraft N entgegengesetzte Richtung haben, machen Y positiv.

Man findet daher die Belastungsscheide — oder diejenige Stelle, wo ein Gewicht liegen muss, um keins von beiden zu thun — indem man durch den Punkt A eine Parallele zur Tan-

genten-Richtung legt und den Durchschnittspunkt J der Linie BS mit dieser Parallelen bestimmt. Ein Gewicht, welches in der durch den Punkt J gelegten Verticalen hängt, erzeugt nämlich mit dem von ihm hervorgebrachten Scheiteldruck zusammen für das Stück $S\beta$ eine Mittelkraft, welche in die Parallele hineinfällt, also gar keine Seitenkraft zu der Gleichung für $\mathfrak{N}$ liefert. Alle rechts gelegenen Belastungen machen $\mathfrak{N}$ negativ, alle zwischen der Schnittlinie $C\beta$ und der Belastungsscheide liegenden Belastungen machen $\mathfrak{N}$ positiv, alle links von der Schnittlinie $C\beta$ liegenden Gewichte aber machen $\mathfrak{N}$ wiederum negativ, denn sie wirken nur mittelbar auf das Stück $S\beta$, nämlich mittelst des von ihnen hervorgebrachten Scheiteldrucks. Die Belastungsabtheilungen bilden sich also, wie in Fig. **256** angegeben ist.

Fig. 257.



Die Construction ergiebt, dass der Abstand des Punktes J von der verticalen Mittelinie 12^m beträgt. Die Belastungsscheide fällt also zwischen den zweiten und dritten Punkt. Die Kraft $\mathfrak{N}$ und folglich auch Y wird also ein Maximum, wenn die Punkte 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 allein die belasteten sind. Bei diesem Belastungszustande ergeben sich für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks die Gleichungen:

$$0 = H \,.\, 50 - V \,.\, 50 - 1056$$

$$0 = -H \,.\, 50 - V \,.\, 50 + 1056 + 506 + 568 + 586 + 562 + 509 + 430 + 337$$

$$H = 56{,}1 \qquad V = 35.$$

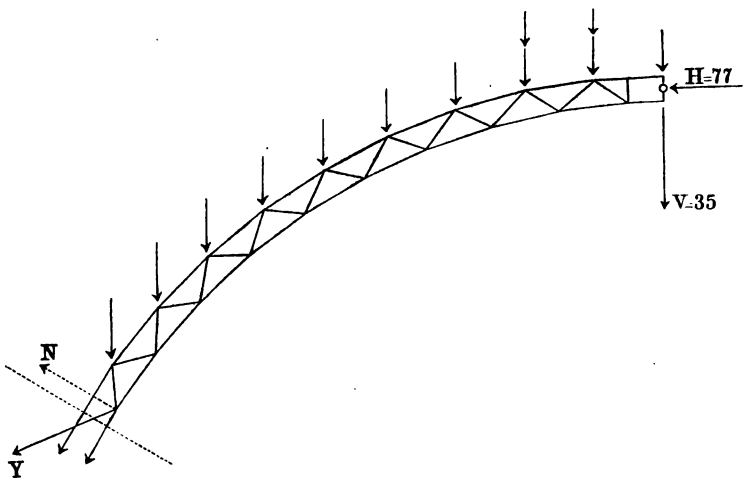
Nach Fig. **257** ist alsdann die algebraische Summe aller derjenigen Seitenkräfte, welche bei der Zerlegung in die Richtung von N fallen, gleich Null zu setzen:

$$0 = N + 56{,}1 \,.\, \cos 31\tfrac{1}{2}^0 + 35 \,.\, \sin 31\tfrac{1}{2}^0 - 4 \,.\, 9{,}5 \,.\, \sin 31\tfrac{1}{2}^0 - (14{,}8 + 19{,}4 + 23{,}9 + 28{,}1 + 32 + 35{,}5 + 38{,}7) \sin 31\tfrac{1}{2}^0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergiebt:

$$N(\max) = 54{,}3.$$

Fig. 258.



Hieraus erhält man, da Y einen Winkel von $52^0\,35'$ mit N einschliesst:

$$Y(\max) = \frac{54{,}3}{\cos 52^0\,35'} = +\,89{,}3 \text{ Tonnen.}$$

Um Y (min) zu bestimmen, hat man die Punkte 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 als die allein entlasteten anzunehmen und erhält für die Seitenkräfte des Scheiteldrucks bei diesem Belastungszustande die Gleichungen:

$$0 = H \,.\, 50 + V \,.\, 50 - 5595$$
$$0 = -H \,.\, 50 + V \,.\, 50 + 5595 - 506 - 568 - 586 - 562 - 509 - 430 - 337$$
$$H = 77 \qquad V = 35.$$

Aus Fig. **258** ergiebt sich dann für N(min) die Gleichung:

$$0 = N + 77 \,.\, \cos 31\tfrac{1}{2}^0 - 35 \sin 31\tfrac{1}{2}^0 - 4 \,.\, 9{,}5 \,.\, \sin 31\tfrac{1}{2}^0 - (5 + 9{,}9) \sin 31\tfrac{1}{2}^0$$
$$N(\text{min}) = -19{,}7.$$

Der entsprechende Werth von Y ist also:

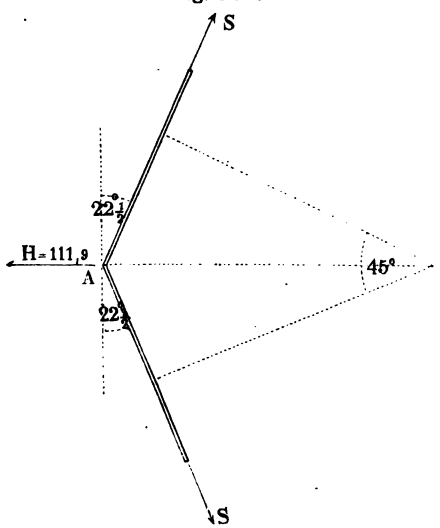
$$Y(\text{min}) = \frac{-19{,}7}{\cos 52^0\,35'} = -32{,}5 \text{ Tonnen.}$$

Diese drei Beispiele zeigen zur Genüge, wie man für jeden einzelnen Constructionstheil die Spannungszahlen berechnen kann, und ist es daher nicht erforderlich, dass auch für die übrigen Theile die Rechnungen (welche zu viel Raum in Anspruch nehmen würden) hier mitgetheilt werden.

Berechnung der Spannung S des Ringes.

Wenn die Zahl der Rippen wie in diesem Falle klein ist und der Ring in Folge dessen eine polygonale Form erhält, so ergeben sich aus Fig. **259** für die Spannung S die Gleichungen:

Fig. 259.



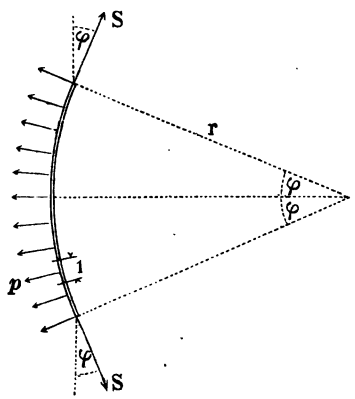
$$2\,S \sin 22\tfrac{1}{2}^0 = H \,,$$
$$S = \frac{111{,}9}{2 \,.\, 0{,}3827} = 146{,}1 \text{ T.}$$

Wäre dagegen die Anzahl der Rippen so gross, dass man die von innen her auf den Ring wirkenden Horizontalschübe als stetig auf den Umfang desselben vertheilt ansehen dürfte, so würde man den auf die Längeneinheit desselben wirkenden Druck p zu berechnen haben und

aus Fig. **260** (worin φ einen unendlich kleinen Winkel bedeutet, dessen Sinuszahl mit der Winkelzahl übereinstimmt), alsdann die Gleichung erhalten:

$$p \,.\, 2r\varphi = 2S\varphi \quad \text{oder} \quad S = pr.$$

Fig. 260.



In dem vorliegenden Falle würde z. B.

$$p = \frac{H}{r \,.\, \frac{\pi}{4}} = \frac{111{,}9}{51 \,.\, 0{,}7854} = 2{,}794$$

zu setzen sein und man erhielte für die Spannung des Ringes

$$S = 2{,}794 \,.\, 51 = 142{,}5 \text{ Tonnen.}$$

Der Unterschied ist, wie man sieht, so gering, dass es ziemlich gleichgültig ist, ob man auf die eine oder die andere Art die Spannung des Ringes berechnet.

§ 31.

Vortheilhaftestes Krümmungsprofil der Kuppeln.

Bei dem vorigen Zahlenbeispiel kam es nur darauf an, die Methode zu erklären, nach welcher bei einer gegebenen Kuppel-Construction die Spannungszahlen zu berechnen sind. Nur der leichteren Rechnung wegen wurde dort als Krümmungsprofil ein Halbkreis angenommen. Wenn man dagegen darauf ausginge, für die Rippen diejenige Form zu finden, mit welcher der geringste Materialverbrauch verbunden ist, so würde man die Gleichgewichtsform einer Kette zu untersuchen haben, deren Belastungsgesetz mit dem der Kuppelrippen übereinstimmt. Diese Form würde man den durch Scharniere verbundenen Hauptbogen der Rippen zu geben haben. Um den Wirkungen einseitiger Belastungen zu begegnen, würde man dem Hauptbogen einen durch Diagonalen-System mit ihm verbundenen Nebenbogen als Absteifung zur Seite geben. Bei voller Belastung würden alsdann Diagonalen und Nebenbogen ohne Spannung sein, bei einseitigen Belastungen würden ihre Spannungen nach der positiven und negativen Richtung hin um gleiche Grössen von der normalen Spannung Null sich entfernen (gerade so, wie dies bei der im § 22 berechneten

Bogenbrücke in Bezug auf die Horizontalen und Diagonalen sich gezeigt hat).

Sehr einfach gestaltet sich die Lösung dieser Aufgabe bei Kuppeln, die so flach gekrümmt sind, und deren Rippenzahl so gross ist, dass man ohne zu grosse Ungenauigkeit die zwischen den Rippen liegenden Flächentheile als ebene Dreiecke ansehen darf, deren Flächen mit gleichförmig über dieselben vertheilter Belastung bedeckt sind. In diesem Falle darf man den Schwerpunkt des Dreiecks SP als Angriffspunkt der Belastung ansehen, welche diesen Theil der Fläche bedeckt (s. Fig. **261**, Fig. **262**, Fig. **263**).

Fig. 261.

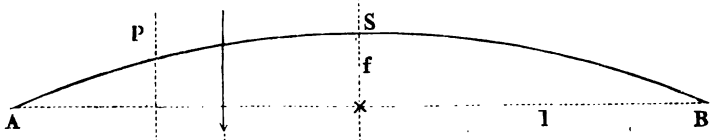


Fig. 262.

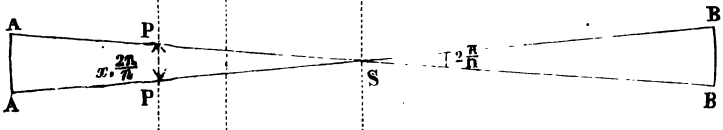
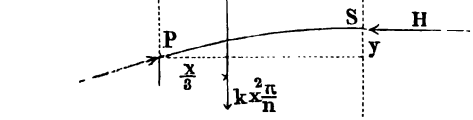


Fig. 263.



Wenn also k die Belastung pro Flächeneinheit der Grundrissfläche und n die Anzahl der Rippen ist (folglich $\frac{2\pi}{n}$ der sehr kleine Winkel, den zwei benachbarte Rippen in der Grundrissfläche mit einander einschliessen), so ist $x \cdot \frac{2\pi}{n} \cdot \frac{x}{2}$ die Fläche des Dreiecks und man erhält als Momenten-Gleichung des Stücks SP in Bezug auf den Punkt P als Drehpunkt (s. Fig. **263**):

$$1) \quad H \cdot y = k \cdot x^2 \cdot \frac{\pi}{n} \cdot \frac{x}{3}.$$

Diese Gleichung gilt auch für das Stück SA, für welches $x = l$ und $y = f$ zu setzen ist, also:

$$2) \quad Hf = kl^2 \frac{\pi}{n} \frac{l}{3}.$$

Die Division der ersten Gleichung durch die zweite führt zu der dritten Gleichung:

$$3) \quad \frac{y}{f} = \frac{x^3}{l^3}.$$

Wenn also der Hauptbogen die Form einer kubischen Parabel hätte, so würden bei voller Belastung sowohl Diagonalen als Nebenbogen die Spannung Null haben.

Bei dieser Ableitung ist das eigene Gewicht der Rippe, als entweder sehr klein, oder als nach dem gleichen Gesetze über die Bogenlänge vertheilt, unberücksichtigt geblieben. Wenn dasselbe als eine gleichförmig über die Horizontal-Projection der Bogenlinie vertheilte Belastung, welche pro Längeneinheit derselben p beträgt, mit berücksichtigt werden soll, so ergeben sich statt der vorigen die analogen drei Gleichungen:

$$1_a) \quad Hy = k \frac{\pi}{n} \frac{x^3}{3} + p \frac{x^2}{2}$$

$$2_a) \quad Hf = k \frac{\pi}{n} \frac{l^3}{3} + p \frac{l^2}{2}$$

$$3_a) \quad \frac{y}{f} = \frac{x^3 + \frac{3}{2} \frac{p}{k} \frac{n}{\pi} x^2}{l^3 + \frac{3}{2} \frac{p}{k} \frac{n}{\pi} l^2}.$$

Um eine allgemeinere Lösung der vorliegenden Aufgabe zu erhalten, welche auch Kuppeln von grösserer Pfeilhöhe und kleinerer Rippenzahl einschlösse, würde man nach den Principien zu verfahren haben, welche der „allgemeinen Theorie der Stützlinie“ zum Grunde liegen.

§ 32.

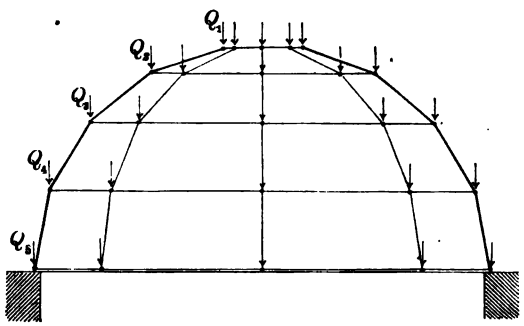
Kuppel mit gegliederten Rippen und Ringen.*)

Das in Fig. **264** und Fig. **265** dargestellte Stangengerippe der Kuppel bildet im Aufrissprofil die Hälfte eines regelmässigen Achtzehnecks, im Grundriss ein regelmässiges Achteck. Es wird

*) Vergl. Berliner Ztschr. für Bauwesen, Jahrgang 1866: „Die Construction der Kuppeldächer“ von W. Schwedler.

angenommen: dass die Stangen in den Knotenpunkten durch Kugelgelenke verbunden sind, und dass diese Knotenpunkte ausschliesslich die Belastungspunkte bilden. Diese Punkte liegen auf einer Halbkugelfläche vom Halbmesser $r = 10^{m}$ und vom Flächeninhalt $2r^2\pi = 2.10^2.3{,}1416 = 628^{\square m},32$. Wenn also pro Quadratmeter dieser Fläche die totale Belastung $p = 200$ Kil. angenommen wird, so hat die Summe der Belastungen sämmtlicher Belastungspunkte die Grösse:

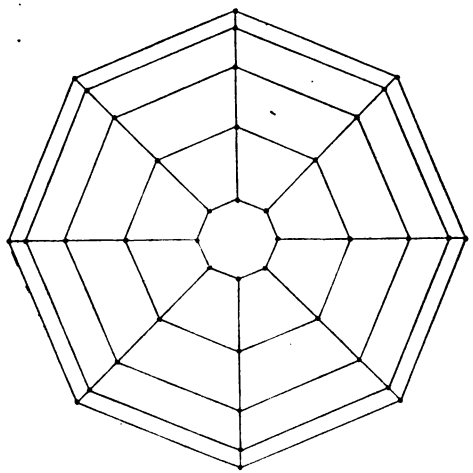
Fig. 264.



$$G = p \,.\, 2r^2\pi = 200 \,.\, 628{,}32 = 125664 \text{ Kil.}$$

Diese Totalbelastung vertheilt sich auf die den einzelnen 8-eckigen Horizontalringen angehörigen Gruppen von Belastungspunkten auf solche Art, dass die Belastungssummen der einzelnen Ringe als den Halbmessern der umgeschriebenen Kreise ungefähr proportional angesehen werden dürfen — mit Ausnahme des untersten Ringes, für welchen nur die Hälfte der betreffenden Zonenfläche, folglich auch nur die Hälfte der auf solche Weise zu bestimmenden Belastung in Rechnung zu bringen sein wird —. Die Halbmesser dieser 5 Kreise sind:

Fig. 265.



$$r_1 = r \,.\, \sin 10^0 = 10 \,.\, 0{,}17365 = 1^m{,}7365$$
$$r_2 = r \,.\, \sin 30^0 = 10 \,.\, 0{,}5 \quad = 5^m{,}0$$
$$r_3 = r \,.\, \sin 50^0 = 10 \,.\, 0{,}76604 = 7^m{,}6604$$
$$r_4 = r \,.\, \sin 70^0 = 18 \,.\, 0{,}93969 = 9^m{,}3969$$
$$r_5 = r \,.\, \sin 90^0 = 10 \,.\, 1 \quad = 10^m.$$

Wenn mit x der Proportionaltheil bezeichnet wird, welcher dem Halbmesser Eins entsprechen würde, so ergiebt sich für x die Gleichung:

$$1{,}7365 \,.\, x + 5 \,.\, x + 7{,}6604 \,.\, x + 9{,}3969 \,.\, x + \frac{10 \,.\, x}{2} = 125664,$$

oder

$$x = 4364^k{,}3.$$

Die Belastungen der einzelnen Ringe sind also:

$$x \,.\, r_1 = 4364{,}3 \,.\, 1{,}7365 = 7578^k{,}6\,*)$$
$$x \,.\, r_2 = 4364{,}3 \,.\, 5 \quad = 21821^k{,}5$$
$$x \,.\, r_3 = 4364{,}3 \,.\, 7{,}6604 = 33432^k{,}3$$
$$x \,.\, r_4 = 4364{,}3 \,.\, 9{,}3969 = 41010^k{,}9$$
$$\frac{x \,.\, r_5}{2} = \frac{4364{,}3 \,.\, 1}{2} \quad = 21821^k{,}5$$

und da jeder Ring 8 Belastungspunkte enthält, so hat man diese Zahlen noch durch 8 zu dividiren, um die Belastungen der fünf Belastungspunkte einer einzelnen Rippe zu erhalten.**) Es ist demnach:

$$Q_1 = \frac{7578{,}6}{8} = 947 \text{ Kil.}, \qquad Q_2 = \frac{21821{,}5}{8} = 2728 \text{ Kil.},$$
$$Q_3 = \frac{33432{,}3}{8} = 4179 \text{ Kil.}, \qquad Q_4 = \frac{41010{,}9}{8} = 5126 \text{ Kil.},$$
$$Q_5 = \frac{21821{,}5}{8} = 2728 \text{ Kil.}$$

---

*) Die für den obersten Ring in Rechnung zu bringende Belastungszahl würde selbstverständlich entsprechend zu vergrössern sein, wenn derselbe noch das Gewicht einer aufgesetzten Laterne oder sonstige hier nicht schon berücksichtigte Belastungen zu tragen hätte.

**) Wenn die Anzahl der Rippen 16 statt 8 betrüge, so würden die obigen Zahlen durch 16 zu dividiren sein; im Uebrigen würde durch Annahme einer grösseren Rippenzahl die Rechnung durchaus nicht erschwert worden sein. Nur der besseren Uebersichtlichkeit der Figuren wegen ist hier eine kleinere Rippenzahl gewählt.

Berechnung der bei voller Belastung eintretenden Spannungen.

Denkt man sich durch Meridian-Ebenen zu beiden Seiten der Rippe ACF die Kuppel durchschnitten und an den Schnittstellen der Ringe die zur Herstellung des Gleichgewichts erforderlichen Kräfte hinzugefügt (Fig. **266** und Fig. **267**), so findet man, dass von dem obersten Ringe auf die Rippe in dem Punkte A eine Horizontalkraft R_1 übertragen wird, welche als die Mittelkraft der beiden Ringspannungen X_1 sich darstellt und mit denselben durch die Gleichung:

$$2\,X_1 \sin\varepsilon = R_1$$

oder $$X_1 = \frac{R_1}{2\sin\varepsilon}$$

verbunden ist, in welcher der Winkel $\varepsilon = 22^0{,}5$ zu setzen ist. Dieselbe Beziehung findet statt bei jedem der anderen Ringe zwischen den beiden Spannungen desselben und ihrer horizontalen Mittelkraft.

Fig. 266.

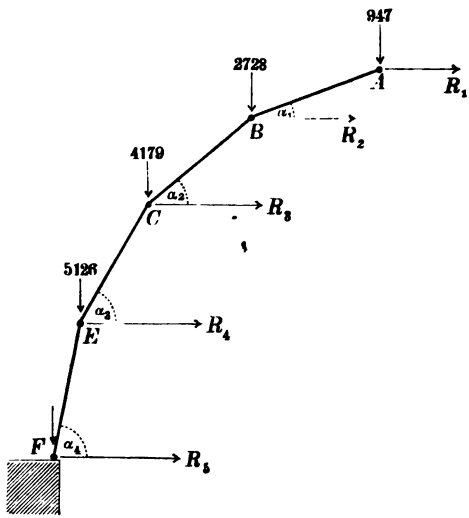
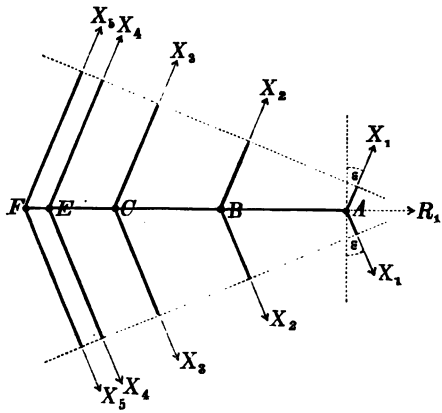


Fig. 267.

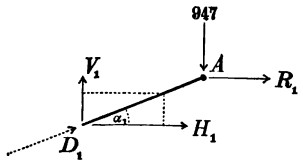


Denkt man sich ferner die Stange AB durchschnitten und die zur Herstellung des Gleichgewichts an der Schnittstelle anzubringende Druckkraft D_1 durch ihre horizontale und verticale Seitenkraft ersetzt (Fig. **268**), so findet man, indem man einmal die algebraische Summe der Verticalkräfte, einmal die Summe der Horizontalkräfte gleich Null setzt, die Gleichungen:

$$V_1 = 947 \text{ Kil.} \quad \text{und} \quad R_1 = -H_1.$$

Aus dem in der Figur angedeuteten Kräfteparallelogramm ergeben sich ferner die Gleichungen:

Fig. 268.



$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{V_1}{H_1} \text{ und } \sin\alpha_1 = \frac{V_1}{D_1},$$

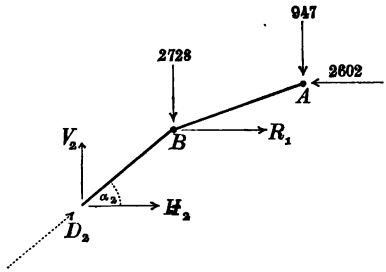
und da der Winkel $\alpha_1 = 20^0$ ist, so erhält\man hieraus die Werthe:

$$H_1 = \frac{947}{\operatorname{tg} 20^0} = 2602 \text{ Kil.}, \quad D_1 = \frac{947}{\sin 20^0} = 2770 \text{ Kil.},$$

$$R_1 = -2602 \text{ Kil.}, \quad X_1 = -\frac{2602}{2 \cdot \sin 22^0{,}5} = -3400 \text{ Kil.}$$

Die Anwendung desselben Verfahrens auf den in Fig. **269** dargestellten Theil der Construction führt zu den Gleichungen:

Fig. 269.



$$V_2 = 947 + 2728 = 3675 \text{ Kil.}$$

$$H_2 = \frac{V_2}{\operatorname{tg}\alpha_2} = \frac{3675}{\operatorname{tg} 40^0} = 4380 \text{ Kil.}$$

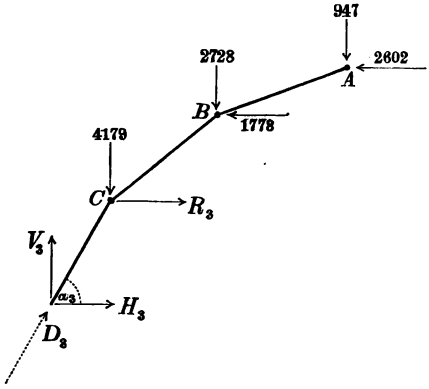
$$D_2 = \frac{V_2}{\sin\alpha_2} = \frac{3675}{\sin 40^0} = 5717 \text{ Kil.}$$

$$R_2 = 2602 - H_2 = -1778 \text{ Kil.}$$

$$X_2 = -\frac{1778}{2 \cdot \sin 22^0{,}5} = -2323 \text{ K.}$$

Auf gleiche Weise erhält man aus Fig. **270** die Gleichungen:

Fig. 270.



$$V_3 = 947 + 2728 + 4179 = 7854 \text{ Kil.}$$

$$H_3 = \frac{V_3}{\operatorname{tg}\alpha_3} = \frac{7854}{\operatorname{tg} 60^0} = 4535 \text{ Kil.}$$

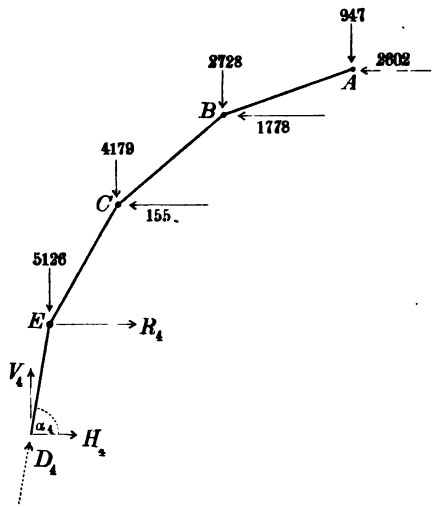
$$D_3 = \frac{V_3}{\sin\alpha_3} = \frac{7854}{\sin 60^0} = 9069 \text{ Kil.}$$

$$R_3 = 2602 + 1778 - H_3 = -155 \text{ Kil.}$$

$$X_3 = \frac{-155}{2 \cdot \sin 22^0{,}5} = -203 \text{ Kil.}$$

Endlich aus Fig. 271 ergeben sich die Gleichungen:

Fig. 271.



$$V_4 = 947 + 2728 + 4179 + 5126 = 12980 \text{ Kil.}$$

$$H_4 = \frac{V_4}{\operatorname{tg} \alpha_4} = \frac{12980}{\operatorname{tg} 80^0} = 2289 \text{ Kil.}$$

$$D_4 = \frac{V_4}{\sin \alpha_4} = \frac{12980}{\sin 80^0} = 13180 \text{ Kil.}$$

$$R_4 = 2602 + 1778 + 155 - H_4 = + 2246 \text{ Kil.}$$

$$X_4 = \frac{2246}{2 \,.\, \sin 22^0{,}5} = + 2935 \text{ Kil.}$$

Die Verticalspannung V_4 wird durch den Gegendruck der festen horizontalen Unterstützungsebene in der Stange EF hervorgebracht, während gleichzeitig durch den untersten Ring die Horizontalkraft H_4 auf dieselbe übertragen wird. Es ist also:

$$R_5 = H_4 = + 2289 \text{ Kil.}$$

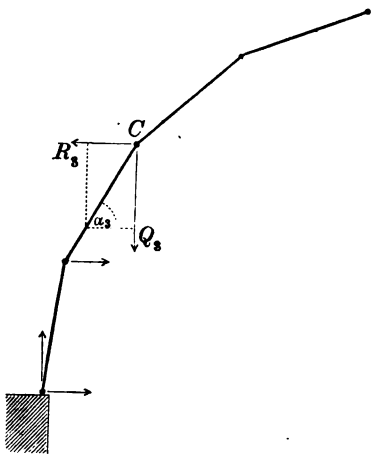
$$X_5 = \frac{2289}{2 \,.\, \sin 22^0{,}5} = + 2991 \text{ Kil.}$$

Minima der Ringspannungen.

Behandelt man die ganzen oben angenommenen Belastungen als zufällige (mobile) Belastungen, und denkt man sich die Belastung des obersten Ringes hinweggenommen, so erkennt man leicht, dass damit zugleich die Spannung des obersten Ringes selbst verschwindet. Wenn man dann auch noch die Belastungen des zweiten Ringes hinwegnähme, so würde auch dieser Ring spannungslos werden. Man überzeugt sich auf diese Weise leicht: dass überhaupt die Belastungen eines bestimmten Ringes in den sämmtlichen oberhalb desselben liegenden Stangen — sowohl der Rippen als der Ringe — keine Spannungen hervorbringen können. In dem Ringe selbst aber wird durch die eignen Belastungen desselben eine Druckspannung hervorgebracht und zwar die stärkste,

welche überhaupt eintreten kann, denn die Belastungen der höher liegenden Ringe würden für sich allein Zugspannung in demselben hervorbringen, während die Belastungen der tiefer liegenden Ringe überhaupt keinen Einfluss auf die Spannung des Ringes haben. Diese Druckspannung muss zugleich so beschaffen sein, dass die von dem Ringe auf den Belastungspunkt übertragene Kraft mit der Belastung selbst eine Mittelkraft bildet, welche in die Richtung des nächst tiefer liegenden Theiles der Rippe hineinfällt. Aus Fig. **272** ergiebt sich also z. B. für den 3ten Ring die Gleichung:

Fig. 272.



$$R_3\,(\min) = -\frac{Q_3}{\operatorname{tg}\alpha_3} = -\frac{4179}{\operatorname{tg}\,60^0} = -\,2413\text{ Kil.}$$

Auf gleiche Weise erhält man für den 2ten und 4ten Ring die Werthe:

$$R_2\,(\min) = -\frac{Q_2}{\operatorname{tg}\alpha_2} = -\frac{2728}{\operatorname{tg}\,40^0} = -\,3251\text{ Kil.}$$

$$R_4\,(\min) = -\frac{Q_4}{\operatorname{tg}\alpha_1} = -\frac{5126}{\operatorname{tg}\,80^0} = -\,904\text{ Kil.}$$

Die Minima der Ringspannungen selbst sind also:

$$X_2\,(\min) = -\frac{2251}{2\,.\,\sin 22^0{,}5} = -\,4248\text{ Kil.}$$

$$X_3\,(\min) = -\frac{2413}{2\,.\,\sin 22^0{,}5} = -\,3153\text{ Kil.}$$

$$X_4\,(\min) = -\frac{904}{2\,.\,\sin 22^0{,}5} = -\,1181\text{ Kil.}$$

Der erste und fünfte Ring kommen hier nicht in Betracht. Der letztere nicht, weil in demselben überhaupt nie Druckspannung eintreten kann; der oberste Ring aber aus dem Grunde nicht, weil in demselben stets Druckspannung stattfindet, und der für volle Belastung bereits gefundene Werth $X_1 = -\,3400$ Kil. zugleich die grösstmögliche Druckspannung dieses Ringes repräsentirt.

Maxima der Ringspannungen.

Die Spannung eines Ringes erreicht ihr Maximum, wenn die Belastungspunkte des Ringes selbst die allein unbelasteten sind, oder auch — da die Belastungen der tiefer liegenden Punkte überhaupt keinen Einfluss auf die Spannung des Ringes haben —: wenn ausschliesslich die höher liegenden Ringe belastet sind. Es würde also z. B. die Kraft R_3 bei dem in Fig. **273** dargestellten Belastungszustande ihr Maximum erreichen, und zwar ist dasselbe nach Fig. **274** zu bestimmen aus der Gleichung:

$$R_3 = H_2 - H_3 = \frac{V_2}{\operatorname{tg} \alpha_2} - \frac{V_3}{\operatorname{tg} \alpha_3}.$$

Fig. 273.

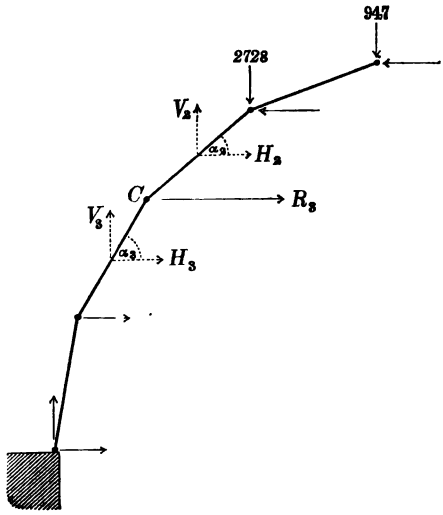
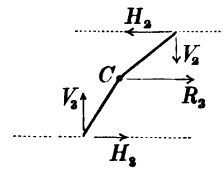


Fig. 274.



Setzt man hierin die aus Fig. **273** sich ergebenden Werthe:

$$V_2 = V_3 = 947 + 2728 = 3675, \text{ so wird:}$$

$$R_3 = \frac{3675}{\operatorname{tg} 40^0} - \frac{3675}{\operatorname{tg} 60^0} = + 2258 \text{ Kil.; es ist also:}$$

$$X_3 \text{ (max)} = + \frac{2258}{2 . \sin 22^0{,}5} = + 2950 \text{ Kil.}$$

Um für den 2ten Ring die Maximalspannung zu finden, würde man ausschliesslich die Belastungspunkte des obersten Ringes belastet anzunehmen haben. Dann wird:

$$V_2 = V_1 = 947, \text{ also}$$

$$R_2 = \frac{947}{\text{tg}\,20^0} - \frac{947}{\text{tg}\,40^0} = +\,1473, \text{ und}$$

$$X_2\,(\text{max}) = +\,\frac{1473}{2 \,.\, \sin 22^0{,}5} = +\,1925 \text{ Kil.}$$

Zur Bestimmung von X_4 (max) endlich würde man ausschliesslich die drei oberen Ringe belastet anzunehmen haben und die Gleichungen erhalten:

$$V_4 = V_3 = 947 + 2728 + 4179 = 7854.$$

$$R_4 = \frac{7854}{\text{tg}\,60^0} - \frac{7854}{\text{tg}\,80^0} = +\,3150$$

$$X_4\,(\text{max}) = +\,\frac{3150}{2 \,.\, \sin 22^0{,}5} = +\,4116 \text{ Kil.}$$

Bei der vorstehenden Berechnung wurden die Belastungen sämmtlicher Belastungspunkte eines und desselben Ringes stets gleich gross angenommen, d. h. es wurde die vorhandene Belastung in Bezug auf die verticale Achse der Kuppel stets nach allen Seiten hin **symmetrisch** angeordnet vorausgesetzt. Da die Stangen in den Knotenpunkten durch Kugelgelenke verbunden sein sollten, so würde die geringste Abweichung von der symmetrischen Lastvertheilung das Zusammenstürzen der Construction zur Folge haben. Soll die Kuppel auch solchen unsymmetrisch vertheilten Belastungen gegenüber hinreichende Widerstandsfähigkeit besitzen, so muss entweder das die eigentliche Kuppelfläche bildende Deckmaterial genügende Steifigkeit besitzen, um das mit demselben verbundene Stangengerippe an jeder Lagenveränderung zu verhindern; oder es müssten die Gelenkverbindungen wegfallen und statt dessen die Stangen jedes einzelnen Ringes, so wie jeder einzelnen Rippe zu einem continuirlichen bogenförmigen Balken vereinigt werden, der auch gegen Biegung hinreichenden Widerstand leistet. Die Bestimmnng der Biegungsspannungen, welche in solchem Falle bei unsymmetrischer Belastung eintreten würden, ist indessen eine Aufgabe, welche der elementaren Behandlungsweise sich entzieht.

Zehnter Abschnitt.

§ 33.

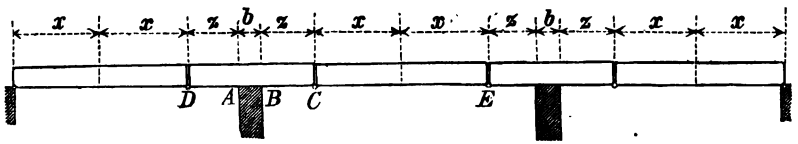
Balkenbrücken mit mehreren Oeffnungen.

Wie bei den Bogenbrücken durch Einschaltung von Gelenkverbindungen die Spannungen der Constructionstheile innerhalb bestimmter, leicht controlirbarer Grenzen gehalten und den von Temperaturwechseln und Verschiebungen der Widerlager drohenden Gefahren gänzlich entzogen werden können, so lässt sich auch bei den Balkenbrücken — d. h. solchen Brücken, welche nur verticale Drücke auf die Pfeiler ausüben — zur Abwendung ähnlicher Gefahren das Princip der Scharnierbrücken mit Vortheil anwenden, besonders bei grossen Spannweiten und mehrfach neben einanderliegenden Brückenöffnungen.

Es zeigt sich nämlich, dass man in solchen Fällen beträchtlich an Material ersparen kann, wenn man, anstatt jede Spannweite einzeln zu überbrücken, einen von Land- und Mittelpfeilern gemeinschaftlich unterstützten **continuirlichen** Träger anwendet, und dabei durch entsprechendes Heben und Senken der Stützpunkte zu erreichen strebt, dass die Maximal-Spannungen auf ein Minimum reducirt werden. Indessen würden bei solchen Constructionen ähnliche Uebelstände wie bei den ohne Scharnier construirten Bogenbrücken zu befürchten sein: dass nämlich sehr geringe Lagenänderungen der Stützpunkte schon beträchtliche Aenderungen in den Spannungen herbeiführen können — nur mit dem Unterschiede, dass, während bei den Bogenbrücken in den **horizontalen**, hier in den **verticalen** Lagenänderungen der Auflagerpunkte die Gefahr liegen würde —. Aehnliche Gründe also, wie sie in Betreff der Bogenbrücken bereits ausführlich (in § 24) erörtert wurden, sprechen auch hier für eine Unterbrechung der Continuität durch Einschaltung von Scharnieren, durch welche die Spannungen in den Constructionstheilen vollkommen unabhängig gemacht werden von etwaigen Höhenänderungen der Auflagerpunkte. Nur müssen hier die Gelenkpunkte eine andere Lage er-

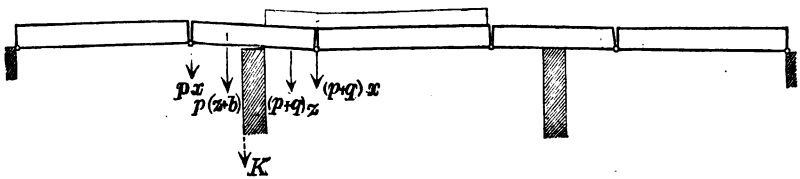
halten: während bei den Bogenbrücken die Gelenke am zweckmässigsten in den Scheitel und die beiden Auflagerpunkte verlegt wurden, sind dieselben hier zu beiden Seiten jedes der Mittelpfeiler anzubringen in der Weise, dass die Endpunkte der über den Mittelpfeilern liegenden Brückenabtheilungen den Mittel- und Endstücken als Auflagerpunkte dienen (s. Fig. **275**).

Fig. 275.



Jedes der über den Pfeilern liegenden Stücke ist als ein an **zwei** Punkten unterstützter Balken anzusehen, und, damit dasselbe durch einseitige Belastungen nicht zum Kippen gebracht werde, muss die Entfernung dieser beiden Punkte, oder die Pfeilerbreite, eine bestimmte Grösse haben, die sich leicht auf folgende Weise ermitteln lässt. Die in Bezug auf die Stabilität des Pfeilerstücks $C\,D$ ungünstigste Belastungsweise ist offenbar diejenige, bei welcher die Strecken $B\,C$ und $C\,E$ allein belastet, die übrigen aber unbelastet sind. Für diesen Belastungszustand erhält man

Fig. 276.



aus Fig. **275** und Fig. **276** als Momenten-Gleichung in Bezug auf den Punkt B als Drehpunkt die Gleichung:

$$0 = (p+q)\,x\,z + (p+q)\,z\,.\,\frac{z}{2} - p\,x\,(z+b) - p\,(z+b)\,\frac{(z+b)}{2},$$

worin p die permanente, q die mobile Belastung pro Längeneinheit bezeichnet. Die Auflösung dieser Gleichung ergiebt, wenn man das Verhältniss $\frac{q}{p}$ der mobilen zur permanenten Last mit n bezeichnet, als Bedingung des Gleichgewichts:

$$b \geqq -(x+z) + \sqrt{(x+z)^2 + 2\,n\,z\,(x+\tfrac{z}{2})}.$$

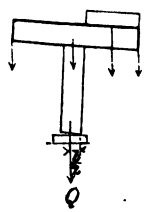
Da die Zahl n im Allgemeinen um so grösser wird, je kleiner die ganze Brücke ist, so würden hiernach kleine Brücken sehr grosse Pfeilerstärken erfordern. Um dies zu vermeiden, kann man dem Kippen zum Theil auch dadurch entgegenwirken, dass man die über dem Pfeiler liegende Brückenabtheilung durch Zugstangen mit dem Mauerwerk des Pfeilers gehörig verankert. Bei einseitiger Belastung entsteht dann in einer solchen Zugstange eine Spannung K, deren Moment $K\,b$ dem Stabilitäts-Momente des Pfeilerstücks zu Hülfe kommt, und deren Grösse aus der Momenten-Gleichung:

$$0 = (p+q)\,x\,z + (p+q)\,\frac{z^2}{2} - p\,x\,(z+b) - p\,\frac{(z+b)^2}{2} - Kb$$

berechnet werden kann. Dabei muss das Gewicht Q des Pfeilers selbst gross genug sein, um zu verhindern, dass das **Ganze** umkippt, nämlich die Bedingung erfüllt sein (s. Fig. **277**):

$$Q\,\frac{b}{2} + p\,x\,(z+b) + p\,\frac{(z+b)^2}{2} \geqq (p+q)\,z\left(x+\frac{z}{2}\right).$$

Fig. 277.



Wenn hiernach für das erforderliche Gewicht des Mauerwerks eine unerwünschte Grösse sich ergäbe, so könnte man, um Material zu ersparen, auch durch Anwendung von Doppelpfeilern die Entfernung b der beiden Stützpunkte des Stücks $A\,B$ und damit den Stabilitäts-Hebelarm vergrössern.

Was die Constructionsformen der einzelnen Brückenabtheilungen betrifft, so können die Mittelstücke — da sie in jeder Beziehung genau so wie gewöhnliche, auf zwei Endstützen ruhende Balkenbrücken sich verhalten — entweder als parabolische Träger (wie die im zweiten Abschnitt beschriebenen) oder als Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen (wie die im dritten Abschnitt behandelten) construirt werden. Den Pfeilerstücken kann man ebenfalls die letztere Form geben, doch wird im Allgemeinen — was Material-Ersparniss betrifft — einer anderen Form der Vorzug zu geben sein, welche aus der parabolischen Form in folgender Weise abgeleitet werden kann.

Wenn zwei oder mehrere symmetrisch gleiche (hängende oder gestützte) Ketten, welche mit gleichförmig über die Horizontal-Projection vertheilten Gewichten belastet sind, neben einander in

fortlaufender Reihe so aufgestellt sind, dass der zweite Stützpunkt der ersten Kette den ersten der zweiten bildet u. s. f., so heben an diesen gemeinschaftlichen Stützpunkten die Horizontalschübe einander auf, und nur ein verticaler Widerstand, wie z. B. der einer vertical herabhängenden Zugstange, ist an jeder dieser Stellen erforderlich. Statt des Endpunktes eines solchen einfachen Verticalhebels können, wie schon in § 27 erwähnt wurde, auch die durch eine horizontale Stange mit einander verbundenen Endpunkte AB eines Doppelhebels als Stützpunkte gewählt werden (s. Fig. **278** und Fig. **279**).

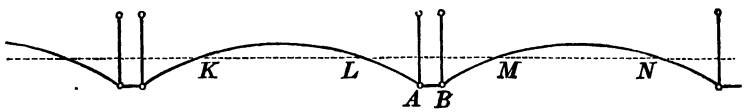


Fig. 278.

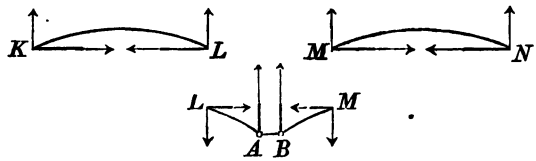


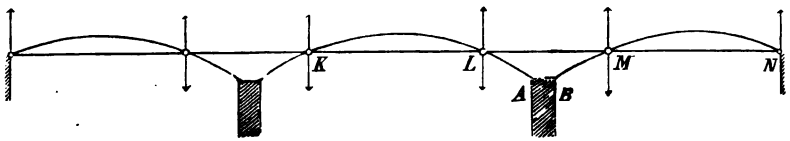
Fig. 279.

Trennt man durch einen Horizontalschnitt das Stück $LABM$ von den beiden Scheitelstücken KL und MN, so können die an den Schnittstellen zur Wiederherstellung des Gleichgewichts anzubringenden **Horizontal**kräfte dadurch dargestellt werden, dass man die Punkte K und L, ebenso M und N, so wie auch die Punkte L und M paarweise durch eine horizontale Zugstange mit einander in Verbindung setzt. Die **verticalen** Kräfte aber haben für das Stück $LABM$ einerseits und die Stücke KL und MN andererseits gleiche Grössen und entgegengesetzte Richtungen, können also in den Punkten L und M durch unmittelbares Auflegen der beiden Scheitelstücke KL und MN auf das Stück $LABM$ dargestellt werden.

Da in dem Zustande jedes der Kettenstücke keinerlei Aenderung hierdurch hervorgebracht wurde, insofern nunmehr der Gleichgewichtszustand, wie er vor dem Durchschneiden stattfand, wieder hergestellt ist, so wird eine, aus solchen parabolischen Stücken zusammengesetzte Brücken-Construction, wie die in Fig. **280** dargestellte, in welcher eine durchlaufende horizontale

Zugstange überall die Horizontalschübe aufnimmt, bei voller gleichförmiger Belastung keines Diagonalen-Systems zur Absteifung bedürfen. Da ferner die Gleichgewichts-Bedingungen der hängenden

Fig. 280.



und der gestützten Kette auf denselben Principien beruhen, so gilt, wenn man das Wort Zugstange mit dem Worte Druckstange vertauscht, das oben Gesagte auch von der in Fig. **281** dargestellten Brücken-Construction.

Fig. 281.

Was die Spannung der Kettenstücke betrifft, so sind dieselben ganz wie bei der in § 8 untersuchten an zwei Endpunkten unterstützten Kette zu bestimmen, und gelten die auf Seite 30 angeführten Gesetze auch hier, nämlich: die Verticalspannung an einer bestimmten Stelle ist gleich dem Gewichte des Brückenstücks zwischen dieser Stelle und dem Scheitel, die Horizontalspannung aber ist an allen Stellen gleich. Eine Aenderung der Pfeilhöhe bewirkt also nur eine Aenderung in der Horizontalspannung, nicht aber eine Aenderung der Verticalspannung.

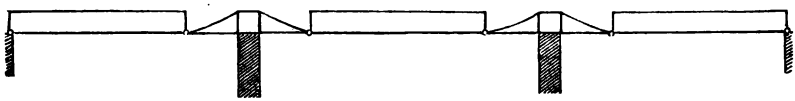
Da die Mittelstücke in Fig. **280** und Fig. **281** ganz wie frei aufliegende parabolische Träger (von den Formen Fig. **27** und Fig. **36**) zu betrachten sind, so können deren Pfeilhöhen für sich beliebig geändert werden, ohne dass dadurch etwas Anderes als **ihre** Horizontalspannungen (und damit zugleich die Spannungen **ihrer** Horizontalstangen) geändert würden. Die Spannungen in den Pfeilerstücken werden dadurch in keiner Weise geändert, denn die auf dieselben von den Mittelstücken ausgeübten Verticalkräfte bleiben dieselben. Die Horizontalspannungen in den Pfeiler-Abtheilungen hängen nur ab von den Pfeilhöhen derjenigen Parabeln, zu denen **sie** als Theile gehören.

Auch können die Lagen der Scheitelstücke in Fig. **280** und Fig. **281** mit einander vertauscht werden, ohne dass dadurch in den übrigen Stücken eine Aenderung hervorgebracht würde. Man erhält dann z. B. eine Construction wie die in Fig. **282** darge-

Fig. 282.

stellte, welche in solchen Fällen, wo die Fahrbahn möglichst tief gelegt werden soll, den Vorzug verdient. Es bedarf kaum noch der Erwähnung, dass man auch gewöhnliche Fachwerk- oder Gitterbrücken statt der parabolischen Träger für die Scheitel-

Fig. 283.



stücke einschalten kann, ohne dass in den Pfeilerabtheilungen dadurch eine Aenderung hervorgebracht wird (s. Fig. **283**).

§ 34.

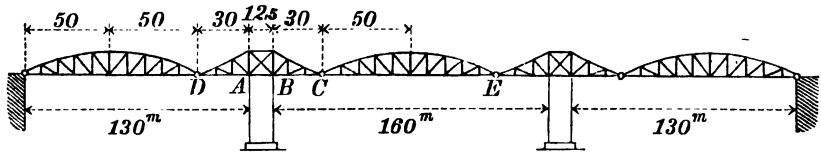
Balkenbrücke von 160^{m} Spannweite der Mittelöffnung und je 130^{m} Spannweite der Seitenöffnungen.

Das Eigengewicht der Brücke ist überall zu 8000^{k} für den laufenden Meter veranschlagt, wovon auf jede der beiden Tragwände die Hälfte kommt. Da die Länge eines jeden Feldes (innerhalb der Spannweiten) 10^{m} beträgt, so kommen 40000^{k} oder — die Tonne zu 1000^{k} gerechnet — 40 Tonnen permanenter Last auf jeden Belastungspunkt. Die mobile Last ist zu 4000^{k} für den laufenden Meter angenommen, beträgt also für jeden Belastungspunkt 20 Tonnen.

Die drei parabolischen Träger, welche zwischen den Pfeilern liegen (s. Fig. **284**), haben jeder 100^{m} Spannweite bei 12^{m},5 Pfeilhöhe und sind nach derselben Methode wie Fig. **39** im zweiten Abschnitt zu berechnen. Es ist also hier nur erforderlich, zu

zeigen, wie die über den beiden Pfeilern liegenden Brücken-Abtheilungen zu berechnen sind, und sollen dazu die in dem

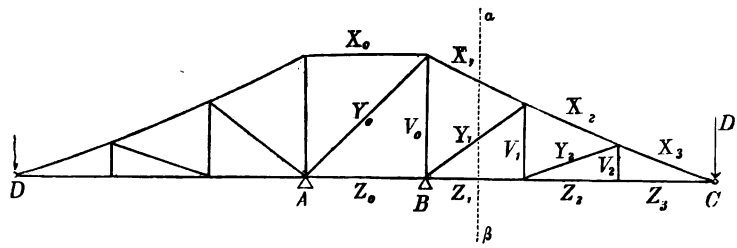
Fig. 284.



ersten Felde neben dem Pfeiler befindlichen Constructionstheile als Beispiele gewählt werden.

Da der Punkt C (s. Fig. **284** und **285**) einen der beiden Auflagerpunkte für den Träger CE bildet, so wird der von Seiten

Fig. 285.



dieses Trägers auf ihn übertragene Druck D am grössten, wenn das Stück CE ganz belastet, am kleinsten, wenn das Stück CE ganz unbelastet ist. Im ersten Falle ist

$$D = \frac{(40+20)\,10}{2} = 300 \text{ Tonnen},$$

im zweiten Falle

$$D = \frac{40 \cdot 10}{2} = 200 \text{ Tonnen},$$

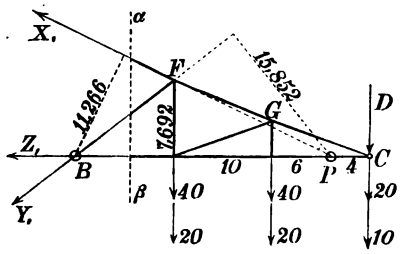
zu setzen. Es wird demnach für D der eine oder der andere dieser beiden Werthe zu substituiren sein, jenachdem diese Kraft auf Vermehrung oder Verminderung der Spannung eines Constructionstheils hinwirkt und jenachdem Maximum oder Minimum der Spannungszahl desselben bestimmt werden soll. Im Uebrigen geschieht die Berechnung nach derselben Methode, welche früher angewendet wurde: man legt einen Schnitt $\alpha\beta$ durch das betreffende Feld und stellt dann für den Theil $C\alpha\beta$ die Momenten-Gleichungen auf (s. Fig. **286**).

Die Momenten-Gleichung für X_1 in Beziehung auf den Drehpunkt B ist:

$$0 = - X_1 \,.\, 11{,}266 + D \,.\, 30 + 40\,(10 + 20 + \tfrac{30}{2}) + 20\,(10 + 20 + \tfrac{30}{2}).$$

Man erkennt aus der Form dieser Gleichung, dass sowohl D, als die Belastungen der Punkte F, G, C darauf hinwirken, X_1 positiv zu machen. Das Stück CE sowohl als die Punkte F, G, C sind also vollbelastet anzunehmen, wenn X_1 (max) bestimmt werden soll, und man erhält nach Substitution des Maximalwerthes für D:

Fig. 286.



$$0 = - X_1 \,.\, 11{,}266 + 300 \,.\, 30 + 60\,(10 + 20 + \tfrac{30}{2})$$
$$X_1\,(\text{max}) = 1038{,}5 \text{ Tonnen.}$$

Zur Bestimmung von Y_1 ist die Momenten-Gleichung in Bezug auf den Drehpunkt P aufzustellen. Die permanente Last braucht zwar nicht berücksichtigt zu werden bei der Bestimmung der Spannungszahlen Y, nachdem in § 33 bereits nachgewiesen wurde, dass eine gleichförmig vertheilte Last keine Spannung in den Diagonalen erzeugt; auch braucht von den beiden Werthen $Y\,(\text{max})$ und $Y\,(\text{min})$, die von der mobilen Last hervorgebracht werden, nur einer berechnet zu werden, denn beide zusammen müssen Null betragen, weil der vollen mobilen Belastung ebenfalls die Spannungszahl Null entspricht. Nur um zu zeigen, dass die Methode der statischen Momente unter allen Umständen zuverlässige Auskunft giebt und keinerlei dergleichen Vorkenntnisse voraussetzt, soll hier die Berechnung mit Berücksichtigung der permanenten Last für Maximum sowohl als für Minimum mitgetheilt werden. Die Momenten-Gleichung ist:

$$0 = - Y_1 \,.\, 15{,}852 + D \,.\, 4 + 40\,(\tfrac{4}{2} - 6 - 16) + 10 \,.\, 4 - 20\,(6 + 16).$$

Wenn Y_1 gross werden soll, so muss D gross sein und die beiden negativen von der mobilen Last herrührenden Glieder müssen wegfallen; man erhält dann:

$$0 = - Y_1 \,.\, 15{,}852 + 300 \,.\, 4 + 40\,(\tfrac{4}{2} - 6 - 16) + 10 \,.\, 4$$
$$Y_1\,(\text{max}) = + 27{,}76 \text{ Tonnen.}$$

Soll dagegen Y_1 klein werden, so muss D klein sein, und das von der mobilen Last herrührende positive Glied muss wegfallen, also:

$$0 = -Y_1 \cdot 15{,}852 + 200 \cdot 4 + 40\,(\tfrac{4}{2} - 6 - 16) - 20\,(6 + 16)$$

$$Y_1\,(\min) = -27{,}76 \text{ Tonnen.}$$

Zur Bestimmung von Z_1 dient die Momenten-Gleichung in Beziehung auf den Drehpunkt F:

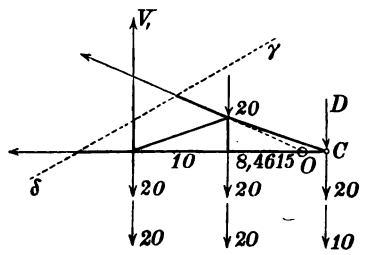
$$0 = Z_1 \cdot 7{,}692 + D \cdot 20 + 40\,(\tfrac{20}{2} + 10) + 20\,(\tfrac{20}{2} + 10),$$

aus welcher leicht zu erkennen, dass alle Belastungen auf Druckspannung hinwirken. Um die stärkste Druckspannung zu erhalten, ist also $D = 300$ zu substituiren, und es ergiebt sich:

$$0 = Z_1 \cdot 7{,}692 + 300 \cdot 20 + 40\,(\tfrac{20}{2} + 10) + 20\,(\tfrac{20}{2} + 10)$$

$$Z_1\,(\min) = -936 \text{ Tonnen.}$$

Fig. 287.



Zur Bestimmung von V_1 ist der Schnitt $\gamma\,\delta$ zu führen und die Momenten-Gleichung in Bezug auf den Drehpunkt O aufzustellen (s. Fig. **287**). Die permanente Last soll als zur Hälfte in den oberen und zur andern Hälfte in den unteren Knotenpunkten concentrirt angesehen werden. Als allgemeine Momenten-Gleichung erhält man dann:

$$0 = V_1 \cdot 18{,}4615 + D \cdot 1{,}5385 + 40\,(\tfrac{1{,}5385}{2} - 8{,}4615 - \tfrac{18{,}4615}{2}) + 20 \cdot \tfrac{1{,}5385}{2} - 20\,(8{,}4615 + 18{,}4615).$$

Am grössten wird V_1, wenn D seinen kleinsten Werth annimmt, und der Punkt C unbelastet ist, also:

$$0 = V_1 \cdot 18{,}4615 + 200 \cdot 1{,}5385 + 40\,(\tfrac{1{,}5385}{2} - 8{,}4615 - \tfrac{18{,}4615}{2}) - 20\,(8{,}4615 + 18{,}4615)$$

$$V_1\,(\max) = +49{,}2 \text{ Tonnen.}$$

Am kleinsten, wenn D seinen grössten Werth annimmt, und der Punkt C allein belastet ist:

$$0 = V_1 \cdot 18{,}4615 + 300 \cdot 1{,}5385 + 40\,(\tfrac{1{,}5385}{2} - 8{,}4615 - \tfrac{18{,}4615}{2}) + 20 \cdot \tfrac{1{,}5385}{2}$$

$$V_1\,(\min) = +10{,}8 \text{ Tonnen.}$$

[Auch hier kann man sich davon überzeugen, dass die von der mobilen Last allein hervorgebrachten Spannungszahlen, nämlich:

$$+29{,}2 \quad \text{und} \quad -9{,}2$$

mit der permanenten Spannungszahl

$$+20$$

vereinigt dieselben Werthe ergeben.]

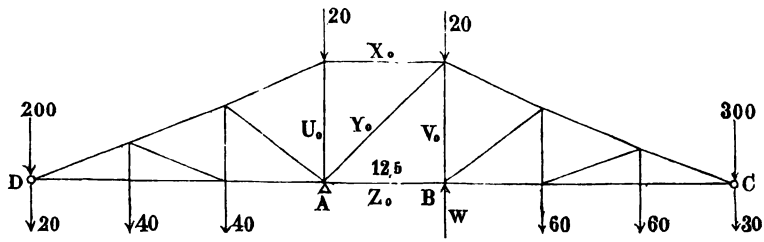
Für die gleichliegenden Constructionstheile in den beiden anderen Feldern erhält man auf ähnliche Weise die Gleichungen:

$$0 = -X_2 \cdot 7{,}1 + 300 \cdot 20 + (40+20)\left(\tfrac{20}{2}+10\right)$$
$$X_2(\max) = +1014 \text{ T.}$$
$$0 = -Y_2 \cdot 6{,}138 + (200+100)\,1{,}5385 + 40\left(\tfrac{1{,}5385}{2} - 8{,}4615\right) + 20 \cdot \tfrac{1{,}5385}{2} - 20 \cdot 8{,}4615$$
$$Y_2\begin{pmatrix}\max\\ \min\end{pmatrix} = \pm 27{,}57 \text{ T.}$$
$$0 = Z_2 \cdot 3{,}526 + 300 \cdot 10 + 30 \cdot 10$$
$$Z_2(\min) = -936 \text{ T.}$$
$$0 = V_2 \cdot 10 - 20 \cdot 10 - 20 \cdot 10$$
$$V_2(\max) = +40 \text{ T.} \qquad V_2(\min) = +20 \text{ T.}$$
$$0 = -X_3 \cdot 3{,}325 + 300 \cdot 10 + 30 \cdot 10$$
$$X_3(\max) = +992{,}5 \text{ T.}$$
$$0 = Z_3 \cdot 3{,}526 + 300 \cdot 10 + 30 \cdot 10$$
$$Z_3(\min) = -936 \text{ T.}$$

In etwas abweichender Weise sind die Diagonale und die beiden Verticalständer über dem Pfeiler zu berechnen, weil hier der Gegendruck W des Pfeilers mit in Rechnung kommt. Unter diesem Druck W ist hier der Gegendruck des festen Punktes B gegen die Construction zu verstehen, und dabei die Belastung, welche den Punkt B als Belastungspunkt trifft, als direct vom Pfeiler aufgenommen (also ohne Einfluss auf die Grösse des Drucks W) anzusehen.

Um die Grösse dieses Druckes zu bestimmen, hat man das

Fig. 288.



ganze Stück CD als einen Hebel anzusehen, welcher in dem anderen Auflagerpunkte A seinen festen Drehpunkt hat (s. Fig. 288).

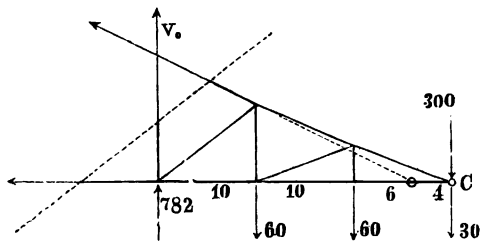
Man erkennt sogleich, dass, wenn W gross werden soll, alle Punkte rechts von A voll belastet sein müssen und erhält für den grössten Werth von W aus Fig. **288** die Momenten-Gleichung:

$$0 = -W.12{,}5 + 20.12{,}5 + 60\,(22{,}5 + 32{,}5 + \tfrac{42{,}5}{2}) + 300.42{,}5 - 40\,(10 + 20 + \tfrac{30}{2}) - 200.30$$

$$W\,(\max) = 782 \text{ Tonnen.}$$

Dass dieser Belastungszustand zugleich derjenige ist, bei welchem V_0 ein Minimum wird, davon überzeugt man sich leicht durch einen Blick auf Fig. **289**, indem man erwägt, dass alle Belastungen dieses Theils zu dem Drucke W Beiträge liefern, die erstlich grösser als die Belastungen selbst sind, und zweitens an längeren Hebelarmen wirken in Beziehung auf den Drehpunkt.

Fig. 289.



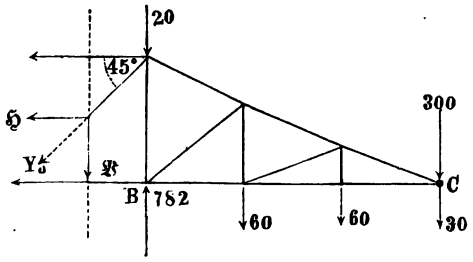
Man erhält demnach für V_0 (min) aus Fig. **289** die Momenten-Gleichung:

$$0 = V_0 . 26 + 782 . 26 + 300 . 4 + 30 . 4 - 60\,(6 + 16)$$

$$V_0\,(\min) = -782 \text{ Tonnen.}$$

Bei demselben Belastungszustande wird ferner Y_0 ein Maximum. Denn für Y_0 geht wegen Parallelismus der Richtungen X_0 und Z_0 die Momenten-Gleichung wiederum in die Gleichuung der Verticalkräfte über. Die Differenz der Verticalkräfte aber wird für das Stück Fig. **290** um so grösser, je mehr dasselbe belastet wird, weil alle Belastungen dieses Stücks an Grösse übertoffen werden von den Beiträgen, die sie zu dem Gegendruck W liefern. Man erhält also für die verticale Seitenkraft von Y_0 (max) die Gleichung:

Fig. 290.



$$0 = \mathfrak{B} - 782 + 20 + 60 + 60 + 30 + 300$$

$$\mathfrak{B} = 312$$

und da die Diagonale einen Winkel von 45° mit der Verticalen einschliesst:

$$Y_0 \text{ (max)} = \frac{\mathfrak{B}}{\cos 45^0} = 312 \,.\, \sqrt{2} = + 441{,}2 \text{ Tonnen.}$$

Schon früher wurde bewiesen, dass bei voller Belastung $Y_0 = 0$ wird, dass also das Minimum seinem absoluten Werthe nach mit dem Maximum übereinstimmen muss; es ist folglich:

$$Y_0 \begin{pmatrix} \text{max} \\ \text{min} \end{pmatrix} = \pm 441{,}2 \text{ Tonnen.}$$

Was den über dem Punkte A stehenden Verticalständer U_0 betrifft, so ist die einzige Verticalkraft, welche ausser der permanenten Belastung von 20 Tonnen an dem Kopfe desselben angreift, die verticale Seitenkraft der Bogenspannung, und diese ist immer gleich der Summe aller Belastungen von der betreffenden Stelle an bis zum Scheitel gerechnet, d. h. bis zur Mitte des Scheitelstücks. Sie wird, wie bei der Berechnung von X_1 gefunden wurde und auch sonst schon bekannt ist, bei voller Belastung am stärksten; es ist also:

$$- U_0 = 20 + [60 + 60 + 30 + 300]$$
$$U_0 \text{ (min)} = - 470 \text{ Tonnen.}$$

(Die Maxima der Spannungszahlen für die beiden Verticalständer sind ebenfalls negativ und kommen deshalb nicht in Betracht. Es wird nämlich, wie man leicht durch Umkehrung der Belastungszustände findet: $V_0 \text{ (max)} = - 8$ Tonnen und $U_0 \text{ (max)} = - 320$ Tonnen.)

Die Spannungszahlen X_0 und Z_0 der beiden horizontalen Stangen über dem Pfeiler sind dieselben wie die aller übrigen horizontalen Stangen, nämlich gleich der Horizontalspannung der Kette bei voller Belastung, und zwar ist:

$$X_0 \text{ (max)} = + 936 \text{ Tonnen.}$$
$$Z_0 \text{ (min)} = - 936 \text{ Tonnen.}$$

Die Grösse dieser Horizontalspannung hängt, wie früher schon bemerkt wurde, nur ab von der Pfeilhöhe derjenigen gedachten Parabel, zu welcher die Bogen des Stücks CD als Theile gehören, nicht aber von der Form der wirklich vorhandenen Scheitelstücke. Der Scheitel der hier in Betracht kommenden Parabel liegt in der Entfernung $8^m{,}0128$ unter der Fahrbahnlinie, es ist also die Pfeilhöhe derselben:

$$f = 12{,}5 + 8{,}0128 = 20{,}5128.$$

Die zugehörige Spannweite ist:

$$2\,l = 160^{m}.$$

Man kann also die Horizontalspannung H auch nach der Gleichung berechnen:

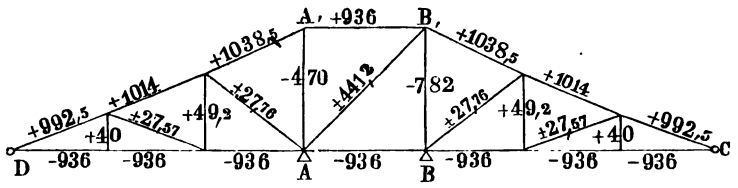
$$H = \frac{(p+q)\,l^2}{2\,.\,f} = \frac{(4+2)\,.\,80^2}{2\,.\,20{,}5128} = 936 \text{ Tonnen}$$

(während die Horizontalspannung für die zwischen den Pfeilern liegenden parabolischen Träger nur

$$\frac{(4+2)\,50^2}{2\,.\,12{,}5} = 600 \text{ Tonnen beträgt}).$$

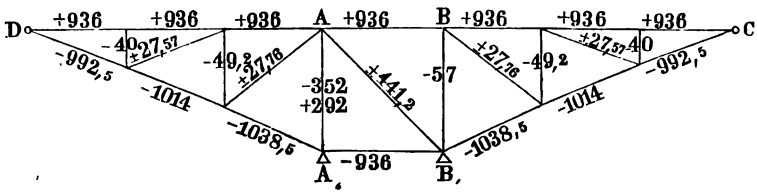
Die Spannungszahlen sind in Fig. **291** zusammengestellt. Wenn man in dieser Figur die Vorzeichen sämmtlicher Spannungszahlen

Fig. 291.



in die entgegengesetzten verwandelte, so würden — vorausgesetzt, dass die Punkte A und B immer noch die Befestigungspunkte blieben — die so erhaltenen Spannungszahlen für die umgekehrte Lage derselben Construction gelten. Man wird indessen bei dieser Lage statt der Punkte A und B die Punkte A_1 und B_1 als Auflagerpunkte wählen, und dadurch werden natürlich die Spannungszahlen der beiden Verticalständer über dem Pfeiler eine Aenderung erleiden, die man leicht entweder direct oder nach der früher mehrfach benutzten Methode der „fingirten Nebenständer" berechnen kann (vergl. § 12). Die für diese Construction geltenden Spannungszahlen, welche hinsichtlich der übrigen Theile

Fig. 292.



nur durch die Vorzeichen von den vorigen sich unterscheiden, sind in Fig. **292** eingetragen.

Aus den beiden Figuren **291** und **292** lässt sich nun wiederum in ähnlicher Weise, wie dies früher bei den parabolischen und sichelförmigen Trägern geschehen ist, eine grosse Zahl abgeleiteter Formen bilden, von denen hier nur diejenigen als Beispiele aufgeführt werden sollen, welche auf veränderte Constructionen des Mittelfeldes Bezug haben.

Wenn statt der **einen** Diagonale zwei einander kreuzende Diagonalen in dem Mittelfelde sich befinden, die sowohl Zug- als Druckspannung anzunehmen fähig sind (s. Fig. **293**), so theilen sich dieselben zu gleichen Theilen in die vorhin berechnete Spannungszahl der **einen** Diagonale, und die Spannungszahl jedes der beiden Verticalständer wird das arithmetische Mittel der beiden früher gefundenen Zahlen (wie man sich leicht überzeugt, wenn man sich zwei Träger mit halbirten Spannungszahlen, einen mit links, einen mit rechts ansteigender Diagonale hinter einander gestellt denkt).

Sind dagegen die beiden Diagonalen so construirt, dass sie

Fig. 293.

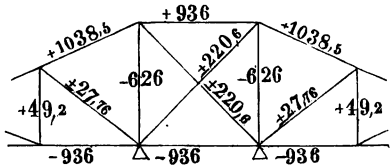


Fig. 294.

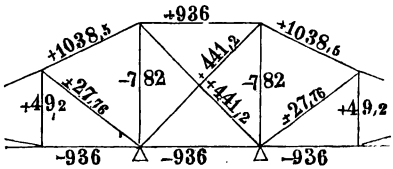


Fig. 295.

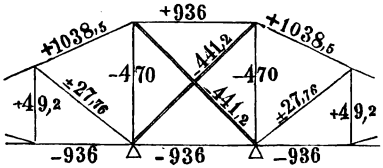


Fig. 296.

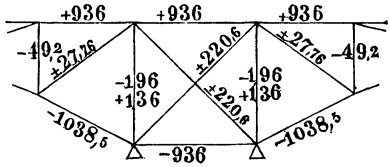


Fig. 297.

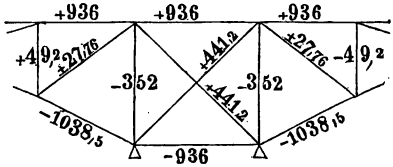
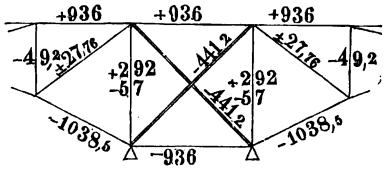


Fig. 298.



entweder nur **Zug**spannung oder nur **Druck**spannung allein anzunehmen fähig sind, so gelten die Zahlen resp. von Fig. **294** und

Fig. **295**, in welcher letzteren durch Doppellinien die Unfähigkeit der Diagonalen, Zugspannung anzunehmen, angedeutet ist.

In gleicher Weise sind aus dem Schema Fig. **292** die in Fig. **296**, **297** und **298** dargestellten analogen drei Formen abzuleiten.

In allen diesen Fällen ist der Einfachheit wegen für die beiden Belastungspunkte über den Pfeilern ebenso viel Belastung gerechnet als für alle übrigen Belastungspunkte, obwohl streng genommen wegen der grösseren Weite des Feldes über dem Pfeiler eine etwas grössere Belastung für sie hätte in Rechnung gebracht werden müssen.

Diese grössere Länge des Pfeilerfeldes ist nothwendig, weil sonst ein Kippen der Brückenabtheilung über dem Pfeiler zu befürchten wäre. Wenn man nach der in § 33 angegebenen Formel:

$$b \geqq -(x+z) + \sqrt{(x+z)^2 + 2nz\left(x+\tfrac{z}{2}\right)}$$

die erforderliche Pfeilerbreite berechnet, indem man die Werthe

$$x = 50, \qquad z = 30, \qquad n = \tfrac{2}{4}$$

substituirt, so ergiebt sich die Bedingung:

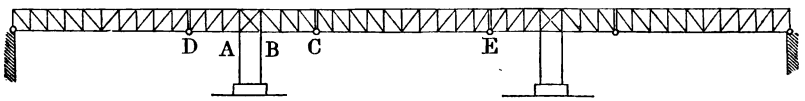
$$b \geqq 11^{m},38.$$

Die hier angenommene Pfeilerbreite von $12^{m},5$ ist also ein wenig grösser, als der Stabilität wegen nöthig wäre (um so mehr, als die permanente Last für die zwischen den Pfeilern liegenden parabolischen Träger in Wirklichkeit etwas geringer sein wird, als für die Pfeilerabtheilungen, während sie hier ebenso gross angenommen wurde).

Parallel-Träger.

Für den Fall, dass entweder die ganze Brücke (s. Fig. **299**), oder auch nur die Abtheilung über dem Pfeiler, als Fachwerk-

Fig. 299.



träger mit parallelen Gurtungen construirt ist, ergeben sich für letztere die in den Figuren **300**, **301**, **302**, **303**, **304** eingeschriebenen Spannungszahlen, welche nach derselben Methode be-

rechnet sind, wie die vorige Construction. Um beide Constructionsformen hinsichtlich des Materialaufwandes besser mit einander vergleichen zu können, sind die Grundmaasse (nämlich Höhen und Spannweiten der Tragwände) beibehalten, doch beziehen sich die letzteren Figuren ausschliesslich auf den Fall, dass sowohl Fahrbahn als Scharniere unten liegen. Im Uebrigen ist zum Verständniss dieser Figuren nur das noch hinzuzufügen: dass

Fig. 300.

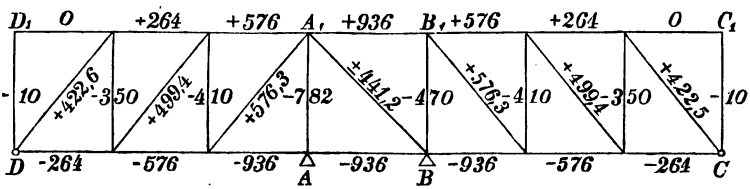


Fig. 301.

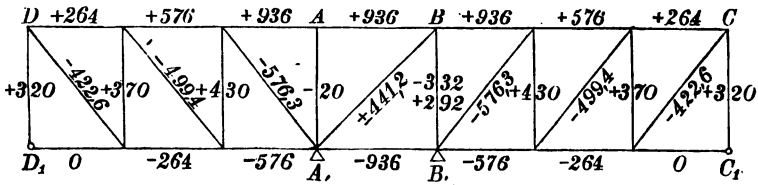


Fig. 302.

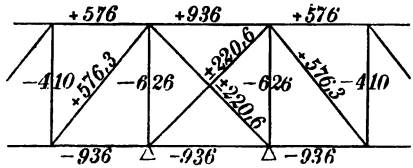


Fig. 303.

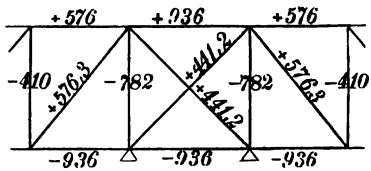
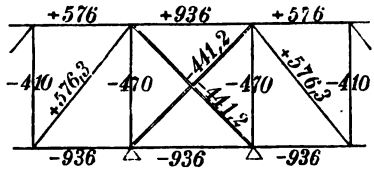


Fig. 304.



in Fig. **302** beide Diagonalen des Mittelfeldes als zug- **und** druckfähig, in Fig. **303** beide Diagonalen als **nur** zugfähig, in Fig. **304** beide Diagonalen als **nur** druckfähig anzusehen sind.

§ 35.

Vortheilhafteste Eintheilung der Spannweite.

Eine Vergleichung der in Fig. **291** zusammengestellten Zahlen lässt Folgendes erkennen: erstens, dass die Spannungszahlen der Diagonalen und Verticalständer eine sehr geringe Grösse haben, verglichen mit den Spannungszahlen der Bogenstücke und der horizontalen Stangen; zweitens, dass die Spannungszahlen der Bogenstücke unter sich sowohl als von denen der horizontalen Stangen nur wenig abweichen. Da nun im Allgemeinen die Querschnittsflächen der Stangen wie ihre Spannungszahlen sich verhalten müssen, so darf man annehmen, dass die in dem Bogen und dem horizontalen Fahrbahnbalken enthaltene Materialmenge einen überwiegend grossen Theil des Ganzen ausmacht und annähernd zu gleichen Theilen auf beide sich vertheilt. Dieselbe Bemerkung gilt auch in Bezug auf diejenigen Abtheilungen der Brücke, welche die Scheitel der Parabeln enthalten, wie die im zweiten Abschnitt für die eigentlichen parabolischen Träger gefundenen Zahlenfiguren beweisen.

Man kommt also der Wahrheit ziemlich nahe, wenn man annimmt, dass die zu der ganzen Brücke erforderliche Materialmenge eine Grösse hat, welche proportional ist der in dem horizontalen Fahrbahnbalken enthaltenen Masse. Die hier zu lösende Aufgabe kann daher auch in folgender Form aufgestellt werden: es soll diejenige Eintheilungsweise der Spannweite gefunden werden, bei welcher die zu dem horizontalen Fahrbahnbalken verwendete Materialmenge am kleinsten wird.

Diese Aufgabe zerfällt wiederum in drei andere Aufgaben: erstens, die vortheilhafteste Lage der Scharniere in der Mittelöffnung zu bestimmen; zweitens, die vortheilhafteste Lage der Scharniere in den beiden Seitenöffnungen zu bestimmen; drittens, das vortheilhafteste Verhältniss von Mittelöffnung zu Seitenöffnung (oder die vortheilhafteste Stellung der beiden Mittelpfeiler) zu bestimmen.

a. Theilung der Mittelöffnung.

Wenn man sich aus Fig. **305** die Stücke CE und CA herausgeschnitten und durch Hinzufügung von Kräften an der Schnittstelle den Gleichgewichtszustand wieder hergestellt denkt,

so ergeben sich als Momenten-Gleichungen resp. in Bezug auf den Drehpunkt S in Fig. **306** und den Drehpunkt A_1 in Fig. **307** die Gleichungen:

$$\begin{cases} 1) & H \,.\, h = px \,.\, x - px \,.\, \frac{x}{2} \\ 2) & \mathfrak{H} \,.\, h = px\,(l-x) + p\,(l-x)\left(\frac{l-x}{2}\right). \end{cases}$$

Fig. 305.

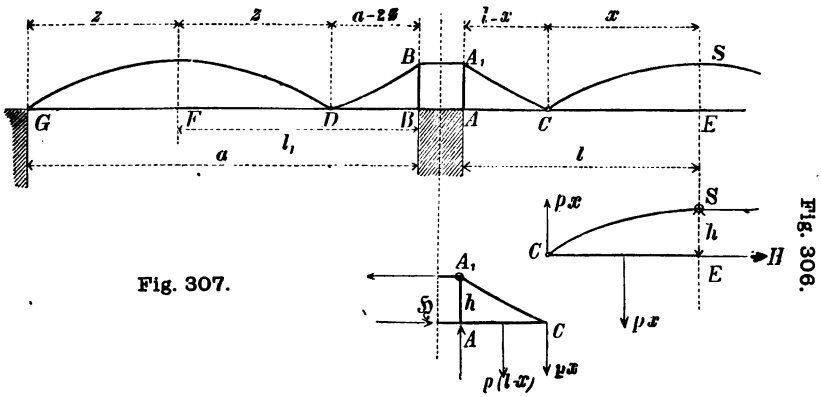


Fig. 307.

Fig. 306.

Wenn ferner S die zulässige Spannungszahl bedeutet für eine Stange, deren Querschnittsfläche gleich der Flächeneinheit ist, so findet man die erforderliche Querschnittsfläche jeder der beiden horizontalen Stangen, indem man ihre Spannungszahl durch S dividirt. Wenn also F die Querschnittsfläche der Stange CE und $\mathfrak{F}$ die Querschnittsfläche der Stange CA bezeichnet, so ist:

$$F = \frac{H}{S}, \quad \mathfrak{F} = \frac{\mathfrak{H}}{S}$$

und man erhält nach Substitution der Werthe von H und $\mathfrak{H}$ aus den Gleichungen 1) und 2) die Gleichungen:

$$\begin{cases} 3) & F = \frac{p\,x^2}{2\,h\,S} \\ 4) & \mathfrak{F} = \frac{p\,(l^2 - x^2)}{2\,h\,S}. \end{cases}$$

Wenn man jede dieser Querschnittsflächen multiplicirt mit der zugehörigen Länge der Stange, so erhält man die erforderlichen Materialmengen.

$$\begin{cases} 5) & M = F \,.\, x = \frac{p\,x^3}{2\,h\,S} \\ 6) & \mathfrak{M} = \mathfrak{F} \,.\, (l - x) = p\,\frac{(l^2 - x^2)\,(l - x)}{2\,h\,S}. \end{cases}$$

Die ganze in der Stange AE enthaltene Materialmenge ist also:

$$7) \quad (M + \mathfrak{M}) = \frac{p}{2\,h\,S}\,(l^3 - l^2 x - l x^2 + 2x^3).$$

Wenn hierin unter x diejenige Grösse verstanden wird, welche $M + \mathfrak{M}$ wirklich zu einem Minimum macht, so muss die Hinzufügung der sehr kleinen Grösse $\pm\Delta$ zu dem Werthe von x, also die Substitution $x \pm \Delta$ statt x, unter allen Umständen eine Vergrösserung von $M + \mathfrak{M}$ zur Folge haben. Dies ist aber nur möglich, wenn von den drei zu dem eingeklammerten Ausdruck dadurch hinzugefügten Gliedern:

$$\pm\Delta\,(-l^2 - 2\,l\,x + 6\,x^2) + \Delta^2\,(6\,x - l) \pm 2\,\Delta^3$$

das erste für sich gleich Null ist, weil sonst durch geeignete Wahl eines sehr kleinen Werthes von Δ bewirkt werden könnte, dass das erste Glied — welches dann als überwiegend gross gegen die anderen den Ausschlag giebt — folglich auch der Inbegriff aller drei Glieder **negativ** würde, und damit dem Werthe von $M + \mathfrak{M}$ noch eine weitere Verkleinerung ertheilt werden könnte. Es muss also die Bedingung

$$8) \quad -l^2 - 2\,l\,x + 6\,x^2 = 0$$

erfüllt sein*), aus welcher sich für $\frac{x}{l}$ und $\frac{l-x}{l}$ die Werthe ergeben:

$$9) \quad \frac{x}{l} = \frac{1 + \sqrt{7}}{6} = 0{,}6076$$

$$10) \quad \frac{l-x}{l} = 0{,}3924.$$

Annähernd also müssen die beiden Längen AC und CE wie 0,4 : 0,6 oder wie 2 : 3 sich verhalten.

Wenn man den für x gefundenen vortheilhaftesten Werth in die Gleichung 7) einführt, so erhält man für die zu dem Theile AE erforderliche Materialmenge die Grösse:

$$11) \quad M + \mathfrak{M} = 0{,}47184\,\frac{p\,l^3}{2\,S\,h}.$$

---

*) Oder mit anderen Worten: Der erste Differenzial-Quotient der in Gleichung 7) enthaltenen Function von x muss gleich Null gesetzt werden.

b. Theilung der Seitenöffnungen.

Den Inhalt J des zu dem Theile DF (s. Fig. **305**) erforderlichen Materials findet man aus der Gleichung 5), indem man z für x substituirt:

$$12) \quad J = \frac{p z^3}{2 h S}.$$

Den Inhalt $\mathfrak{J}$ des in dem Stücke BD enthaltenen Materials erhält man aus der Gleichung 6) durch Substitution von l_1 statt l und von z statt x:

$$\mathfrak{J} = \frac{p(l_1^2 - z^2)(l_1 - z)}{2 h S}$$

oder, wenn man $a - z$ statt l_1 setzt:

$$13) \quad \mathfrak{J} = \frac{p a (a - 2z)^2}{2 h S}.$$

Der Inhalt des in dem ganzen Stück BG enthaltenen Materials ist also:

$$14) \quad 2J + \mathfrak{J} = \frac{p}{2Sh}(a^3 - 4a^2 z + 4az^2 + 2z^3).$$

Wenn unter z derjenige Werth verstanden wird, welcher die Grösse $2J + \mathfrak{J}$ zu einem Minimum macht, so muss von den durch Substitution von $z \pm \Delta$ statt z dem eingeklammerten Ausdruck hinzugefügten drei Gliedern:

$$\pm \Delta(-4a^2 + 8az + 6z^2) + \Delta^2(4a + 6z) \pm 2\Delta^3$$

das erste Glied für sich allein gleich Null sein; es ist also die Bedingungsgleichung:

$$15) \quad -4a^2 + 8az + 6z^2 = 0$$

für z aufzulösen, woraus sich für z und $a - 2z$ die Werthe ergeben:

$$16) \quad z = \tfrac{2}{5} a (-1 + \sqrt{2{,}5}) = 0{,}3874\, a$$

$$17) \quad a - 2z = 0{,}2252 \,.\, a$$

also für das Verhältniss $\frac{z}{a-z}$ oder $\frac{z}{l_1}$ der Werth:

$$18) \quad \frac{z}{l_1} = 0{,}6324.$$

Wenn man in die Gleichung 14) den gefundenen vortheilhaftesten Werth für z substituirt, so erhält man als gesammte in dem Stücke BG bei **diesem** Theilungsverhältniss enthaltene Materialmenge:

$$19) \quad 2J + \mathfrak{J} = 0{,}16706 \,.\, \frac{p a^3}{2Sh}.$$

c. Verhältniss der Seitenöffnung zur Mittelöffnung.

Die vorstehend gefundenen Zahlenwerthe von $\frac{x}{l}$ und $\frac{z}{l_1}$ geben für jede Oeffnung einzeln an: wie dieselbe einzutheilen ist, wenn das für sie erforderliche Material ein Minimum werden soll. Diese Zahlen sind vollkommen unabhängig von der Weite jeder einzelnen Oeffnung, also auch von dem Verhältniss:

$$\frac{a}{2l} = n,$$

nach welchem die **ganze** Spannweite in die drei einzelnen Theile

$$a \qquad 2l \qquad a$$

zerlegt ist. Nicht aber darf dieser Satz umgekehrt werden; vielmehr muss bei der Bestimmung des vortheilhaftesten Werthes von n zuvor darüber entschieden sein: nach welchem Verhältniss jede einzelne Oeffnung eingetheilt werden soll, denn von diesem Theilungsverhältniss hängt der Materialverbrauch für jede Oeffnung ab.

Die Aufgabe soll hier ausschliesslich unter **der** Voraussetzung gelöst werden: dass die drei Oeffnungen eben nach jenen vortheilhaftesten in den Gleichungen 9) und 18) angegebenen Verhältnissen eingetheilt sind.

In diesem Falle erhält man als erforderliche Materialmenge für die **eine** Hälfte L der **ganzen** Spannweitensumme durch Addition der beiden Gleichungen 11) und 19) den Werth:

$$M + \mathfrak{M} + 2J + \mathfrak{J} = \frac{p}{2Sh}(0{,}47184\, l^3 + 0{,}16706 \,.\, a^3)$$

oder, wenn man hierin $l = L - a$ setzt:

20) $$M + \mathfrak{M} + 2J + \mathfrak{J} = \frac{p}{2Sh}(0{,}47184\,(L-a)^3 + 0{,}16706 \,.\, a^3).$$

Damit dieser Werth ein Minimum werde, muss die Bedingung erfüllt sein:

21) $$-3 \,.\, 0{,}47184\,(L-a)^2 + 3 \,.\, 0{,}16706\, a^2 = 0.$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergiebt:

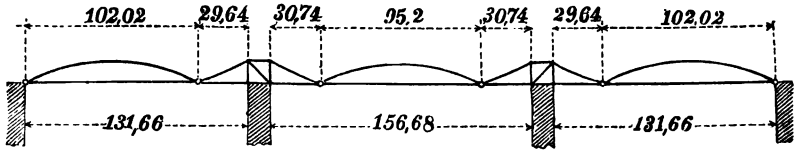
$$\frac{a}{(L-a)} = \sqrt{\frac{0{,}47184}{0{,}16706}} = 1{,}6806$$

oder, wenn man wieder l statt $L - a$ und n statt $\frac{a}{2l}$ setzt:

22) $$n = 0{,}8403.$$

Wenn man nach diesen in den Gleichungen 9), 18) und 22) enthaltenen Regeln die bei dem vorigen Zahlenbeispiel angenommene ganze Spannweiten-Summe von 420^{m} hätte eintheilen wollen, so würden sich die in Fig. **308** eingetragenen Längen für die einzelnen Abtheilungen ergeben haben.

Fig. 308.



Indessen würden bei dieser Anordnung die drei parabolischen Scheitelstücke nicht congruent werden, was die Kosten der Herstellung ein wenig vermehrt; zweitens würde in Folge der unsymmetrischen Anordnung und ungleichen Belastung der Scharnierpunkte schon bei gleichförmig vertheilter Belastung in den Feldern über den Mittelpfeilern eine Spannung der Diagonalen eintreten, wodurch ein geringer Mehraufwand von Material bedingt wird. Da ausserdem die ganze Rechnung nur auf Annäherung beruht, so konnte bei dem obigen Zahlenbeispiele ohne Bedenken eine den einfacheren Verhältnissen:

$$n = \frac{130}{160}, \quad \frac{x}{l} = \frac{50}{80}, \quad \frac{z}{l_1} = \frac{50}{80}$$

entsprechende, in Bezug auf die Mittelpfeiler symmetrische, Eintheilung vorgezogen werden.

Die Gleichungen 1) und 2) geben auch für Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen die Spannungen in den horizontalen Stangen an. Zwar nimmt bei solchen Trägern die Stärke der Gurtungen nach den Scharnierpunkten hin ab, doch wird diese Abnahme durch den Mehraufwand an Material zu den Diagonalen und Verticalständern annähernd ausgeglichen.

Man darf deshalb annehmen, dass der Gesammt-Verbrauch an Material bei solchen Trägern nahezu derselbe ist, wie bei parabolischen Trägern — eine Annahme, die man bei Vergleichung der Fig. **27** mit Fig. **57**, so wie der Fig. **291** mit Fig. **300** bestätigt findet —. Die Grundlagen und Ausgangspunkte der Rechnung würden also für diesen Fall dieselben bleiben; es können folglich die in den Gleichungen 9), 18 und 22) enthaltenen Regeln annähernd auch für Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen als gültig betrachtet werden.

Elfter Abschnitt.

§ 36.

Bestimmung der Drehpunkte und Hebelarme auf dem Wege der Rechnung.

Wenn auch anzunehmen ist, dass bei allen Berechnungen von demnächst wirklich auszuführenden Constructionen dem Rechner stets eine nach richtigen Maassverhältnissen ausgeführte Zeichnung zu Gebote steht, auf welcher derselbe die Lage der Drehpunkte und die Längen der Hebelarme am bequemsten und mit hinreichender Genauigkeit durch directe Messung bestimmen kann, so kommen doch auch Fälle vor, in denen es sich als nothwendig erweist, jene Bestimmung ohne Hülfe der Zeichnung auf dem Wege der Rechnung auszuführen. Dass auch dieser Weg keine Schwierigkeiten bietet, dass vielmehr bei allen Constructionen, die aus lauter geradlinigen Stangen zusammengesetzt sind, diese Bestimmung stets auf dem einfachen Wege der Vergleichung zweier ähnlichen Dreiecke ausgeführt werden kann, soll im Folgenden an einigen Beispielen gezeigt werden. Diese Beispiele sollen den früher berechneten Constructionen in der Weise entnommen werden: dass die nachfolgenden Rechnungen — als Anhänge und Ergänzungen an die betreffenden früheren Paragraphen sich anschliessend — für diejenigen Leser, welche die Bestimmung der Spannungszahlen vollständig auf dem Wege der Rechnung durchzuführen beabsichtigen, die Lösung der Aufgabe zum Abschluss bringen.

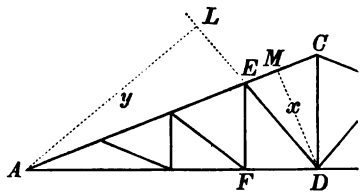
Zur Berechnung der Dach-Construction des § 3.

Um den Hebelarm x der Kraft X in Fig. **10** zu berechnen, hätte man die aus der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkeligen Dreiecke DMC und ADC sich ergebende Gleichung:

$$\frac{x}{\overline{DC}} = \frac{\overline{AD}}{\overline{AC}}$$

benutzen können (Fig. **309**), in welcher nach den in Fig. **8** angegebenen Dimensionen $\overline{CD} = 20$, $\overline{AD} = 50$ und $AC = \sqrt{50^2 + 20^2}$ zu setzen ist; man erhält also für x den Werth:

Fig. 309.



$$x = \frac{20 \cdot 50}{\sqrt{50^2 + 20^2}} = 18{,}6.$$

Für den Hebelarm y der Kraft Y erhält man aus der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkeligen Dreiecke ALD und EFD die Gleichung:

$$\frac{y}{\overline{AD}} = \frac{\overline{EF}}{\overline{ED}},$$

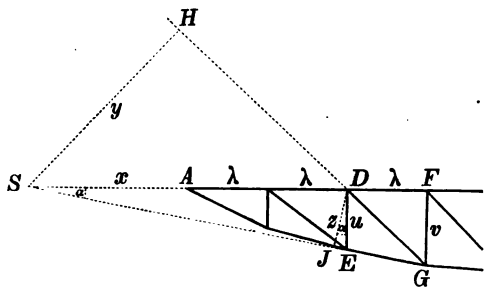
welche nach Substitution der Werthe $\overline{AD} = 50$, $\overline{EF} = 15$, $ED = \sqrt{12{,}5^2 + 15^2}$ für y aufgelöst die Form annimmt

$$y = \frac{50 \cdot 15}{\sqrt{12{,}5^2 + 15^2}} = 38{,}4.$$

Parabolischer Träger (§ 6).

Zur Bestimmung der Spannungen V_2 und Y_3 musste die Lage des in Fig. **26** mit S bezeichneten Drehpunktes festgestellt werden. Hierzu bietet sich nach Fig. **310** die aus der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkeligen Dreiecke SDE und SFG sich ergebende Gleichung dar:

Fig. 310.



$$\frac{u}{x + 2\lambda} = \frac{v}{x + 3\lambda} = \operatorname{tg} \alpha.$$

Nach den in Fig. **21** angegebenen Dimensionen ist hierin $\lambda = 2^{\mathrm{m}}$, $u = 1^{\mathrm{m}},5$, $v = 1^{\mathrm{m}},875$ zu setzen; es ist also:

$$x = \left(\frac{3u - 2v}{v - u}\right)\lambda = 4^{\mathrm{m}}.$$

Aus der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkeligen Dreiecke SDH und GDF ergiebt sich ferner die Gleichung:

$$\frac{y}{\overline{SD}} = \frac{v}{\overline{GD}},$$

aus welcher man nach Substitution der Werthe $\overline{SD} = x + 2\lambda = 8^m$ und $GD = \sqrt{v^2+\lambda^2} = \sqrt{1{,}875^2+2^2}$ für y den Werth erhält:

$$y = \frac{8 \,.\, 1{,}875}{\sqrt{1{,}875^2+2^2}} = 5^m{,}47.$$

Endlich für den Hebelarm $DJ = z$ (der Spannung Z_3 in Bezug auf den Drehpunkt D) erhält man aus Fig. **310** die Gleichung:

$$z = u \,.\, \cos\alpha = u \,.\, \frac{\overline{SD}}{\overline{SE}} = 1{,}5 \,.\, \frac{8}{\sqrt{8^2+1{,}5^2}} = 1^m{,}474.$$

Sichelförmiger Träger (§ 15).

Der oben für x gefundenen Gleichung kann man auch die Form geben:

$$x + 2\lambda = \frac{\lambda}{\frac{v}{u} - 1}.$$

Bei einer Parabel von $n$mal so grosser Pfeilhöhe würden sämmtliche Ordinaten — so wie auch die sämmtlichen Verticalstangen des nach dieser Parabel construirten parabolischen Trägers — die $n$fache Länge erhalten; es würde also $n \,.\, v$ statt v und $n \,.\, u$ statt u zu setzen sein. Da das auf der rechten Seite im Nenner stehende Verhältniss $\frac{v}{u} = \frac{n \,.\, v}{n \,.\, u}$ dadurch nicht geändert wird, so ist die Lage des Durchschnittspunktes der Parabelsehne EG mit der Horizontalen der Auflagerpunkte unabhängig von der Pfeilhöhe der Parabel. Wenn also über einer und derselben Spannweite mehrere parabolische Träger construirt würden mit gleicher Feldertheilung und ungleichen Pfeilhöhen, so würde für ein und dasselbe Feld der Durchschnittspunkt der Parabelsehnen mit der Horizontalen der Auflagerpunkte bei allen jenen Trägern dieselbe Lage erhalten.

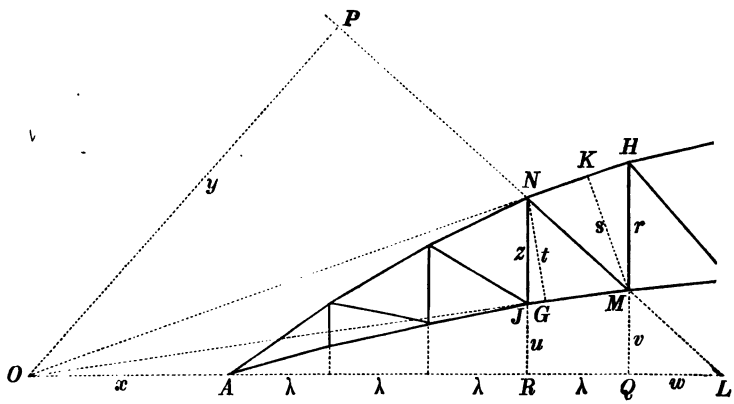
Hieraus folgt, dass bei dem sichelförmigen Träger (Fig. **311**) die beiden Parabelsehnen HN und MJ in einem Punkte O sich schneiden, welcher in der Horizontalen des Auflagerpunktes A liegt. Die Lage des Punktes O kann daher auf gleiche Weise wie bei dem vorigen Falle bestimmt werden mittelst der Gleichung

$$\frac{u}{x+3\lambda} = \frac{v}{x+4\lambda}.$$

Setzt man hierin nach Fig. **114** die Werthe $\lambda = 1$, $u = 0{,}710$, $v = 0{,}852$, so erhält man:

$$x = \frac{0{,}710}{0{,}852 - 0{,}710} - 3 = 2.$$

Fig. 311.



Auf dieselbe Weise kann auch die Lage des Punktes L bestimmt werden, nämlich aus der Gleichung:

$$\frac{w}{v} = \frac{w+\lambda}{u+z}, \quad \text{oder} \quad \frac{w}{v} = \frac{\lambda}{u+z-v},$$

in welcher $z = 1{,}065$ zu setzen ist (nach Fig. **114**). Diese Gleichung ergiebt für w den Werth:

$$w = \frac{0{,}852}{1{,}775 - 0{,}852} = 0{,}9231.$$

Zur Bestimmung des Hebelarms y (der Spannung Y_4 in Fig. **116**) ergiebt sich nunmehr aus der Aehnlichkeit der beiden rechtwinkeligen Dreiecke OPL und MQL die Gleichung:

$$\frac{y}{\overline{OL}} = \frac{v}{\overline{ML}}.$$

Hierin ist $\overline{OL} = 2 + 4 + 0{,}9231 = 6{,}9231$ zu setzen, und $\overline{ML} = \sqrt{0{,}852^2 + 0{,}9231^2} = 1{,}256$. Man erhält dann für y den Werth:

$$y = \frac{6{,}9231 \,.\, 0{,}852}{1{,}256} = 4{,}7.$$

Nachdem die Lage des Punktes O bekannt ist, kann man den Hebelarm t (der Spannung Z_4) aus der Aehnlichkeit der

beiden rechtwinkeligen Dreiecke JGN und JRN bestimmen mittelst der Gleichung:

$$\frac{t}{z} = \frac{\overline{OR}}{\overline{OJ}},$$

welche nach Substitution der Werthe $\overline{OR} = 5$ und $OJ = \sqrt{5^2 + 0{,}71^2}$ für t den Werth giebt:

$$t = \frac{5 \,.\, 1{,}065}{\sqrt{5^2 + 0{,}71^2}} = 1{,}054.$$

Wäre dagegen der Punkt O noch nicht bekannt gewesen, so würde der Hebelarm t einfacher zu bestimmen sein aus der Gleichung $\frac{t}{z} = \frac{\lambda}{JM}$.

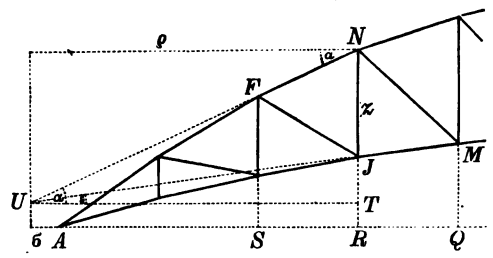
Den Hebelarm s (der Spannung X_4) kann man berechnen aus der Gleichung:

$$\frac{s}{r} = \frac{\overline{OQ}}{\overline{OH}},$$

in welcher $r = 1{,}278$, $\overline{OQ} = 6$ und $\overline{OH} = \sqrt{6^2 + 2{,}13^2}$ zu setzen ist, worauf sich für s der Werth ergiebt:

$$s = \frac{6 \,.\, 1{,}278}{\sqrt{6^2 + 2{,}13^2}} = 1{,}205.$$

Fig. 312.



Wäre dagegen der Punkt O noch nicht bekannt gewesen, so würde der Hebelarm s einfacher zu bestimmen sein aus der Gleichung $\frac{s}{r} = \frac{\lambda}{\overline{NH}}$.

Um die Spannung V_3 zu berechnen, musste man zuvor den Durchschnittspunkt U der beiden Parabelsehnen NF und MJ bestimmen. Nach Fig. **312** ist:

$$NT = \rho \operatorname{tg} \alpha = z + \rho \operatorname{tg} \varepsilon, \quad \text{oder} \quad \rho = \frac{z}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \varepsilon}.$$

Hierin ist $z = 1{,}065$ und $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\overline{MQ} - \overline{JR}}{\overline{QR}}$ oder (nach Fig. **114**) $\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{0{,}852 - 0{,}710}{1} = 0{,}142$, ferner $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{NR} - \overline{FS}}{1} = 0{,}4725$ zu setzen, folglich ist:

$$\rho = \frac{1{,}065}{0{,}4725 - 0{,}142} = 3{,}22.$$

Der Horizontalabstand des Punktes U von dem Punkte A hat also die Grösse:

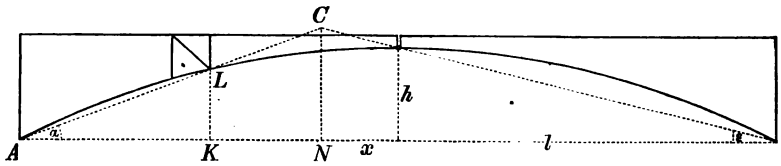
$$\sigma = 3{,}22 - 3 = 0{,}22.$$

Bogenbrücke (§ 22).

Die Lage des in Fig. **174** die Belastungsscheide bildenden Punktes C ist nach Fig. **313** zu bestimmen aus der Gleichung:

$$\overline{CN} = (l + x)\operatorname{tg}\varepsilon = (l - x)\operatorname{tg}\alpha \text{ oder } x = l\left(\frac{\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\varepsilon}{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\varepsilon}\right).$$

Fig. 313.



Setzt man hierin (nach Fig. **173**)

$l = 20$, $\operatorname{tg}\varepsilon = \frac{h}{l} = \frac{5}{20} = 0{,}25$ und $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\overline{LK}}{\overline{AK}} = \frac{3{,}75}{10} = 0{,}375$,

so erhält man für x den Werth:

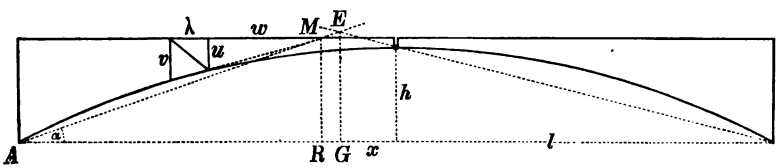
$$x = 20\left(\frac{0{,}375 - 0{,}25}{0{,}375 + 0{,}25}\right) = 4.$$

Der in Fig. **192** die Belastungsscheide bildende Punkt F kann ebenfalls mittelst der oben für x gefundenen Gleichung bestimmt werden; es ist nur nöthig für α den Winkel, den die Linie $A\,O$ mit der Horizontalen bildet, zu substituiren, also (nach Fig. **173**): $\operatorname{tg}\alpha = \frac{5{,}5}{8} = 0{,}6875$ zu setzen, man erhält dann für x den Werth:

$$x = 20\left(\frac{0{,}6875 - 0{,}25}{0{,}6875 + 0{,}25}\right) = 9{,}33\ldots$$

Die Durchschnittspunkte der Parabel-Sehnen mit der oberen Horizontallinie findet man auf dieselbe Weise wie bei den parabolischen und sichelförmigen Trägern. So z. B. erhält man für

Fig. 314.



den in Fig. **180** und Fig. **182** mit M bezeichneten Punkt aus Fig. **314** die Gleichung:

$$\frac{u}{w} = \frac{v}{w+\lambda} \quad \text{oder} \quad w = \frac{\lambda u}{v-u}.$$

Hierin ist (nach Fig. **173**) zu setzen:

$$\lambda = 2, \quad u = 1{,}75, \quad v = 2{,}3;$$

also ist: $w = \frac{2 \,.\, 1{,}75}{2{,}3 - 1{,}75} = 6{,}36$, und: $AR = w + 5\,\lambda = 16{,}36$.

Nunmehr kann man die Belastungsscheide EG wiederum aus der oben für x gefundenen Gleichung bestimmen, indem man darin $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\overline{MR}}{\overline{AR}} = \frac{5{,}5}{16{,}36} = 0{,}336$ setzt; man erhält dann für x den Werth:

$$x = 20 \left(\frac{0{,}336 - 0{,}25}{0{,}336 + 0{,}25}\right) = 2{,}9.$$

§ 37.

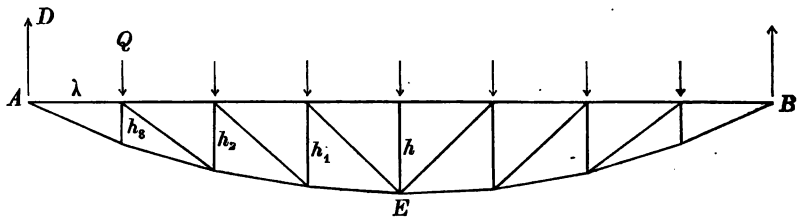
Anwendung der Methode der statischen Momente zur Ermittelung einer gewisse vorgeschriebene Bedingungen erfüllenden Form des Trägers.

Bei den bisher berechneten Constructionen wurde die Form des Trägers immer als gegeben angenommen, und die Methode der statischen Momente nur dazu benutzt, die von den Belastungen hervorgebrachten Spannungen zu berechnen. Im Folgenden soll an einigen Beispielen gezeigt werden, wie man jene Methode auch dazu anwenden kann, diejenige **Form** zu finden, welche dem Träger gegeben werden muss, wenn derselbe gewissen vorgeschriebenen Bedingungen Genüge leisten soll.

Der im § 6 berechnete parabolische Träger wurde seiner Form und seinen Dimensionen nach als gegeben angenommen, und bei der Berechnung der Spannungen stellte es sich heraus, dass bei voller Belastung des Trägers sämmtliche Diagonalstangen die Spannung Null annehmen — eine Eigenschaft, welche später in der „Theorie der parabolichen Träger“ als eine allgemeine Eigenschaft aller parabolischen Träger ihre Erklärung fand. Man hätte nun den Gang der Untersuchung auch umkehren können, nämlich von der erwähnten Eigenschaft als einer vorgeschriebenen Bedingung ausgehend sich die Aufgabe stellen, diejenige Form aufzusuchen, welche der Träger haben müsste, um die verlangte Eigenschaft zu besitzen. Nimmt man die Spannweite, die Felder-Eintheilung, so wie die Pfeilhöhe des Trägers als gegeben an,

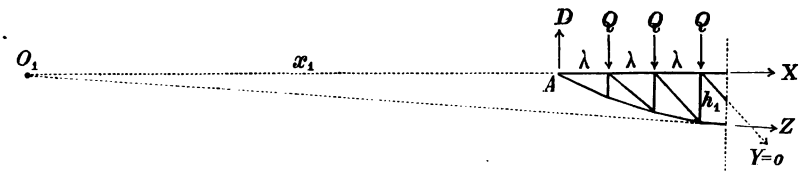
womit zugleich die Lage der Punkte A, E, B, sowie der sämmtlich in der Horizontalen $A\,B$ liegenden Belastungspunkte festgelegt ist, so sind bei symmetrischer Form des Trägers die Höhen h_1, h_2, h_3 die einzigen unbekannten Grössen, durch deren Bestimmung die Form des Trägers vollständig festgestellt wird (Fig. **315**).

Fig. 315.



Um die Grösse h_1 zu bestimmen, stellt man für den in Fig. **316** dargestellten Theil des Trägers die Gleichung der statischen Momente auf und wählt dabei den Durchschnittspunkt O_1 der beiden

Fig. 316.



Kräfte X und Z als Drehpunkt. Dieser Punkt soll eine solche Lage haben, dass die Diagonalspannung $Y = 0$ wird. Man erhält also die Gleichung:

$$0 = -D\,x_1 + Q\left\{(x_1 + \lambda) + (x_1 + 2\lambda) + (x_1 + 3\lambda)\right\},$$

welche ausdrückt, dass die Mittelkraft von der Kraft D und den 3 Gewichten Q durch den Punkt O_1 hindurchgehen muss, um daselbst von den beiden Kräften X und Z aufgehoben zu werden. Setzt man in obiger Gleichung $D = \frac{7\,Q}{2}$, so erhält man für x_1 den Werth:

$$x_1 = 12\lambda.$$

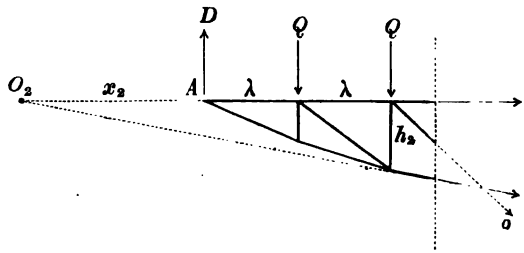
Die Höhe h_1 kann nunmehr berechnet werden aus der Gleichung:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{x_1 + 3\lambda}{x_1 + 4\lambda} = \frac{15}{16}.$$

Auf gleiche Weise erhält man nach Fig. **317** zur Bestimmung von x_2 die Gleichung:

$$0 = -Dx_2 + Q\{(x_2 + \lambda) + (x_2 + 2\lambda)\},$$

Fig. 317.



in welcher wiederum $D = \frac{7Q}{2}$ zu setzen ist; man erhält dann für x_2 den Werth:

$$x_2 = 2\lambda,$$

worauf die Höhe h_2 berechnet werden kann aus der Gleichung:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{x_2 + 2\lambda}{x_2 + 3\lambda} = \frac{4}{5},$$

oder auch — mit Benutzung des für h_1 bereits berechneten Werthes — aus der Gleichung:

$$h_2 = \tfrac{4}{5} \cdot \tfrac{15}{16} h = \tfrac{3}{4} h.$$

Endlich nach Fig. **318** erhält man zur Bestimmung von x_3 und h_3 die Gleichungen:

$$0 = -Dx_3 + Q(x_3 + \lambda) \quad \text{oder} \quad \tfrac{7}{2} Qx_3 = Q(x_3 + \lambda)$$

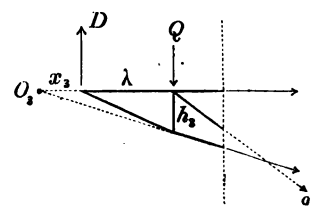
$$x_3 = \tfrac{2}{5}\lambda$$

$$\frac{h_3}{h_2} = \frac{x_3 + \lambda}{x_3 + 2\lambda} = \frac{7}{12}$$

$$h_3 = \tfrac{7}{12} h_2 = \tfrac{7}{16} h.$$

Setzt man $h = 2^m$, so erhält man $h_1 = 1^m,875$, $h_2 = 1^m,5$ und $h_3 = 0^m,875$, also dieselben Grössen, welche in Fig. **21** als Längen der Verticalstangen angenommen wurden. Wenn man ausserdem noch $\lambda = 2^m$ setzt, so erhält man: $x_1 = 2\frac{1}{7}^m$, $x_2 = 4^m$ und $x_3 = 0^m,8$; also für die Durchschnittspunkte O_1, O_2, O_3 ebenfalls dieselbe Lage, wie sie im § 6 bei der Berechnung der Spannungszahlen angenommen, und im vorigen Paragraphen bei der Bestimmung der Drehpunkte berechnet wurde.

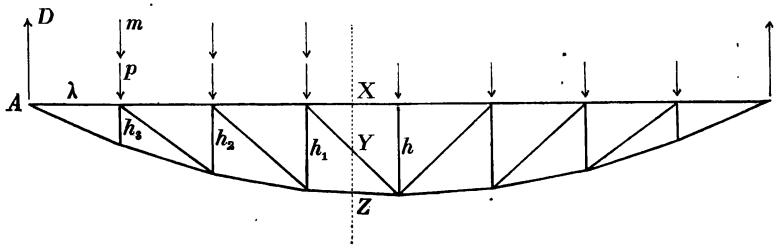
Fig. 318.



§ 38.
Schwedler'scher Träger.

Vergleicht man den symmetrischen parabolischen Träger (Fig. **35**) mit dem symmetrischen Parallelträger (Fig. **69**), so erkennt man, dass hinsichtlich der Diagonalen-Spannungen folgender Unterschied zwischen beiden stattfindet: Bei dem parabolischen Träger sind Maximum und Minimum der Spannungszahl einer Diagonale stets gleich und entgegengesetzt, folglich die Minima sämmtlich **negativ**. Bei dem Parallelträger dagegen ist, wenn die Diagonalen von der Mitte nach den beiden Enden hin ansteigen, stets das Maximum überwiegend und das Minimum wird **positiv** in allen Feldern, mit Ausnahme der mittleren, in denen es indessen bei hinreichender Vergrösserung der permanenten Belastung ebenfalls einen positiven Werth annehmen würde. Es lässt sich daher erwarten, dass es im Allgemeinen zwischen jenen beiden Formen eine mittlere Form geben wird, bei welcher das Minimum der Diagonalen-Spannung in allen Feldern den constanten Werth **Null** annimmt. Es soll bei der Berechnung der dieser vorgeschriebenen Bedingung entsprechenden Form (wie im vorigen Paragraphen) die Felderzahl $= 8$, die Pfeilhöhe $= h$ und die Spannweite $= 8\lambda$ als gegeben, und der Träger als symmetrisch vorausgesetzt werden, wodurch die Zahl der noch zu bestimmenden unbekannten Grössen wiederum auf drei reducirt wird, nämlich die drei Höhen h_1, h_2 und h_3 (Fig. **319**).

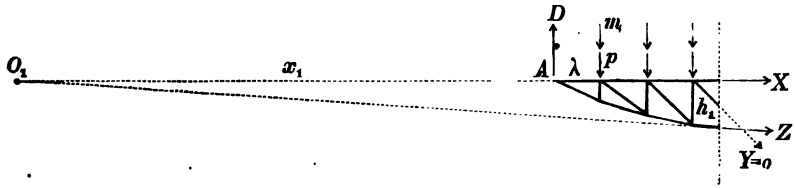
Fig. 319.



Um die Höhe h_1 zu finden, hat man sich zunächst den Träger in demjenigen Belastungszustande zu denken, für welchen die Diagonalen-Spannung Y ein Minimum wird; hierauf für den in Fig. **320** dargestellten Theil die Gleichung der statischen Momente

in Bezug auf den Drehpunkt O_1, als Durchschnittspunkt der beiden Spannungen X und Z, aufzustellen und den Abstand x_1 dieses

Fig. 320.



Punktes so zu wählen, dass die Diagonalen-Spannung $Y = 0$ wird; man erhält also die Gleichung:

$$0 = -D \cdot x_1 + (p + m)\left\{(x_1 + \lambda) + (x_1 + 2\lambda) + (x_1 + 3\lambda)\right\}.$$

Setzt man in dieser Gleichung dem angenommenen Belastungszustande entsprechend:

$$D = \tfrac{7}{2} p + m\,(\tfrac{7}{8} + \tfrac{6}{8} + \tfrac{5}{8}),$$

so nimmt dieselbe für x_1 aufgelöst die Form an:

$$\text{I.} \quad x_1 = \frac{24\,(p+m)\lambda}{2p - 3m}.$$

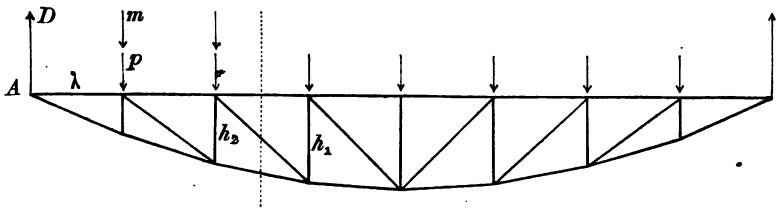
Hiernach kann die Höhe h_1 berechnet werden aus der Gleichung:

$$\frac{h_1}{h} = \frac{x_1 + 3\lambda}{x_1 + 4\lambda},$$

welche nach Substitution des für x_1 gefundenen Werthes die Form annimmt:

$$\text{I}_a. \quad \frac{h_1}{h} = \frac{30p + 15m}{32p + 12m}.$$

Fig. 321.



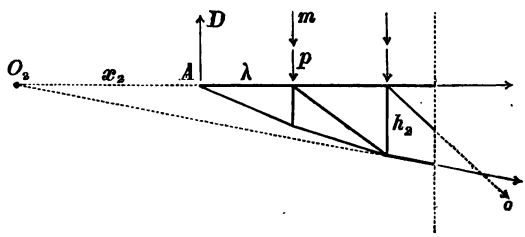
In dem zweiten Felde (von der Mitte aus gezählt) wird die Diagonalen-Spannung ein Minimum bei dem in Fig. **321** dargestellten Belastungszustande, für welchen

$$D = \frac{7p}{2} + m\,(\tfrac{7}{8} + \tfrac{6}{8})$$

wird, und die Höhendifferenz in diesem Felde soll so beschaffen sein, das dieses Minimum gleich Null wird. Man erhält also zur Bestimmung von x_2 nach Fig. **322** die Gleichung:

$$0 = -Dx_2 + (p+m)\left\{(x_2+\lambda)+(x_2+2\lambda)\right\},$$

Fig. 322.



welche für x_2 aufgelöst nach Substitution des obigen Werthes von D die Form annimmt:

II. $x_2 = \frac{8(p+m)\lambda}{4p-m}$.

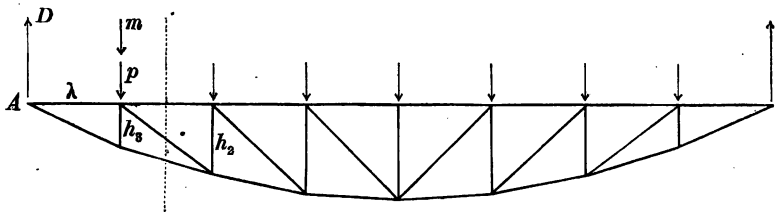
Die Höhe h_2 ist nunmehr zu berechnen aus der Gleichung:

$$\frac{h_2}{h_1} = \frac{x_2+2\lambda}{x_2+3\lambda}$$

oder nach Substitution des für x_2 gefundenen Werthes aus der Gleichung:

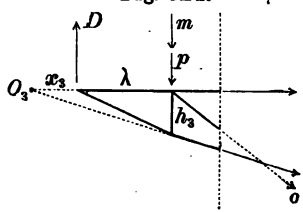
II$_a$. $\frac{h_2}{h_1} = \frac{16p+6m}{20p+5m}$.

Fig. 323.



Auf gleiche Weise erhält man zur Bestimmung der Grössen x_3 und h_3 aus Fig. **323** und Fig. **324** die Gleichungen:

Fig. 324.



$$0 = -D \cdot x_3 + (p+m)(x_3+\lambda)$$

$$D = \frac{7p}{2} + \frac{7}{8}m$$

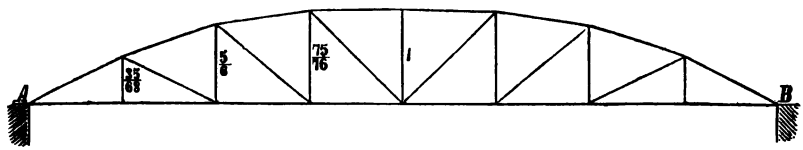
III. $x_3 = \frac{8(p+m)\lambda}{20p-m}$

III$_a$. $\frac{h_3}{h_2} = \frac{x_3+\lambda}{x_3+2\lambda} = \frac{28p+7m}{48p+6m}$.

Setzt man in den obigen Gleichungen überall $m = 0$, so führen dieselben wieder zu der Form des parabolischen Trägers, denn man erhält dann die Werthe: $x_1 = 12\lambda$, $x_2 = 2\lambda$, $x_3 = 0{,}4\lambda$ und $\frac{h_1}{h} = \frac{15}{16}$, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{4}{5}$, $\frac{h_3}{h_2} = \frac{7}{12}$, also dieselben Werthe, welche im vorigen Paragraphen für den parabolischen Träger gefunden wurden.

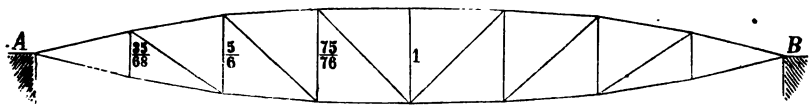
Wenn das Verhältniss $\frac{m}{p} = \frac{1}{2}$ ist, so wird $\frac{x_1}{\lambda} = 72$, $\frac{x_2}{\lambda} = \frac{24}{7}$, $\frac{x_3}{\lambda} = \frac{24}{39}$ und $\frac{h_1}{h} = \frac{75}{76}$, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{38}{45}$, $\frac{h_3}{h_2} = \frac{21}{34}$, also wenn z. B. $h = 1$ ist, so wird $h_1 = \frac{75}{76}$, $h_2 = \frac{5}{6}$, $h_3 = \frac{35}{68}$. Die gefundenen Höhen können auch von der Horizontalen AB aus nach oben hin abgetragen werden (Fig. 325),

Fig. 325.



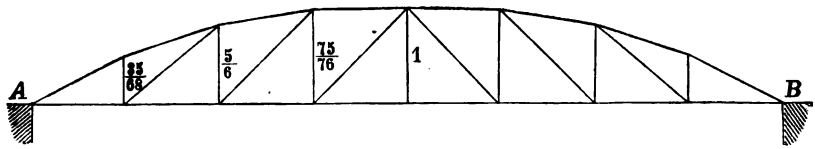
oder zur Hälfte nach oben, zur anderen Hälfte nach unten hin (Fig. 326), immer bleibt die Bedingung erfüllt: dass die Diagonalen stets nur Zugspan-

Fig. 326.



nungen erhalten. Wenn man dagegen die in Fig. 327 angegebene Anordnung der Diagonalen wählte, so würden stets nur Druckspannungen in denselben stattfinden.

Fig. 327.



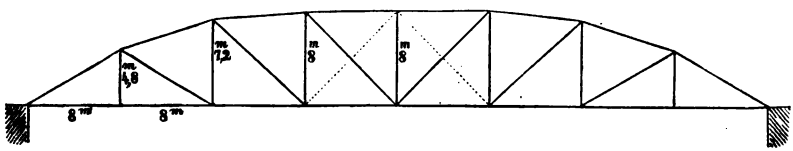
Wenn $\frac{m}{p} = \frac{2}{3}$ ist, so wird $x_1 = \infty$, $\frac{h_1}{h} = 1$, und wenn $\frac{m}{p} > \frac{2}{3}$ ist, so wird x_1 negativ und $h_1 > h$. In diesem Falle müsste also die Höhe des Trägers in der Mitte kleiner genommen werden, als weiter nach den Enden hin. Wenn dies aus anderen Gründen nicht als zulässig gelten sollte, so würde man hinsichtlich der beiden mittleren Felder auf Erfüllung der vorgeschriebenen Bedingung verzichten müssen und dem Träger in diesem Theile überall dieselbe Höhe geben; durch Hinzufügung von Gegenstreben würde

man dann erreichen können, dass auch in diesen Feldern die Diagonalen stets nur gezogen werden.

Wäre z. B. das Verhältniss $\frac{m}{p} = \frac{4}{3}$ gegeben, so würde man (nach Gleichung I$_a$.) $\frac{h_1}{h} = \frac{50}{47}$ erhalten, man würde aber statt dessen $\frac{h_1}{h} = 1$ nehmen. Die Gleichungen für h_2 und h_3 behalten ihre Gültigkeit. Nach Gleichung II$_a$. wird $\frac{h_2}{h_1} = \frac{9}{10}$ also $h_2 = 0{,}9\,h$, und nach Gleichung III$_a$. wird $\frac{h_3}{h_2} = \frac{2}{3}$, also $h_3 = \frac{2}{3} . 0{,}9 . h = 0{,}6\,h$ zu nehmen sein.

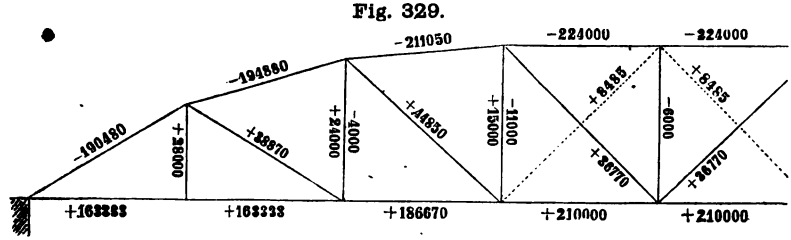
Man würde also z. B. für einen Träger von 8^m Höhe und 64^m Länge, bei welchem die permanente Last $p = 12000$ Kil. und die mobile Last $m = 16000$ Kil. ist, die in Fig. **328** angegebenen Dimensionen erhalten. Die

Fig. 328.



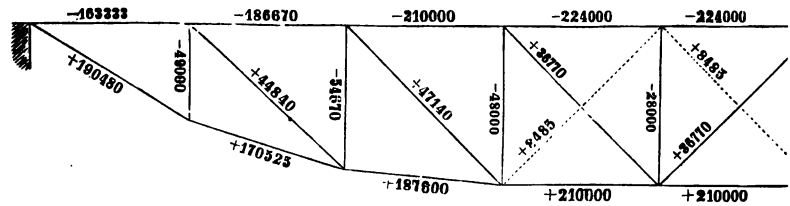
Berechnung der Spannungszahlen kann auf dieselbe Weise wie bei dem im zweiten Abschnitte berechneten parabolischen Träger geschehen und führt zu den in Fig. **329** zusammengestellten Zahlenwerthen. Liegt die horizontale

Fig. 329.



Fahrbahnlinie oben — statt unten. —, so erhält der Träger die in Fig. **330** angegebene Form nebst beigefügten Spannungszahlen.

Fig. 330.



Beide Zahlenfiguren entsprechen der Voraussetzung: dass die permanenten wie die mobilen Belastungen ausschliesslich in der horizontalen Fahr-

bahnlinie ihre Angriffspunkte haben. Soll statt dessen die der Wirklichkeit besser entsprechende Annahme gemacht werden, dass die permanenten Belastungen zur Hälfte auf die oberen, zur Hälfte auf die unteren Endpunkte der Verticalstangen sich vertheilen, so hat man (nach § 12) zu den Spannungszahlen der Verticalstangen in Fig. **329** überall die Zahl -6000 hinzu zu addiren und erhält statt der in der Figur angegebenen Zahlen für die Spannungen der Verticalstangen — in der Reihenfolge von der Mitte nach dem Ende hin — die Werthe:

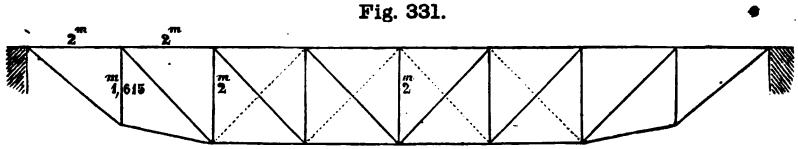
$$-12000,\ \begin{cases}-17000,\\ +\ 9000\end{cases}\ \begin{cases}-10000,\\ +18000\end{cases}\ +22000.$$

In Fig. **330** dagegen würde man zu den Spannungszahlen der Verticalstangen überall die Zahl $+6000$ hinzu zu addiren haben und die Werthe erhalten:

$$-22000,\ -42000,\ -48670,\ -43000.$$

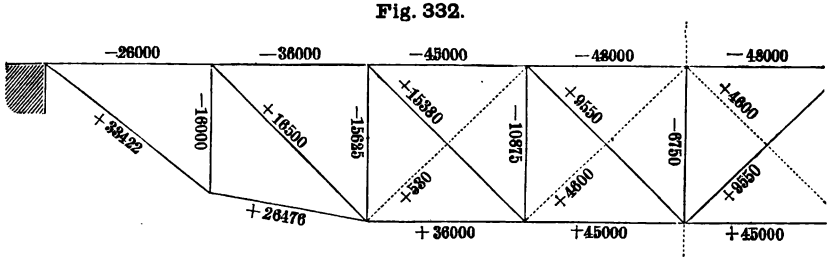
Wenn $\frac{m}{p}=4$ ist, so wird (nach Gleichung II.) $x_2=\infty$ und wenn $\frac{m}{p}>4$ ist, so würde nach obiger Gleichung x_2 negativ und $h_2>h_1$ werden. In diesem Falle müsste man ausser h_1 auch die Höhe h_2 gleich der Höhe h nehmen, also den 4 mittleren Feldern rechteckige Formen und Gegenstreben geben. Setzt man (wie für den in § 6 berechneten Träger) $p=1000$ Kil. und $m=5000$ Kil. und $\lambda=h=2^m$, so erhält man (aus Gleichung III.) $x_3=6^m,4$ und (aus Gleichung III$_a$.) $h_3=1^m,615$. Der Träger würde alsdann die in Fig. **331** angegebenen Dimensionen und die in Fig. **332** zusammengestellten

Fig. 331.



Spannungszahlen erhalten, welche in den 4 mittleren Feldern mit den in Fig. **61** gefundenen übereinstimmen.

Fig. 332.



Wäre endlich $m>20\,p$, so würde nach obigen Gleichungen x_3 negativ und $h_3>h_2$ werden. In diesem Falle würde also — wenn es nicht als

zulässig betrachtet wird, die Höhe des Trägers nach der Mitte hin kleiner werden zu lassen — die vorgeschriebene Bedingung für den Träger von 8 Feldern überhaupt nicht mehr erfüllbar sein bei der vorausgesetzten Anordnung des Diagonalen-Systems (vergl. § 39).

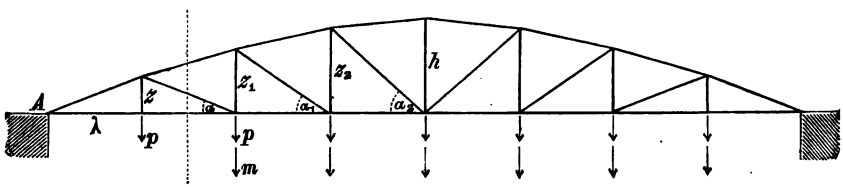
§ 39.

Träger mit gleichen Maximalspannungen der Diagonalen.

Die im vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe, welche vorschrieb, dass das Minimum der Diagonalenspannung in jedem Felde den Werth Null annehmen sollte, bildet einen speciellen Fall der allgemeineren Aufgabe: den Träger so zu construiren, dass die Maximalspannungen der Diagonalen sämmtlich einem und demselben — übrigens aber **beliebig** grossen — vorgeschriebenen Werthe gleich werden sollen.

Da bei Umkehrung des Trägers die positiven Spannungszahlen negativ und die negativen positiv werden, also Maximum und Minimum ihre Bedeutungen mit einander austauschen, so ist es hinsichtlich der Erklärung des bei der Auflösung dieser allgemeinen Aufgabe anzuwendenden Verfahrens gleichgültig, ob die Minimalspannungen oder die Maximalspannungen ausgewählt werden als diejenigen, welche unter einander gleich werden sollen. Da die Minima in der Regel negative Zahlen sind, so erscheint es zweckmässiger, von den Maximalspannungen auszugehen. Es soll in diesem Paragraphen also diejenige Form des Trägers bestimmt werden, bei welcher die **Maximal**spannungen der Diagonalen einem vorgeschriebenen Werthe gleich werden, und wiederum das anzuwendende Verfahren durchgehends an einem symmetrischen Träger mit 8 Feldern erklärt werden.

Fig. 333.



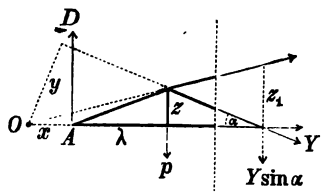
Die Spannung der Diagonale des zweiten Feldes wird bei dem in Fig. **333** dargestellten Belastungszustande ein Maximum und man erhält zur Bestimmung desselben aus Fig. **334** die Gleichung:

$$0 = Y \,.\, y - D \,.\, x + p\,(x + \lambda).$$

Diese Gleichung nimmt nach Substitution des Werthes $y = (x + 2\lambda) \sin \alpha$ die Form an:

$$0 = Y \,.\, \sin \alpha\,(x + 2\lambda) - Dx + p\,(x + \lambda)$$

Fig. 334.



(zu welcher man auch gelangt sein würde, wenn man die Spannung Y in ihre horizontale und verticale Seitenkraft zerlegt und das statische Moment der letzteren statt des statischen Momentes von Y selbst genommen hätte). Die Grösse x muss so gewählt werden, dass Y den vorgeschriebenen Werth annimmt. Man hat also nach Substitution des dem angenommenen Belastungszustande entsprechenden Werthes:

$$D = \tfrac{7}{2} p + (\tfrac{1}{8} + \tfrac{2}{8} + \tfrac{3}{8} + \tfrac{4}{8} + \tfrac{5}{8} + \tfrac{6}{8})\, m = 3{,}5\, p + 2{,}625\, m$$

die obige Momenten-Gleichung für x aufzulösen und erhält die Gleichung:

$$\text{I.} \quad \frac{x}{\lambda} = \frac{p + 2\,Y \sin \alpha}{2{,}5\, p + 2{,}625\, m - Y \sin \alpha}.$$

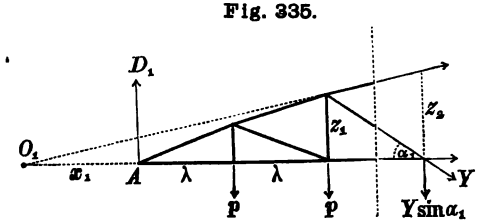
Auf gleiche Weise erhält man nach Fig. **335** (indem man die 5 Belastungspunkte rechts von der Schnittstelle belastet annimmt) die Gleichungen:

$$0 = Y \sin \alpha_1\,(x_1 + 3\lambda) - D_1 x_1 + p\,\{(x_1 + \lambda) + (x_1 + 2\lambda)\}$$

$$D_1 = 3{,}5\, p + 1{,}875\, m$$

$$\text{II.} \quad \frac{x_1}{\lambda} = \frac{3\,p + 3\,Y \sin \alpha_1}{1{,}5\, p + 1{,}875\, m - Y \sin \alpha_1},$$

Fig. 335.



und nach Fig. **336** (indem man die 4 Belastungspunkte rechts von der Schnittstelle belastet annimmt) die Gleichungen:

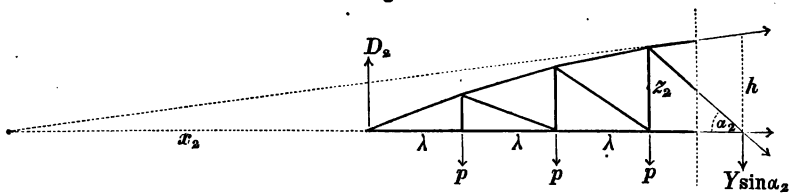
$$0 = Y \sin \alpha_2\,(x_2 + 4\lambda) - D_2 x_2 + p\,\{(x_2 + \lambda) + (x_2 + 2\lambda) + (x_2 + 3\lambda)\}$$

$$D_2 = 3{,}5\, p + 1{,}25\, m.$$

$$\text{III.} \quad \frac{x_2}{\lambda} = \frac{6\,p + 4\,Y \sin \alpha_2}{0{,}5\, p + 1{,}25\, m - Y \sin \alpha_2}.$$

Die obigen drei Gleichungen können auf folgende Weise zur Construction des Trägers benutzt werden. Man nimmt, indem

Fig. 336.



man die Construction von dem Endpunkte A aus beginnt, zunächst für die Höhe z eine willkürliche Grösse an und berechnet nach Substitution des dieser Grösse entsprechenden Werthes $\sin\alpha = \frac{z}{\sqrt{z^2+\lambda^2}}$ in Gleichung I. den Werth von x. Die Höhe z_1 kann alsdann bestimmt werden mittelst der aus Fig. **334** sich ergebenden Gleichung:

$$\text{IV.} \quad \frac{z_1}{z} = \frac{x+2\lambda}{x+\lambda},$$

worauf die Grösse x_1 nach Substitution des Werthes $\sin\alpha_1 = \frac{z_1}{\sqrt{z_1^2+\lambda^2}}$ in Gleichung II. ebenfalls berechnet werden kann. Hierauf kann man die Grösse z_2 nach der aus Fig. **335** sich ergebenden Gleichung:

$$\text{V.} \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{x_1+3\lambda}{x_1+2\lambda}$$

berechnen, so wie auch die Grösse x_2 aus Gleichung III. nach Substitution des nunmehr bekannten Werthes $\sin\alpha_2 = \frac{z_2}{\sqrt{z_2^2+\lambda^2}}$.

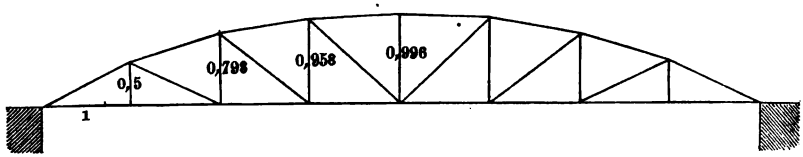
Zur Bestimmung der Höhe h endlich benutzt man die aus Fig. **336** sich ergebende Gleichung:

$$\text{VI.} \quad \frac{h}{z_2} = \frac{x_2+4\lambda}{x_2+3\lambda}.$$

Bei dem parabolischen Träger sind die grössten Zug- und Druckspannungen einer Diagonale immer gleich gross. Wollte man — in der Absicht die Druckspannungen der Diagonalen auf Kosten der Zugspannungen etwas zu verkleinern — den in § 6 berechneten Träger so construiren, dass jede Diagonale eine grösste Zugspannung von 8000 Kil. erhielte, so würde man zunächst in den obigen Gleichungen die Werthe: $m = 5000$, $p = 1000$ und $Y = +8000$ zu substituiren haben. Setzt man alsdann willkürlich $z = \frac{1}{2}$, indem man die Feldlänge λ als Längeneinheit wählt, so erhält man nach

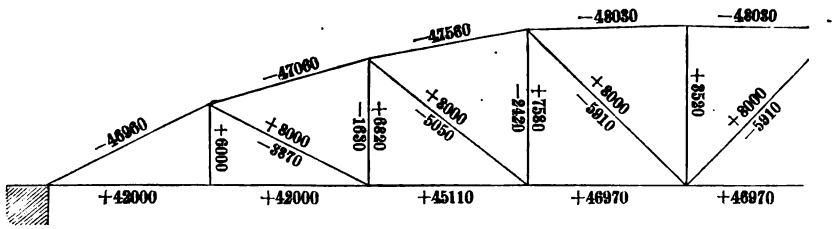
der eben erklärten Methode successive die Werthe: $\sin\alpha = 0{,}447$, $x = 0{,}677$ $z_1 = 0{,}798$, $\sin\alpha_1 = 0{,}625$, $x_1 = 3{,}06$, $z_2 = 0{,}958$, $\sin\alpha_2 = 0{,}693$, $x_2 = 23{,}28$,

Fig. 337.



$h = 0{,}996$. Der Träger würde dann die in Fig. **337** angegebenen Dimensionen und die in Fig. **338** zusammengestellten Spannungszahlen erhalten.

Fig. 338.



Setzt man $Y = 0$, so führen die obigen Gleichungen zu einem Träger, dessen Diagonalen stets nur Druckspannungen erhalten. Wenn man zugleich $\frac{m}{p} = \frac{1}{2}$ setzt, so wird:

$$\frac{x}{\lambda} = \frac{16}{61}, \quad \frac{x_1}{\lambda} = \frac{16}{13}, \quad \frac{x_2}{\lambda} = \frac{16}{3} \quad \text{und}$$

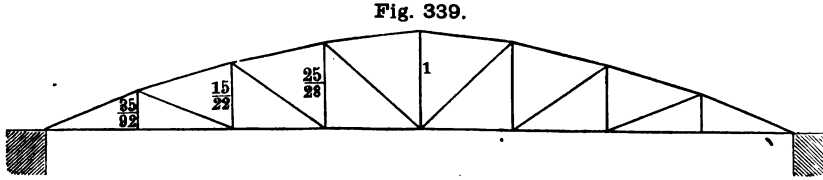
$$\frac{z_1}{z} = \frac{138}{77}, \quad \frac{z_2}{z_1} = \frac{55}{42}, \quad \frac{h}{z_2} = \frac{28}{25},$$

und wenn man die letzteren drei Gleichungen mit einander multiplicirt, so erhält man die Gleichung:

$$\frac{h}{z} = \frac{28}{25} \cdot \frac{55}{42} \cdot \frac{138}{77} = \frac{92}{35},$$

nach welcher die Grösse z so gewählt werden kann, dass der Träger in der

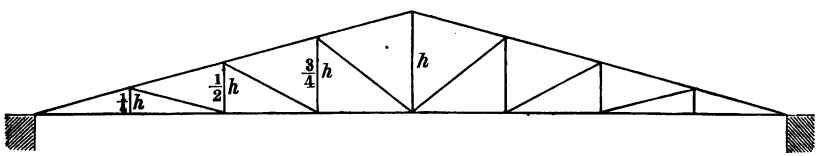
Fig. 339.



Mitte die vorgeschriebene Höhe h erhält. Soll z. B. $h = 1$ werden, so muss $z = \frac{35}{92}$, $z_1 = \frac{138}{77} \cdot \frac{35}{92} = \frac{15}{22}$, $z_2 = \frac{25}{28}$ genommen werden (Fig. **339**).

Die in Fig. **327** und Fig. **339** dargestellten Träger entsprechen **beide** in **verschiedener** Weise der Bedingung: dass die Diagonalen stets nur **Druck**spannungen erleiden. In der umgekehrten Lage würden also beide Träger die Bedingung erfüllen: dass die Diagonalen stets nur **Zug**spannungen erleiden. Es ergiebt sich hieraus, dass die im vorigen Paragraphen gestellte Aufgabe im Allgemeinen immer auf zwei verschiedene Arten gelöst werden kann — je nach der gewählten Anordnung des Diagonalen-Systems —. Während jedoch bei der im vorigen Paragraphen vorausgesetzten Anordnung des Diagonalen-Systems es sich herausstellte, dass bei gewissen Werthen des Verhältnisses $\frac{m}{p}$ — nämlich wenn $\frac{m}{p}$ zwischen den Grenzen $\frac{2}{3}$ und 20 lag — die gestellte Bedingung nur in beschränktem Maasse erfüllt werden konnte, und dass, wenn $\frac{m}{p} > 20$ war, dieselbe überhaupt nicht mehr erfüllbar war: zeigt es sich, dass bei der hier gewählten Anordnung des Diagonalen-Systems die Bedinguug **stets** erfüllbar ist. Denn selbst für den extremen Fall, wenn $\frac{m}{p} = \infty$ oder $p = 0$ gesetzt wird, ergeben die obigen Gleichungen noch ein bestimmtes Resultat. Die Grössen x, x_1, x_2 werden dann alle drei gleich Null, und der Träger nimmt die in Fig. **340** dargestellte dreieckige Form an

Fig. 340.



(welche ebenfalls in der umgekehrten Lage der Bedingung entsprechen würde, dass die Diagonalen stets gezogen werden). Wenn dagegen $\frac{p}{m} = \infty$ oder $m = 0$ gesetzt wird, so erhält man als anderes Extrem wiederum den parabolischen Träger. Im Uebrigen findet auch hier wieder die im vorigen Paragraphen in Bezug auf die Figuren **325** und **326** aufgestellte Behauptung ihre Anwendung, nämlich: dass es hinsichtlich der erstrebten Eigenschaft einerlei ist, ob man die gefundenen Höhen von der Horizontalen aus entweder ganz nach oben hin oder ganz nach unten hin abträgt, oder ob man dieselben überall zu gleichen Bruchtheilen nach oben und unten hin vertheilt. Immer werden die Diagonalen bei der ursprünglich angenommenen Lage des Trägers stets **gedrückt**, bei der umgekehrten Lage aber stets **gezogen**.

Um endlich zu zeigen, welchen Einfluss eine solche Form des Trägers auf die Spannungszahlen derselben hat, soll derselbe Träger, welcher in Fig. **338** für gleiche Zugspannungen der Diagonalen, in Fig. **332** als Schwedlerscher Träger und in Fig. **39** als parabolischer Träger berechnet wurde, auch hier noch als Zahlenbeispiel vollständig durchgerechnet werden. Setzt man $Y = 0$, $p = 1000$, $m = 5000$ und $h = \lambda = 1$, so erhält man aus den Gleichungen I. ... VI. die in Fig. **341** oder die in Fig. **342** dargestellte Form. Wenn man alsdann für die Form Fig. **341** die Spannungszahlen berechnet, so

ergeben sich die in Fig. **343** zusammengestellten Zahlen, und wenn man diese Zahlen sämmtlich mit — 1 multiplicirt, so erhält man die Spannungszahlen

Fig. 341.

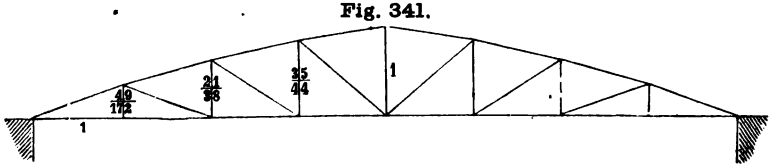
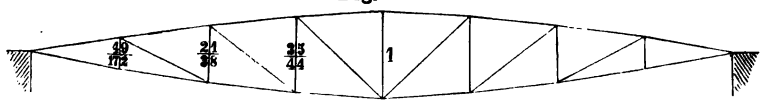


Fig. 342.



für Fig. **344**, welche einen Träger darstellt, dessen Diagonalen **stets gezogen** werden. Beide Zahlenfiguren entsprechen der Annahme: dass die in der hori-

Fig. 343.

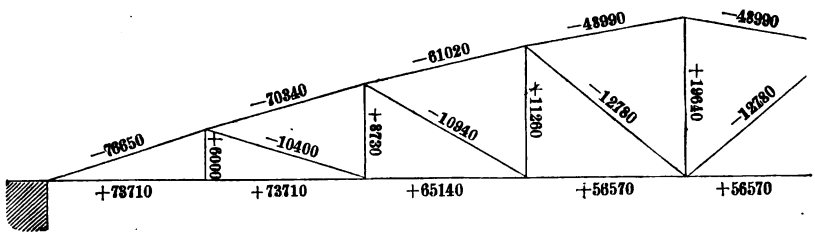
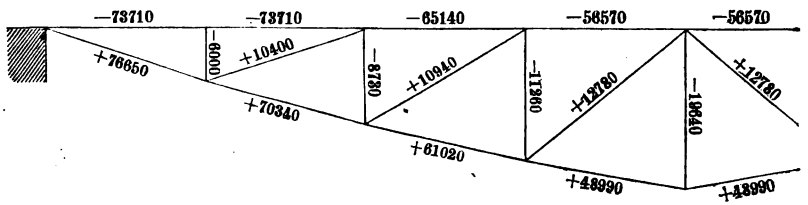


Fig. 344.



zontalen Fahrbahnlinie liegenden Belastungspunkte zugleich die Angriffspunkte der permanenten Belastungen bilden. Sollten die letzteren statt dessen zur Hälfte oben, zur Hälfte unten angreifend angenommen werden, so müsste zu den Spannungszahlen der Verticalstangen in Fig. **343** überall die Zahl — 500, in Fig. **344** überall die Zahl + 500 hinzu addirt werden.

Wenn in Fig. **333** die **oberen** Endpunkte der Verticalstangen statt der unteren die Belastungspunkte bildeten, so würden die in den Gleichungen I.

und II. vorkommenden Grössen $Y \sin \alpha$ und $Y \sin \alpha_1$ negativ genommen die Spannungen der rechts angrenzenden Verticalstangen bilden. Die obigen Gleichungen zeigen daher zugleich den Weg, welchen man einzuschlagen haben würde, wenn man einen Träger mit gleichen Druckspannungen der Verticalstangen construiren wollte, in welchem Falle man statt der Diagonalspannungen Y die verticalen Seitenkräfte derselben einer vorgeschriebenen constanten Grösse gleich zu setzen haben würde.

§ 40.

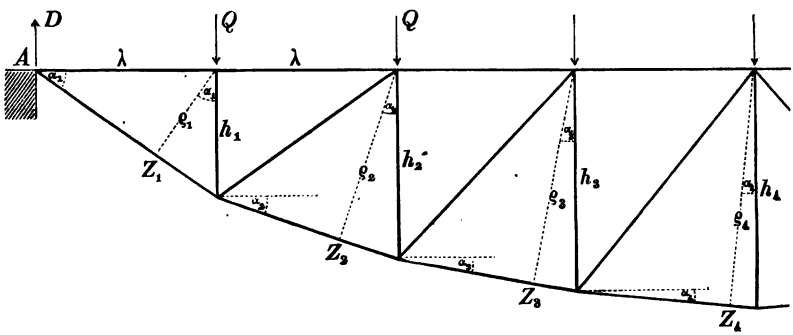
Träger mit gleichen Spannungen im Bogen.

(Pauli'scher Träger.)

Bei dem symmetrischen parabolischen Träger Fig. **34** nehmen die Spannungen in der unteren Gurtung von der Mitte aus nach den beiden Enden hin allmählich **zu**; bei dem symmetrischen Paralleltträger Fig. **70** dagegen nehmen dieselben von der Mitte nach den Enden hin **ab**. Es muss daher zwischen beiden irgend eine Zwischenform geben, bei welcher weder ein Zunehmen noch ein Abnehmen stattfindet, bei welcher vielmehr die Spannungszahlen der unteren Gurtung überall gleich gross werden.

Da die Spannungen in der unteren Gurtung stets bei voller Belastung des Trägers ihr Maximum erreichen, so ist es bei der Berechnung dieser Zwischenform überflüssig, zwischen **mobilen** und **permanenten** Belastungen einen Unterschied zu machen; und wenn mit Q die **Total**belastung jedes der Belastungspunkte bezeichnet

Fig. 345.



wird, so ist bei dem Träger mit 8 Feldern für den Gegendruck jedes der beiden Auflagerpunkte stets der Werth $D = \frac{7Q}{2} = 3{,}5 \, . \, Q$ in Rechnung zu bringen (Fig. **345**).

Um die Spannung in einer der links von der Mitte liegenden Stangen der unteren Gurtung zu berechnen, würde man nach der früher erklärten Methode einen Verticalschnitt durch das betreffende Feld zu legen und für den links von dem Schnitte liegenden Theil die algebraische Summe der statischen Momente sämmtlicher Kräfte in Bezug auf den Durchschnittspunkt der Diagonale mit der oberen Horizontalen gleich Null zu setzen haben; oder man würde das statische Moment der gesuchten Spannung gleich der Momentensumme der äusseren Kräfte, welche auf den links vom Schnitte liegenden Theil wirken, zu setzen haben. Nach Fig. **345** würde man also für die 4 links von der Mitte liegenden Felder die Gleichungen erhalten:

$$Z_1 \cdot \rho_1 = D \cdot \lambda$$
$$Z_2 \cdot \rho_2 = D \cdot 2\lambda - Q \cdot \lambda$$
$$Z_3 \cdot \rho_3 = D \cdot 3\lambda - Q\,(2\lambda + \lambda)$$
$$Z_4 \cdot \rho_4 = D \cdot 4\lambda - Q\,(3\lambda + 2\lambda + \lambda).$$

Für die auf der rechten Seite dieser Gleichungen stehenden Momentensummen $\mathfrak{M}_1 \ldots \mathfrak{M}_4$ erhält man nach Substitution des oben für D gefundenen Werthes die Gleichungen:

$$\mathfrak{M}_1 = 3{,}5\ Q\lambda,\quad \mathfrak{M}_2 = 6\ Q\lambda,\quad \mathfrak{M}_3 = 7{,}5\ Q\lambda,\quad \mathfrak{M}_4 = 8\ Q\lambda.$$

Da die Spannungen $Z_1 \ldots Z_4$ sämmtlich einer und derselben vorgeschriebenen Grösse Z gleich sein sollen, so müssen die Hebelarme $\rho_1 \ldots \rho_4$ den Bedingungsgleichungen entsprechen:

$$Z \cdot \rho_1 = \mathfrak{M}_1,\quad Z \cdot \rho_2 = \mathfrak{M}_2,\quad Z \cdot \rho_3 = \mathfrak{M}_3,\quad Z \cdot \rho_4 = \mathfrak{M}_4.$$

Setzt man $\lambda = 1$ und $Q = 6000$ Kil., so wird $\mathfrak{M}_1 = 21000$, $\mathfrak{M}_2 = 36000$, $\mathfrak{M}_3 = 45000$, $\mathfrak{M}_4 = 48000$. Wenn also die Spannung in der unteren Gurtung z. B. überall die Grösse $Z = 36000$ Kil. haben soll, so ergeben sich für die einzelnen Hebelarme die Werthe:

$$\rho_1 = \frac{21000}{36000} = \frac{7}{12},\quad \rho_2 = \frac{36000}{36000} = 1,\quad \rho_3 = \frac{45000}{36000} = \frac{5}{4},\quad \rho_4 = \frac{48000}{36000} = \frac{4}{3}.$$

Es ist also, um die Form des Trägers durch Construction zu finden, nur nöthig, mit diesen Hebelarmen von den betreffenden Drehpunkten aus Kreisbogen zu beschreiben und der unteren Gurtung alsdann eine solche Form und Lage zu geben, dass die Stücke derselben in den einzelnen Feldern als Tangenten an jene Kreisbogen sich anlegen. Wenn man mit dieser Tangenten-Construction von dem Punkte A aus beginnt, so gelangt man zu der in Fig. **346** dargestellten Form und kann nachher die Dimensionen des Trägers aus der Zeichnung durch Messung bestimmen, wobei man z. B. für die Höhen $h_1 \ldots h_4$ die in der Figur angegebenen Grössen erhalten würde.

Um die Form des Trägers — anstatt durch Construction — auf dem Wege der Rechnung zu bestimmen, hat man die aus

Fig. 346.

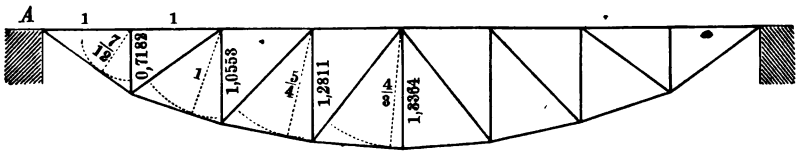


Fig. **345** für die Grössen $\cos\alpha_1 \ldots \cos\alpha_4$ zu entnehmenden je 2 Werthe einander gleich zu setzen und erhält zunächst für das 1ste Feld die Gleichung:

$$1)\quad \frac{\rho_1}{h_1} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + h_1^2}} \; (= \cos\alpha_1), \quad \text{oder}$$

$$\text{I.}\quad \frac{h_1}{\lambda} = \frac{\rho_1}{\sqrt{\lambda^2 - \rho_1^2}},$$

aus welcher die Grösse h_1 berechnet werden kann, da die Grösse $\rho_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{Z}$ als gegeben zu betrachten ist. Für das 2te Feld erhält man auf dieselbe Weise die Gleichung:

$$2)\quad \frac{\rho_2}{h_2} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_2 - h_1)^2}} \; (= \cos\alpha_2).$$

Durch Auflösung dieser in Bezug auf h_2 quadratischen Gleichung erhält man den Werth:

$$\text{II.}\quad \frac{h_2}{\lambda} = \frac{\rho_2^2}{\lambda^2 - \rho_2^2}\left\{-\frac{h_1}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\rho_2}\right)^2 + \left(\frac{h_1}{\rho_2}\right)^2 - 1}\right\}.$$

Auf gleiche Weise erhält man resp. für das 3te und 4te Feld die Gleichungen:

$$3)\quad \frac{\rho_3}{h_3} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_3 - h_2)^2}} \; (= \cos\alpha_3),$$

$$\text{III.}\quad \frac{h_3}{\lambda} = \frac{\rho_3^2}{\lambda^2 - \rho_3^2}\left\{-\frac{h_2}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\rho_3}\right)^2 + \left(\frac{h_2}{\rho_3}\right)^2 - 1}\right\}.$$

$$4)\quad \frac{\rho_4}{h_4} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_4 - h_3)^2}} \; (= \cos\alpha_4),$$

$$\text{IV.}\quad \frac{h_4}{\lambda} = \frac{\rho_4^2}{\lambda^2 - \rho_4^2}\left\{-\frac{h_3}{\lambda} + \sqrt{\left(\frac{\lambda}{\rho_4}\right)^2 + \left(\frac{h_3}{\rho_4}\right)^2 - 1}\right\}.$$

Wenn der für Z vorgeschriebene Werth so beschaffen wäre, dass der Hebelarm $\rho_1 = \frac{\mathfrak{M}_1}{Z} = \frac{D\lambda}{Z}$ die Grösse λ erreichte, so würde nach Gleichung I. $\frac{h_1}{\lambda} = \infty$ werden. Die vorgeschriebene Bedingung ist also überhaupt nicht mehr erfüllbar, wenn $\frac{\mathfrak{M}_1}{Z} \geqq \lambda$ oder $Z \leqq D$ ist.

Bei dem vorigen Zahlenbeispiele war $\frac{\mathfrak{M}_1}{\lambda} = D = 21000$ und würde es daher bei der dort angenommenen Belastungsgrösse $Q = 6000$ Kil. unmöglich sein, den Träger so zu construiren, dass die überall gleiche Spannung in der unteren Gurtung nur 21000 Kil. oder noch weniger beträgt.

Wenn der für Z vorgeschriebene Werth so beschaffen ist, dass der Hebelarm $\rho_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{Z}$ die Grösse λ erreicht, so nimmt die Gleichung II. die unbestimmte Form an: $\frac{h_2}{\lambda} = \infty \,.\, 0$. In diesem Falle hat man die Grösse h_2 (anstatt aus Gleichung II.) aus der Gleichung 2) zu berechnen, welche nach Substitution des Werthes $\rho_2 = \lambda$ die Form annimmt:

$$\frac{1}{h_2} = \frac{1}{\sqrt{\lambda^2 + (h_2 - h_1)^2}}$$

und für h_2 aufgelöst als Resultat ergiebt:

$$\text{II}_a. \quad h_2 = \frac{\lambda^2 + h_1^2}{2h_1} \quad \text{oder} \quad \frac{h_2}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h_1} + \frac{h_1}{\lambda}\right).$$

Dieser Fall trat bei dem vorigen Zahlenbeispiele (Fig. **346**) ein, insofern $Z = 36000$ Kil. angenommen war und $\frac{\mathfrak{M}_2}{\lambda}$ ebenfalls gleich 36000, also $\rho_2 = \frac{\mathfrak{M}_2}{Z} = \lambda = 1$ wurde. Wenn man zunächst die Grösse h_1 aus Gleichung I. berechnet und den gefundenen Werth $h_1 = 0{,}7182$ in Gleichung II_a. substituirt, so erhält man:

$$h_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0{,}7182} + 0{,}7182\right) = 1{,}0553,$$

worauf dann aus Gleichung III. der Werth $h_3 = 1{,}2811$ und endlich aus Gleichung IV. der Werth $h_4 = 1{,}3364$ sich ergiebt.

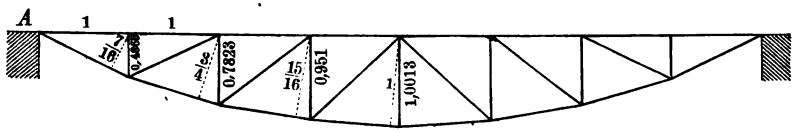
Auf gleiche Weise würde man in Bezug auf irgend eins der übrigen Felder zu verfahren haben, wenn daselbst der dem vorgeschriebenen Werthe Z entsprechende Hebelarm die Grösse der Feldlänge λ annähme.

Setzt man z. B. $Z = 48000$ Kil., indem man übrigens die im vorigen Zahlenbeispiele angenommenen Werthe $\lambda = 1$ und $Q = 6000$ Kil. (also auch die denselben entsprechenden Momentenzahlen $\mathfrak{M}_1 = 21000$, $\mathfrak{M}_2 = 36000$, $\mathfrak{M}_3 = 45000$, $\mathfrak{M}_4 = 48000$) beibehält, so ergeben sich für die Hebelarme die Werthe: $\rho_1 = \frac{21}{48} = \frac{7}{16}$, $\rho_2 = \frac{36}{48} = \frac{3}{4}$, $\rho_3 = \frac{45}{48} = \frac{15}{16}$, $\rho_4 = \frac{48}{48} = 1$. Man erhält sodann zunächst aus den Gleichungen I., II., III. successive die Werthe: $h_1 = 0{,}4865$, $h_2 = 0{,}7823$, $h_3 = 0{,}951$. Aus Gleichung IV. aber würde wiederum der unbestimmte Ausdruck $\frac{h_4}{\lambda} = \infty . 0$ sich ergeben. Man hat daher die Grösse h_4 statt dessen zu berechnen aus der Gleichung:

$$\frac{h_4}{\lambda} = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda}{h_3} + \frac{h_3}{\lambda}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{0{,}951} + 0{,}951\right) = 1{,}0013.$$

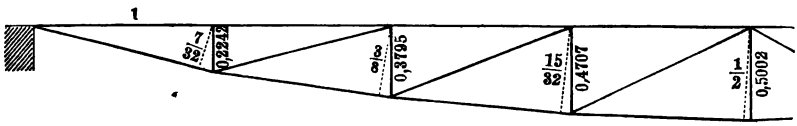
(S. Fig. **347**.)

Fig. 347.



Wenn die Hebelarme $\rho_1 \ldots \rho_4$ auf die Hälfte reducirt werden, so nimmt die Spannung Z die doppelte Grösse an; wenn aber gleichzeitig auch die Belastungen Q auf die Hälfte reducirt werden, so erhält die Spannung Z wiederum die frühere Grösse. Es würden daher z. B. die in Fig. **348** angegebenen Dimensionen gelten, so-

Fig. 348.



wohl für den Fall, wenn $Q = 6000$ Kil. und $Z = 96000$ Kil., als auch für den Fall, wenn $Q = 3000$ Kil. und $Z = 48000$ Kil. gegeben wäre — überhaupt für alle Fälle, in denen $Z = 16\,Q$ ist —.

Wenn man die Lage eines Trägers umkehrt, so hat man, um die der neuen Lage entsprechenden Spannungszahlen zu finden, die der ursprünglichen Lage entsprechenden Spannungszahlen sämmtlich mit der Zahl -1 zu multipliciren. Durch Umkehrung des Trägers Fig. **348** würde man also einen Träger Fig. **349** erhalten, bei welchem die **Druck**spannungen in der oberen Gurtung überall gleich gross sind, und zwar $= 48000$ Kil., wenn die Belastung $Q = 3000$ Kil. ist.

Die in Fig. **349** und Fig. **350** eingetragenen Spannungszahlen entsprechen der Voraussetzung: dass bei jedem dieser beiden

Fig. 349.

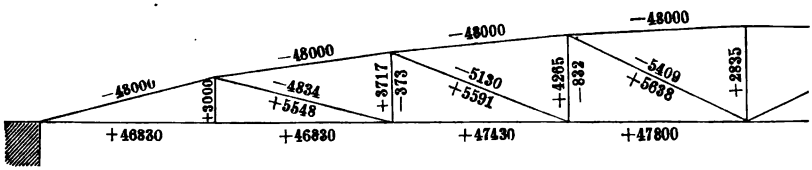
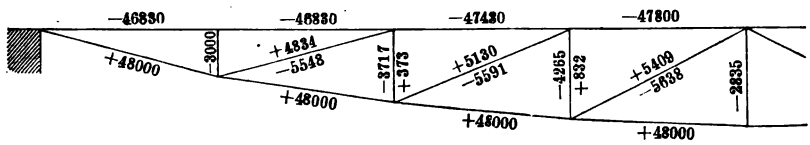
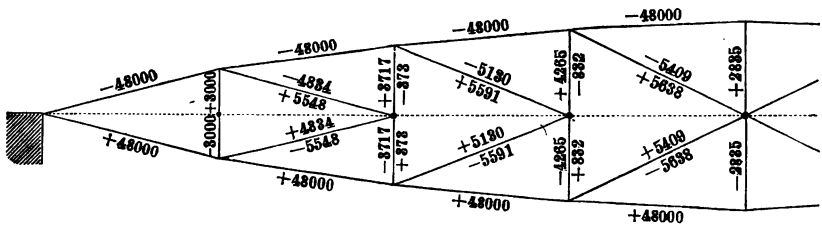


Fig. 350.



Träger die Totalbelastung eines jeden Belastungspunktes im Betrage von 3000 Kil. sich zusammensetzt aus einer permanenten Belastung $\frac{p}{2} = \frac{1000}{2}$ Kil. und einer mobilen $\frac{m}{2} = \frac{5000}{2}$ Kil. Denkt man sich die beiden Träger zu **einem** vereinigt, so erhält man einen Träger, bei welchem sowohl die Druckspannung in dem oberen als auch die Zugspannung in dem unteren Bogen gleich gross, nämlich = 48000 Kil. ist (Fig. **351**). Das Höhenverhältniss

Fig. 351.

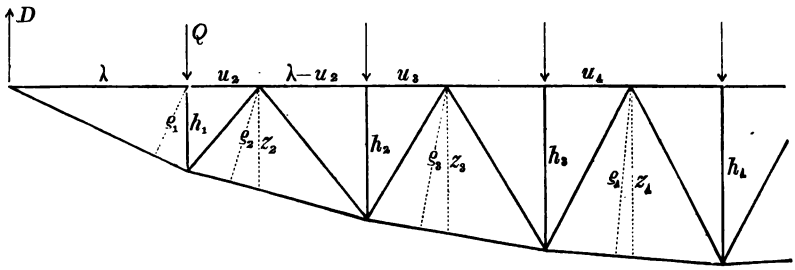


(1 : 8) und die Belastungen (permanente Last $p = 1000$ Kil., mobile Last $m = 5000$ Kil.) sind dieselben wie bei dem in § 6 berechneten parabolischen Träger. Die Spannungszahlen von je zwei mit einander zusammenfallenden horizontalen Stangen heben einander auf, und sind deshalb in Fig. **351** die horizontalen Stangen als überflüssig weggelassen. Die Spannungszahlen der Verticalstangen entsprechen der Annahme, dass die Angriffspunkte der

permanenten sowohl als der mobilen Belastungen in der horizontalen Mittellinie liegen.

Wenn der Träger statt der 2 halben Diagonalen, die am Ende des Feldes zusammentreffen, in jedem Felde 2 ganze Diagonalen haben soll, die einander in der Mitte kreuzen, so wird man zwar die Höhen $h_1 \ldots h_4$ etwas verändern müssen; es lässt sich jedoch im Voraus erwarten, dass diese Aenderungen verhältnissmässig klein ausfallen werden und dass die obige Form bereits als eine Annäherungsform für einen solchen Träger angesehen werden darf. Um die genau richtige Form desselben zu finden, hat man zunächst für den Träger Fig. **352**, welcher als die untere Hälfte eines

Fig. 352.



solchen betrachtet werden kann, die Momenten-Gleichungen der Bogenspannungen aufzustellen:

5) $Z\rho_1 = D\lambda$

6) $Z\rho_2 = D(\lambda + u_2) - Qu_2$

7) $Z\rho_3 = D(2\lambda + u_3) - Q\{(\lambda + u_3) + u_3\}$

8) $Z\rho_4 = D(3\lambda + u_4) - Q\{(2\lambda + u_4) + (\lambda + u_4) + u_4\}$.

Da hinsichtlich des ersten Feldes kein Unterschied stattfindet zwischen Fig. **352** und Fig. **345**, so kann die Grösse h_1 wiederum nach Gleichung I. bestimmt werden, welche nach Substitution des für ρ_1 aus Gleichung 5) zu entnehmenden Werthes die Form annimmt:

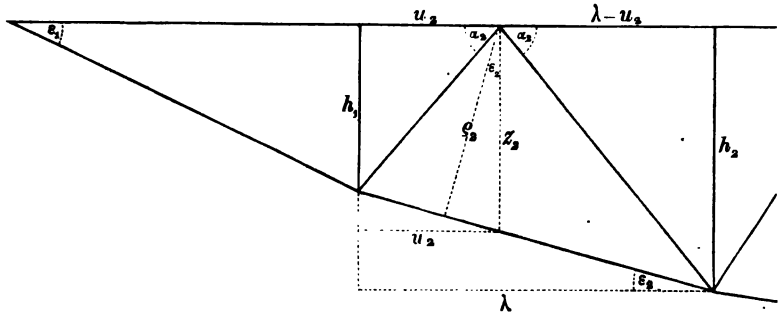
V. $$\frac{h_1}{\lambda} = \frac{D}{\sqrt{Z^2 - D^2}}.$$

Zur Bestimmung von u_2 und ρ_2 erhält man nach Fig. **353** die Gleichungen:

$$\frac{h_1}{u_2} = \frac{h_2}{\lambda - u_2} = \operatorname{tg} \alpha_2$$

$$\frac{z_2 - h_1}{u_2} = \frac{h_2 - h_1}{\lambda} = \operatorname{tg}. \varepsilon_2.$$

Fig. 353.



Aus der ersteren Gleichung ergiebt sich für u_2 der Werth:

$$9) \quad u_2 = \frac{\lambda h_1}{h_1 + h_2}.$$

Die andere nimmt für z_2 aufgelöst nach Substitution des für u_2 gefundenen Werthes die Form an:

$$z_2 = \frac{2 h_1 h_2}{h_1 + h_2},$$

und man erhält für den Hebelarm ρ_2 nunmehr die Gleichung:

$$10) \quad \rho_2 = z_2 \cdot \cos \varepsilon_2 = \frac{2 h_1 h_2 \cos \varepsilon_2}{h_1 + h_2}.$$

Wenn man in Gleichung 6) die hier für u_2 und ρ_2 gefundenen Werthe substituirt und dieselbe alsdann für $\frac{h_2}{\lambda}$ aufgelöst, so erhält man die Gleichung:

$$\text{VI.} \quad \frac{h_2}{\lambda} = \frac{(2D - Q) h_1}{2 Z h_1 \cos \varepsilon_2 - D \lambda}.$$

Aus dieser Gleichung würde man — nachdem zuvor h_1 aus Gleichung V. gefunden wurde — die Grösse h_2 berechnen können, wenn der Winkel ε_2 bekannt wäre. Es ist jedoch:

$$11) \quad \cos \varepsilon_2 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_2 - h_1)^2}}$$

eine von h_2 abhängige noch unbekannte Grösse. Da indessen jedenfalls $\cos \varepsilon_2 \gtrless \cos \varepsilon_1$ ist, so kann man die Berechnung von h_2 in der Weise ausführen, dass man zunächst für $\cos \varepsilon_2$ irgend einen zwischen diesen beiden Grenzwerthen liegenden Werth, oder auch einen der Grenzwerthe selbst, z. B. den Grenzwerth 1 substituirt und mittelst des auf solche Weise gefundenen Annäherungswerthes von h_2 einen genaueren Werth für $\cos \varepsilon_2$ aus Gleichung 11) berechnet, worauf aus Gleichung VI. wiederum ein genauerer Werth für h_2 gefunden und das Verfahren dann wiederholt werden kann, so lange bis der für h_2 sich ergebende Werth den verlangten Grad von Genauigkeit erreicht hat.

Wenn man in den Gleichungen 9), 10), 11) den Index um Eins erhöht, so gelten dieselben für das dritte Feld. Also ist:

$$12)\quad u_3 = \frac{\lambda h_2}{h_2 + h_3}, \qquad 13)\quad \rho_3 = \frac{2 h_2 h_3 \cos \varepsilon_3}{h_2 + h_3},$$

$$14)\quad \cos \varepsilon_3 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_3 - h_2)^2}}.$$

Nach Substitution dieser Werthe für u_3 und ρ_3 erhält man aus Gleichung 7) für das Verhältniss $\frac{h_3}{\lambda}$ den Werth:

$$\text{VII.}\quad \frac{h_3}{\lambda} = \frac{3 (D - Q) h_2}{2 Z h_2 \cos \varepsilon_3 - (2 D - Q) \lambda}.$$

Für das vierte Feld erhält man durch abermalige Erhöhung des Index die Gleichungen:

$$15)\quad u_4 = \frac{\lambda h_3}{h_3 + h_4}, \qquad 16)\quad \rho_4 = \frac{2 h_3 h_4 \cos \varepsilon_4}{h_3 + h_4},$$

$$17)\quad \cos \varepsilon_4 = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 + (h_4 - h_3)^2}}$$

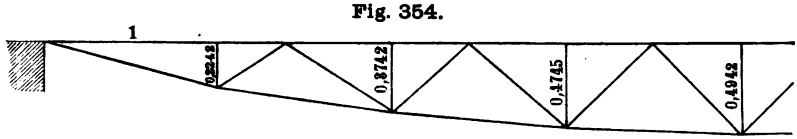
und die Gleichung 8) giebt, wenn dieselbe nach Substitution der obigen Werthe aufgelöst wird, für $\frac{h_4}{\lambda}$ den Werth:

$$\text{VIII.}\quad \frac{h_4}{\lambda} = \frac{(4 D - 6 Q) h_3}{2 Z h_3 \cos \varepsilon_4 - 3 (D - Q) \lambda}.$$

Setzt man wiederum $\lambda = 1$ und $Z = 16\ Q$ wie bei dem vorigen Zahlenbeispiele (Fig. **348**), so erhält man zunächst aus Gleichung V. wie dort den Werth $h_4 = 0{,}2242$. Wenn man diesen Werth in Gleichung VI. substituirt und zugleich provisorisch $\cos \varepsilon_2 = 1$ annimmt, so erhält man für h_2 zunächst als ersten Annäherungswerth 0,3661. Hiernach ergiebt sich aus Gleichung 11) für $\cos \varepsilon_2$ der genauere Werth 0,99, durch Substitution dieses Werthes in Gleichung VI. erhält man für h_2 den zweiten Annäherungswerth 0,3734. Eine nochmalige Wiederholung der Rechnung giebt die noch genaueren Werthe $\cos \varepsilon_2 = 0{,}9889$ und $h_2 = 0{,}3742$. Auf gleiche Weise erhält man aus den

Gleichungen VII. und 14) den Werth $h_3 = 0{,}4745$, endlich aus den Gleichungen VIII. und 17) den Werth $h_4 = 0{,}4942$ (s. Fig. **354**).

Fig. 354.



Die in Fig. **355** und Fig. **356** für diesen Träger angegebenen Spannungszahlen entsprechen wiederum der (in Bezug auf Fig. **349**

Fig. 355.

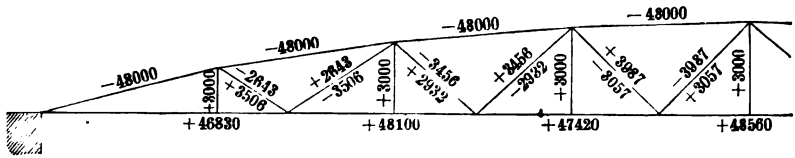
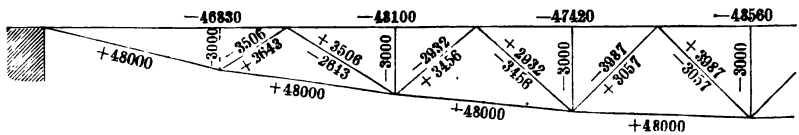
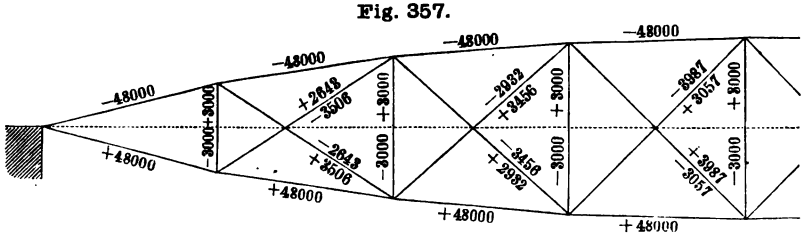


Fig. 356.



und Fig. **350** gemachten) Voraussetzung: dass die Totalbelastung jedes Belastungspunktes (von der Grösse $\frac{Q}{2} = \frac{6000}{2}$ Kil.) aus einer permanenten Belastung $\frac{p}{2} = \frac{1000}{2}$ Kil. und einer mobilen Belastung $\frac{m}{2} = \frac{5000}{2}$ Kil. besteht. Die Zusammensetzung dieser beiden Figuren führt zu dem Träger Fig. **357**, für welchen die Belastungen

Fig. 357.



(permanente Last $p = 1000$ Kil., mobile Last $m = 5000$ Kil.), so wie annähernd auch das Höhenverhältniss (0,9884 : 8) wiederum dieselbe Grösse haben wie in Fig. **351** und wie bei dem in § 6 berechneten parabolischen Träger.

Zweite Abtheilung.

Bestimmung der erforderlichen Querschnitts-dimensionen

nebst

Untersuchungen über die Elasticitätswiderstände belasteter Träger.

Zwölfter Abschnitt.

§ 41.

Bestimmung der Querschnitte für die Theile der Haupt-Constructionen.

Jeder Constructionstheil kann betrachtet werden als ein Bündel von fest mit einander verbundenen Stangen, deren jede die Flächeneinheit zur Querschnittsfläche hat. **Man erhält also die Anzahl der Flächeneinheiten, welche in der Querschnittsfläche eines Constructionstheils enthalten sein müssen, indem man seine Spannungszahl dividirt durch diejenige Zahl, welche für eine Stange von einer Flächeneinheit Querschnittsfläche als zulässige Spannungszahl gilt.**

Zulässig sind solche Spannungen, bei welchen die Längenänderungen noch innerhalb der Elasticitäts-Grenzen bleiben. So kann z. B. für eine schmiedeiserne Stange von 1 Quadratmillimeter Querschnittsfläche eine Spannung von 15^k (im Mittel) noch als zulässig betrachtet werden, weil erst bei grösseren Spannungen bleibende Längenänderungen eintreten würden. Wenn man also bis an die äusserste Grenze des Zulässigen gehen wollte, so würde man die in Kilogrammen ausgedrückten Spannungszahlen durch 15 zu dividiren haben, um die Querschnittsflächen in Quadratmillimetern zu erhalten. In der Praxis pflegt man indessen der Sicherheit wegen nur etwa 6 bis 8^k pro Quadratmillimeter als zulässige Spannung für Schmiedeisen anzunehmen und nur in Ausnahmefällen, wo es zweckmässig erscheint mehr zu wagen, jener Grenze noch näher zu rücken.

Hiernach würde man also die in der I. Abtheilung berechneten Spannungszahlen — auf Kilogramme reducirt, wo dies noch nicht geschehen — sämmtlich etwa durch 6 zu dividiren haben, um die erforderlichen Querschnittsflächen der Constructionstheile in Quadratmillimetern zu erhalten, wenn die Construction in Schmiedeisen ausgeführt werden soll.

Nach dieser Regel würde man beispielsweise für die im dritten Abschnitte berechnete Fachwerkbrücke (Fig. **61**) die folgenden Querschnittszahlen in Quadratmillimetern erhalten:

1) für die oberen Horizontalstangen:
3500, 6000, 7500, 8000, 8000, 7500, 6000, 3500,

2) für die unteren Horizontalstangen:
0, 3500, 6000, 7500, 7500, 6000, 3500, 0,

3) für die Verticalständer:
4000, 3500, 2604, 1813, 1125, 1813, 2604, 3500, 4000,

4) für die Hauptstreben:
4950, 3683, 2567, 1592, 1592, 2567, 3683, 4950,

5) für die 4 Gegenstreben:
88, 767, 767, 88.

Es ist jedoch nöthig, folgende zwei Punkte bei dieser Berechnung stets im Auge zu behalten: erstens, dass nicht in allen Fällen die Widerstände des Materials gegen Zug- und Druckspannung als gleich gross angenommen werden dürfen, dass vielmehr in manchen Fällen der Widerstand gegen Druckspannung beträchtlich geringer werden kann — namentlich bei langen dünnen Stangen, wo es sich um den Widerstand gegen **Zerknicken** handelt. Dieser Punkt wird später einer specielleren Untersuchung unterzogen werden (vergl. weiter unten: „Widerstand langer Stangen gegen Zerknicken").

Zweitens ist zu berücksichtigen, dass die so gefundenen Zahlen nur für die Haupt-Constructionstheile als solche gelten, nicht aber schon als endgültige Querschnittszahlen der Construction zu betrachten sind, weil zu der Haupt-Construction noch Neben-Constructionen hinzukommen, deren nachherige Verschmelzung mit der Haupt-Construction zu den Gesammt-Querschnittsflächen fernere Beiträge liefert.

Es wurden nämlich die in der I. Abtheilung gefundenen Spannungszahlen berechnet unter den Voraussetzungen: 1) dass ausser den Gegendrücken der Auflagerpunkte die von den Belastungen herrührenden **verticalen** Kräfte die einzigen äusseren Kräfte seien, welche auf die Construction wirken; 2) dass **ausschliesslich** die als Belastungspunkte angenommenen Knotenpunkte der Construction die Angriffspunkte dieser Verticalkräfte bilden.

Um diese Voraussetzungen mit der Wirklichkeit in Einklang zu bringen, kann man sich die Gesammt-Construction in drei

Gruppen von Constructionstheilen zerlegt denken: die erste Gruppe umfasst eben jene als Haupt-Constructionstheile bezeichneten Stücke, für welche die in der I. Abtheilung berechneten Zahlen die wirklich richtigen Spannungszahlen sind; der zweiten Gruppe gehören alle diejenigen Theile an, welche zusammen eine Absteifungs-Construction gegen Seitendruck des Windes und sonstige seitlich wirkende Horizontalkräfte bilden; die dritte Gruppe besteht aus einem Systeme von Zwischenträgern, deren jeder als kleinere Brücke die Länge eines Feldes zur Spannweite hat und seine Belastung auf die beiden angrenzenden Knotenpunkte überträgt.

Wenn man sich die letzteren beiden Neben-Constructionen in die Haupt-Construction eingeschaltet und je zwei einander deckende Theile nach Befinden entweder zu **einem** Stück verschmolzen oder getrennt bleibend neben einander gelagert denkt, so erhält man damit erst die endgültigen Gesammt-Querschnittszahlen.

§ 42.

Absteifung gegen Seitendruck des Windes und horizontale Stösse.

Wenn ein Bahnzug über eine Eisenbahnbrücke fährt, so können theils durch die Horizontalschwankungen der Locomotive und der Wagen, theils durch den Druck des etwa gleichzeitig wehenden Windes gegen die durch den Bahnzug vergrösserte Seitenfläche der Brücke, horizontale Kräfte hervorgebracht werden, denen das aus den sogenannten Windstreben nebst einem Theile der Gurtungen bestehende Absteifungs-System einen hinlänglichen Widerstand entgegensetzen muss.

Diese Windstreben bilden mit jenen Theilen der Gurtungen zusammen eine den verticalen Tragwänden ganz analog construirte **horizontale** Tragwand, für welche jene horizontalen Kräfte gleichsam als Horizontal-Belastungen anzusehen sind. Die Berechnung einer solchen horizontalen Tragwand, welche natürlich unter allen Umständen (wegen des Parallelimus der verticalen Tragwände) die Form eines Fachwerkträgers mit parallelen Gurtungen erhält, kann auf dieselbe Weise wie bei den im dritten Abschnitt berechneten Fachwerkbrücken ausgeführt werden. Auch hinsichtlich der Unterscheidung zwischen permanenter (gleichförmig vertheilter) und mobiler (zu Zeiten ungleichförmig vertheilter) Last findet eine vollkommene Analogie zwischen beiden Fällen statt, insofern bei allmäligem Fortschreiten des Bahnzuges und damit wachsender

Druckfläche des Windes hinsichtlich der Horizontalwirkungen nach und nach dieselben Belastungszustände auf einander folgen, wie sie hinsichtlich der verticalen Belastung für die Berechnung der Diagonalen und Verticalständer massgebend waren.

Man kommt der Wahrheit ziemlich nahe, wenn man annimmt, dass die horizontale Totalbelastung nach demselben Verhältniss in mobile und permanente Last sich zerlegt, wie die Belastung der verticalen Tragwand. Wenn also z. B. die **Breite** der horizontalen Tragwand eben so gross ist als die **Höhe** der verticalen Tragwand, so können ohne Weiteres die im siebenten Abschnitt für die Transformation der Spannungszahlen gegebenen Regeln zur Anwendung gebracht werden.

Nur in **einem** Punkte weichen die Berechnungen der horizontalen und verticalen Tragwände von einander ab: Die Horizontalbelastungen können sowohl von links nach rechts als von rechts nach links wirken, die Verticalbelastungen dagegen immer nur von oben nach unten. Während also bei der verticalen Tragwand hinsichtlich der Grösse und **Art** der Spannung ein Unterschied zwischen „Oben" und „Unten" stattfindet, fällt bei der horizontalen Tragwand dieser Unterschied ganz weg, und wird dieselbe in Bezug auf die horizontale Mittellinie symmetrisch zu construiren sein. Es sind daher sämmtliche Spannungszahlen der Gurtungen — an der einen sowohl als an der anderen Seite — mit dem Vorzeichen $\pm$ zu bezeichnen, weil die Tragwand bald nach der einen, bald nach der anderen Seite hin durchgebogen wird, und in Folge dessen jedes von den beiden in einem Felde einander gegenüber liegenden Stücken der Gurtungen abwechselnd Zug- und Druckspannungen von gleicher Grösse annehmen wird.

Wo ferner — wie z. B. bei Fig. **61** — die Diagonalen als Zugbänder construirt werden sollen, da werden für die horizontale Tragwand in **allen** Feldern Gegenstreben anzubringen sein, während in Fig. **61** nur für die 4 Mittelfelder solche erforderlich waren. Auch wird hinsichtlich der Spannungszahlen kein Unterschied zwischen Haupt- und Gegenstrebe stattfinden, weil eine Diagonale, die bei **einer** Richtung des Windes als Gegenstrebe fungirt, bei entgegengesetzter Richtung desselben zur Hauptstrebe wird.

Als verticale Totalbelastung der Brücke, für deren verticale Tragwand in § 41 bereits die Querschnittszahlen berechnet sind, wurden:

$$p + m = 6000^k$$

für den laufenden Meter angenommen.

Rechnet man als totale Horizontalbelastung der horizontalen Tragwand

$$p_1 + m_1 = 857^k$$

für den laufenden Meter, so erhält man — unter Voraussetzung gleicher Höhe und Breite der Brücke — die Querschnittszahlen der horizontalen Tragwand, indem man die in § 41 berechneten Zahlen mit

$$\frac{p_1 + m_1}{p + m} = \frac{857}{6000} = \frac{1}{7}$$

multiplicirt, und von den beiden symmetrisch liegenden Stücken eines Feldes jedesmal nur die grössere Querschnittszahl als für beide gültig auswählt. Es ergeben sich demnach folgende Zahlen:

1) für die Gurtungen (der einen und der anderen Seite)
500 857 1071 1143;
2) für die Querstreben
571 500 372 259 161;
3) für die Diagonalen (Haupt- und Gegenstreben)
707 526 367 227.

Was endlich die in der quadratischen Seitenansicht der Brücke als Diagonalen erscheinenden Transversalstangen betrifft, welche den Zweck haben, eine Verschiebung dieses Quadrats zu verhindern, so kann man ihre Spannungs- und Querschnittszahlen auf folgende Weise bestimmen. Da die Fahrbahn oben liegt, und in Folge dessen die Horizontalwirkungen vorwiegend die obere der beiden horizontalen Tragwände **direct** treffen, so würde dieselbe allein die seitliche Druckbiegung erleiden, wenn nicht durch jene Transversalstangen die untere Tragwand gezwungen würde, dieser Bewegung zu folgen. Man kann allenfalls annehmen, dass die **eine** Hälfte der horizontalen Totalbelastung von der oberen Tragwand direct aufgenommen, die andere aber mittelst der Transversalstangen auf die untere übertragen wird. Durch eine einfache Zerlegung dieser Kraft ergiebt sich danach für jede der beiden Transversalstangen (die als nur zugfähig vorausgesetzt werden) eine Spannung von

$$857 \cdot \sqrt{2} = 1210^k \text{ (s. Fig. 358)},$$

folglich als Querschnittszahl:

$$\frac{1210}{6} = 202.$$

Jeder Verticalständer der verticalen Tragwand erhielte dadurch noch einen Zuwachs von 857^k an Druckspannung, den man

— obwohl diese Correction für die Praxis von keinem Belang ist — wenn man will, mit in Rechnung bringen kann. Dem Querschnitt jedes Verticalständers würden alsdann noch:

$$\frac{857}{6} = 143$$

Quadratmillimeter hinzuzufügen sein (s. Fig 359).

Fig. 358.

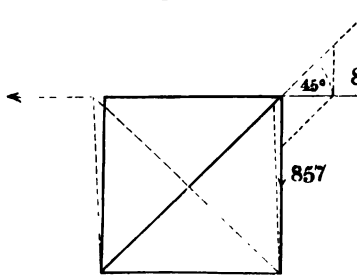
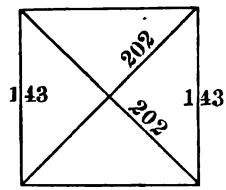


Fig. 359.



Wenn man sich die soeben berechneten horizontalen Tragwände alsdann mit den verticalen Tragwänden zusammengesetzt und die Querschnittsflächen von je zwei neben einander liegenden Theilen allemal zu **einer** Fläche vereinigt denkt, so erhält man

Fig. 360. (Aufriss)

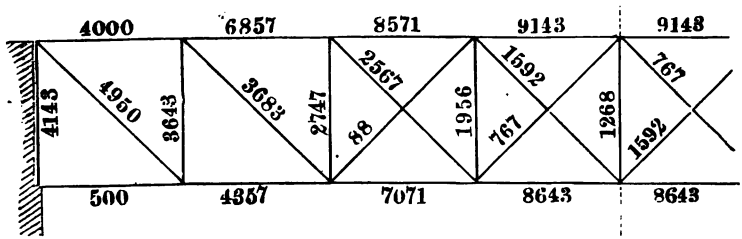
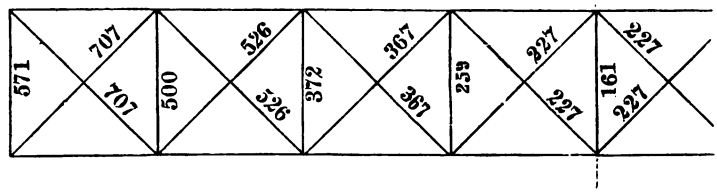


Fig. 361. (Grundriss)



durch Addition der betreffenden Querschnittszahlen die in den Figuren **360** und **361** zusammengestellten Zahlen, welche als endgültige Querschnittszahlen für diese Brücke betrachtet werden

können unter der Voraussetzung, dass die Zwischenträger als von der Haupt-Construction gesonderte Theile construirt sind.

§ 43.

Berechnung der Zwischenträger.

Alle in der I. Abtheilung ausgeführten Constructions-Berechnungen gründeten sich auf die Voraussetzung: dass ausschliesslich die Knotenpunkte der Construction die Belastungspunkte bildeten. Wo diese Voraussetzung nicht erfüllt ist, wo die Form der zu tragenden Belastung eine grössere Zahl von Stützpunkten erfordert, als ihr in den Knotenpunkten der Haupt-Construction geboten werden: da muss durch Einschaltung eines Systems von Zwischenträgern, deren jeder seine Belastung auf die Endpunkte der von ihm überbrückten Spannweite überträgt, für eine genügende Zahl von Zwischenpunkten gesorgt werden.

Diese Zwischenträger können — da sie ihrer eigenen Belastung gegenüber in ähnlicher Lage sich befinden, wie die Haupt-Construction dem System der belasteten Zwischenträger gegenüber — in ähnlicher Weise wie die Haupt-Construction als Stangenverbindungen construirt werden. Auch kann, wenn die durch einmalige Einschaltung hergestellte Zahl von Belastungspunkten noch nicht ausreicht, auf jeden Zwischenträger wiederm dasselbe Verfahren angewendet werden, und dann durch Einschaltung eines Systems von Zwischenträgern zweiter Ordnung eine Anzahl von neuen Zwischenpunkten gewonnen werden.

Diese Methode der Einschaltung kann dann so oft wiederholt werden, bis entweder die Zahl der Zwischenpunkte ausreicht, oder bis die Kleinheit der Zwischenträger letzter Ordnung eine fernere Einschaltung nicht mehr thunlich erscheinen lässt. Werden bei letzteren die dreieckigen Felder so klein, dass das durch die leeren Räume zwischen den Stangen ersparte Material die Kosten von der Herstellung der letzteren nicht mehr decken würde, so wird man sie massiv construiren, und kann einen solchen massiven Träger betrachten als einen Fachwerkträger, in welchem die leeren Zwischenräume mit überschüssigem Material ausgefüllt sind (auch nach denselben Principien berechnen).

Wenn man der Reihe nach diese Systeme von Zwischenträgern in einander und in die Haupt-Construction einfügt, wenn man ferner die zwei- oder mehrfach nebeneinander gelagerten Theile zu **einem** Stücke sich verschmolzen denkt, so ergeben sich die

Spannungszahlen dieser Stücke durch einfache Summation der Spannungszahlen ihrer Theile.

In manchen Fällen ist es thunlich und rathsam, die Zwischenträger der Haupt-Construction **geometrisch ähnlich** zu construiren. Die auf solche Weise zusammengesetzten Constructionen können dann ungeachtet ihrer complicirten Form durch Zerlegung derselben in die constituirenden Systeme auf eine sehr einfache Weise berechnet werden — in manchen Fällen auf einfachere Weise als durch directe Anwendung der Momenten-Methode — wie dies an den folgenden Beispielen gezeigt werden soll.

Die in Fig. **362** dargestellte Construction kann in die vier einfachen Systeme Fig. **363**, Fig. **364**, Fig. **365**, Fig. **366** zerlegt

Fig. 362.

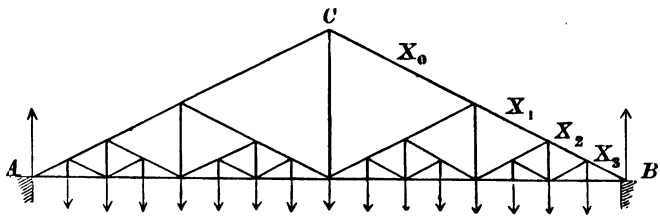


Fig. 363.

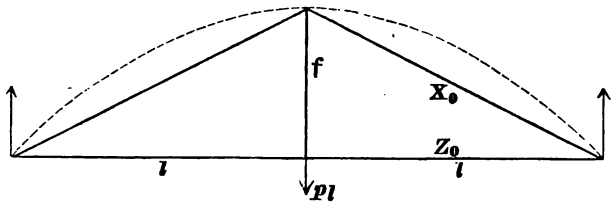


Fig. 364.

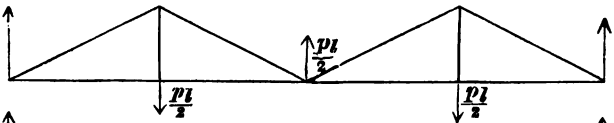


Fig. 365.

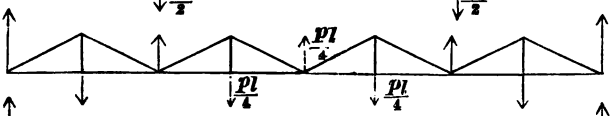
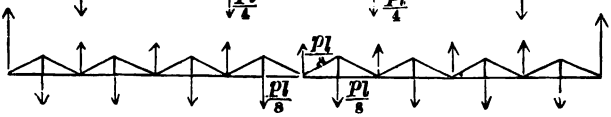


Fig. 366.



werden. Die Grundform oder Haupt-Construction Fig. **363** kann als ein parabolischer Träger von der einfachsten Form — mit nur **einem** Belastungspunkte — angesehen und berechnet werden; denn das Gesetz der parabolischen Träger ist unabhängig von

der Zahl der Belastungspunkte (wie früher bewiesen). Es können also die in § 8 gefundenen Gleichungen:

$$H = \frac{pl^2}{2f}, \qquad V = px$$

für die Bestimmung der Horizontal- und Verticalspannun der (hier nur aus zwei Stangen bestehenden) Kette benutzt werden, woraus sich, wenn $x = \frac{l}{2}$ gesetzt wird, für Z_0 und X_0 die Werthe ergeben:

$$Z_0 = \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{l}{f}\right) \cdot l$$

$$-X_0 = \sqrt{H^2 + V^2} = \frac{p}{2} \cdot \left(\frac{l}{f}\right) \cdot l \cdot \sqrt{1 + \left(\frac{f}{l}\right)^2}.$$

Da sämmtliche Zwischenträger der Haupt-Construction geometrisch ähnlich construirt sind, das Verhältniss $\frac{f}{l}$ also bei ihnen denselben Werth hat, so erhält man die analogen Spannungszahlen für die Zwischenträger der ersten, zweiten, dritten Ordnung, indem man die Werthe von Z_0 und X_0 resp. durch 2, 4, 8 dividirt. Wenn man sich alsdann die drei Systeme von Zwischenträgern successive in einander und in Fig. **363** eingefügt denkt, so dass Fig. **362** daraus entsteht, so ergeben sich beispielsweise für die Theile der Stangen AC und BC folgende Totalspannungen:

$$X_0 = -\frac{pl^2}{2f}\sqrt{1 + \left(\frac{f}{l}\right)^2}$$

$$X_1 = X_0 \left(1 + \tfrac{1}{2}\right)$$

$$X_2 = X_0 \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4}\right)$$

$$X_3 = X_0 \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\right)$$

und für sämmtliche Theile der horizontalen Stange AB die Spannung:

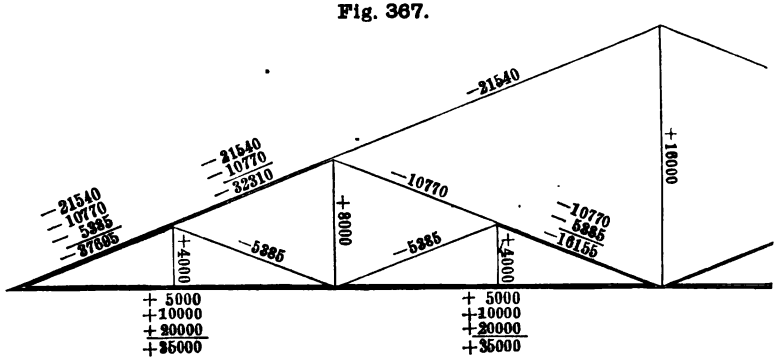
$$Z = Z_0 \left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\right) = \frac{pl^2}{2f}\left(1 + \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}\right).$$

Um die Spannungen der übrigen Stücke zu bestimmen, braucht man nur das gleiche Verfahren auf Fig. **365** anzuwenden, nachdem Fig. **366** in sie eingeschaltet wurde, sowie auf Fig. **364**, nachdem in sie die **beiden** vorigen Figuren eingeschaltet wurden.

Setzt man $2l = 32^m$, $f = 6^m{,}4$, $2pl = 32000$ Kil. und lässt man das letzte Zwischenträger-System Fig. **366** fort, so erhält man die in Fig. **367** zusammengestellten Spannungszahlen, welche

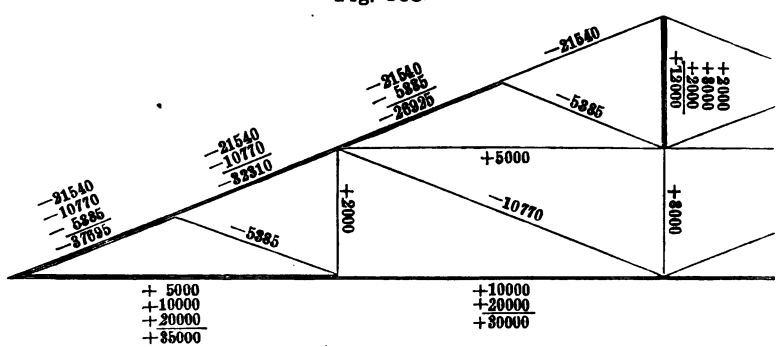
— was die Verticalstangen betrifft — der Voraussetzung entsprechen, dass sämmtliche Belastungspunkte in der Horizontalen AB liegen.

Fig. 367.



Denkt man sich die Zwischenträger und die Belastungspunkte so weit nach oben verschoben, bis die letzteren in die Hauptsparren AC und BC hineinfallen, so gelangt man zu der in Fig. **368** dargestellten Dach-Construction.

Fig. 368.



In den beiden vorigen Fällen stimmten die eingeschalteten Systeme sowohl der Form als der Lage nach mit der Haupt-Construction überein. Die Figuren **369**, **370**, **371**, **372** dagegen stellen einen Fall dar, bei welchem die eingeschalteten Systeme zwar der Form nach mit der Haupt-Construction übereinstimmen, aber der Lage nach von derselben abweichen, insofern es hier — statt der Seiten — die Grundlinien der gleichschenkeligen Dreiecke sind, welche mit den Sparren der Haupt-Construction zu-

sammenfallen. Abgesehen von dem durch diese abweichende Lage bedingten Unterschiede, kann die Berechnung der Spannungszahlen auf dieselbe Welse wie bei dem vorigen Falle ausgeführt werden.

Fig. 369.

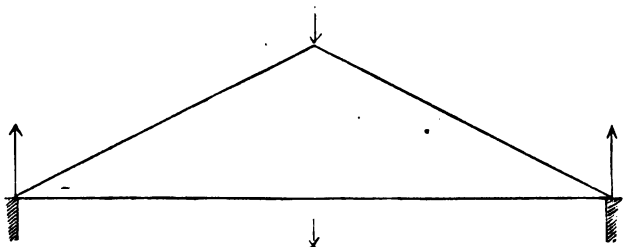


Fig. 370.

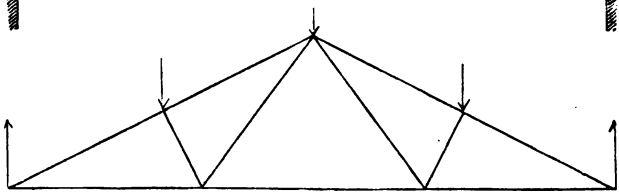


Fig. 371.

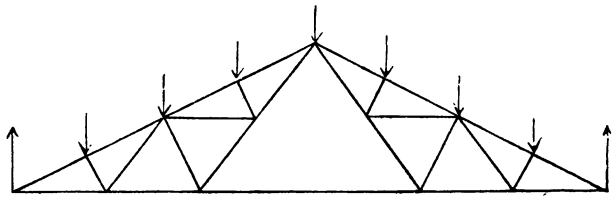
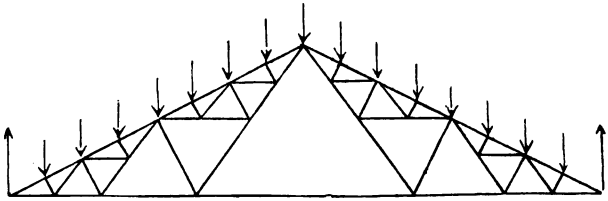


Fig. 372.



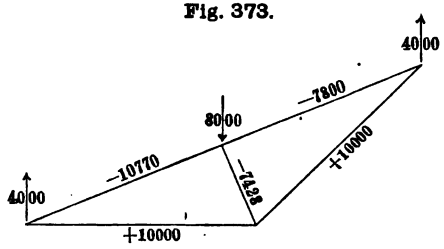
Man hätte also z. B. die in § 4 als Beispiel gewählte Dach-Construction auch auf folgende Weise berechnen können. Setzt man wiederum wie dort die Spannweite $2l = 32^{m}$, die Dachhöhe $f = 6^{m},4$, die Totalbelastung $2pl = 32000$ Kil., so erhält man zunächst für die Haupt-Construction Fig. **369** nach den oben für Fig. **363** gefundenen Gleichungen mit Beibehaltung der dort gewählten Bezeichnungen die Spannungszahlen:

$$Z_0 = \frac{pl^2}{2f} = \frac{1000 \,.\, 16^2}{2 \,.\, 6{,}4} = + 20000 \text{ Kil.}$$

$$X_0 = - \frac{pl^2}{2f} \sqrt{1 + \left(\frac{f}{l}\right)^2} = - 20000 \sqrt{1 + \left(\frac{6{,}4}{16}\right)^2} = - 21540 \text{ K.}$$

Nachdem alsdann für den Zwischenträger erster Ordnung Fig. **373** die von den drei äusseren Kräften in den Stangen desselben hervorgebrachten Spannungen nach der Methode der statischen Momente berechnet sind, erhält man durch wiederholte Halbirungen derselben successive die Spannungszahlen für die Zwischenträger der zweiten, dritten und folgenden Ordnungen. Durch Einfügung der Zwischenträger in die Haupt-Construction und Addition der Spannungen der nebeneinander liegenden Stangen erhält man dann — jenachdem man bis zu den Zwischenträgern der zweiten oder der dritten Ordnung fortgeschritten war, die Spannungszahlen für Fig. **371** und Fig. **372**. Für die beiden an den Auflagerpunkt angrenzenden Stangen in Fig. **371** erhält man auf diese Weise die Spannungszahlen:

Fig. 373.



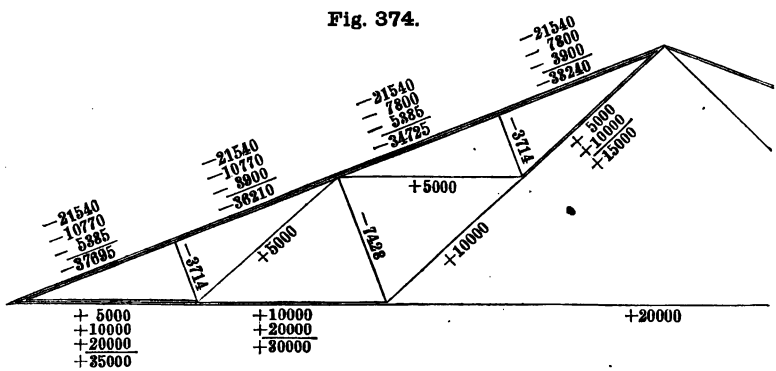
$$20000 + 10000 + 5000 = + 35000 \text{ Kil.}$$
$$-(21540 + 10770 + 5385) = - 37695 \text{ Kil.}$$

In Fig. **372** dagegen würden die betreffenden beiden Spannungszahlen aus je vier Theilen sich zusammensetzen wie folgt:

$$20000 + 10000 + 5000 + 2500 = + 37500 \text{ Kil.}$$
$$-(21540 + 10770 + 5385 + 2692{,}5) = - 40387{,}5 \text{ Kil.}$$

Man kann sich daher die früher in Fig. **19** gefundenen Spannungszahlen auch auf die in Fig. **374** angedeutete Weise

Fig. 374.



durch Zusammensetzung aus ihren einzelnen Theilen entstanden denken.

Anstatt den Zwischenträgern die symmetrische Form des gleichschenkeligen Dreiecks zu geben, kann man auch unsymmetrische Formen wählen und bei der Zusammensetzung in der Weise verfahren, dass man von den zwei ungleichen Abtheilungen des Zwischenträgers allemal nur eine — und zwar die grössere — zur Einschaltung eines neuen Zwischenträgers nächst höherer Ordnung benutzt und damit so lange fortfährt, bis die ganze Spannweite in lauter gleiche Unterabtheilungen getheilt ist. Stellt man sich die von der Dach-Construction zu tragende Totalbelastung als einen oberhalb derselben befindlichen horizontalen Balken vor, der über jedem Belastungspunkte durchschnitten und durch eine von demselben getragene Verticalstange unterstützt ist, so findet man, dass jeder Belastungspunkt immer die Hälfte von den beiden angrenzenden Balkenabtheilungen zu tragen hat, und kann die in jedem der eingeschalteten Zwischenträger von seiner Belastung hervorgebrachten Spannungen auf ähnliche Weise wie in Fig. **373** angedeutet berechnen.

Fig. 375.

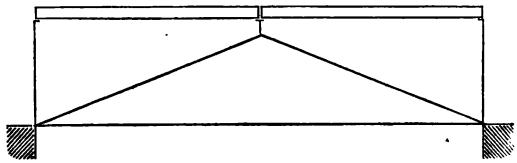


Fig. 376.

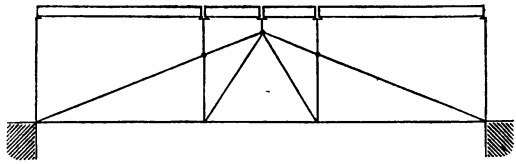


Fig. 377.

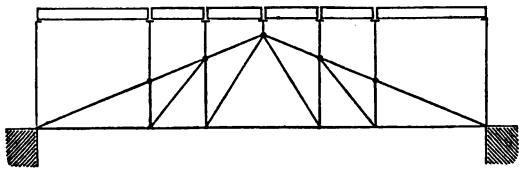
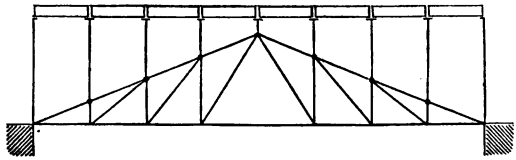


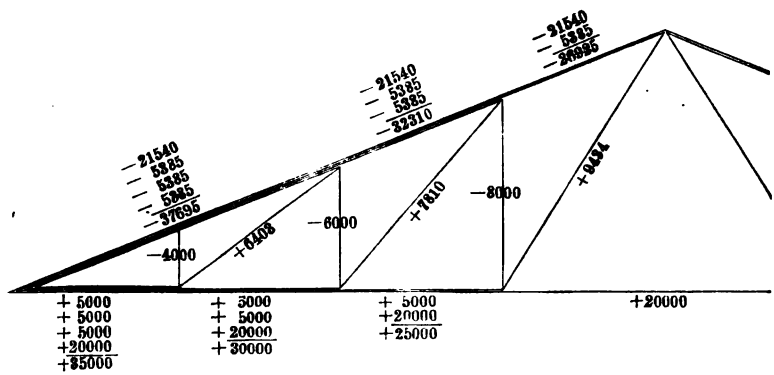
Fig. 378.



Man würde auf solche Weise z. B. aus der Grundform Fig. **375** mittelst der Uebergangsformen Fig. **376**, Fig. **377** zu der in Fig. **378**

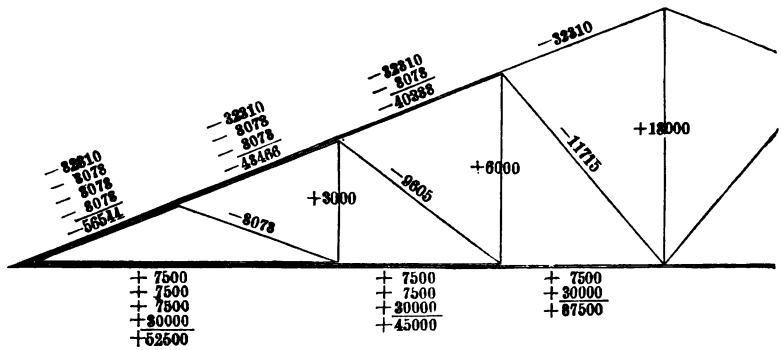
dargestellten Dach-Construction gelangen, und wenn man wiederum wie bei den vorigen Zahlenbeispielen $2l = 32^m$, $f = 6^m,4$, $2pl = 32000$ Kil. annimmt, so findet man die in Fig. **379** angegebenen Spannungszahlen.

Fig. 379.



Auch die § 3 als Beispiel gewählte Dach-Construction könnte man auf diese Weise berechnen und die in Fig. **14** gefundenen Spannungszahlen auf die in Fig. **380** angedeutete Art aus ihren einzelnen Theilen zusammengesetzt sich denken.

Fig. 380.

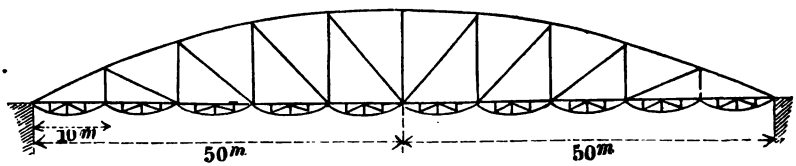


In allen diesen Fällen werden die Theile der Haupt-Construction durch das Einfügen der Zwischenträger-Systeme einen Zuwachs an Querschnittsfläche erhalten, weil die Spannungen der mit einander zu verschmelzenden Theile **gleicher Art** sind, weshalb es auch nicht erforderlich war, zwischen permanenter und mobiler

Belastung zu unterscheiden. Vortheilhafter ist es — wo der Zweck der Construction dies gestattet — die Einfügung der Zwischenträger in der Weise auszuführen, dass die zusammenfallenden Theile von Haupt-Construction und Zwischenträgern Spannungen **entgegengesetzter** Art haben, weil alsdann bei dem Verschmelzen beider Theile die Spannungen theilweise einander neutralisiren, und das zu den betreffenden Theilen der Zwischenträger sonst erforderliche Material alsdann ganz gespart werden kann.

So z. B. würden bei der im zehnten Abschnitt berechneten Balkenbrücke mit drei Oeffnungen den Zwischenträgern des (zwischen den Pfeilerabtheilungen liegenden) parabolischen Trägers von 100m Spannweite am zweckmässigsten die in Fig. **381** darge-

Fig. 381.



stellte Lage zu geben sein, bei welcher die horizontalen **Druck**stangen der Zwischenträger mit den horizontalen **Zug**stangen der Haupt-Construction zusammenfallen. Die Spannung der letzteren beträgt bei voller Belastung:

$$H = \frac{(p+q)l^2}{2f} = \frac{(4+2)\,50^2}{2\,.\,12{,}5} = +\,600 \text{ Tonnen.}$$

Die Zwischenträger bilden kleinere Brücken von 10m Spannweite und tragen ausser der ganzen mobilen Last noch etwa die Hälfte der permanenten Last. Wenn dieselben also beispielsweise als parabolische Träger nach dem Verhältniss:

$$\frac{\text{Höhe}}{\text{Spannweite}} = \frac{f}{2\lambda} = \frac{1}{5}$$

construirt würden, so betrüge die Spannung in ihren Horizontalstangen:

$$\mathfrak{H} = -\frac{\left(\frac{p}{2}+q\right)\lambda^2}{2f} = -\frac{(2+2)\,5^2}{2\,.\,2} = -\,25 \text{ Tonnen.}$$

Bei voller Belastung der Haupt-Construction würde also nach Vereinigung der Zwischenträger mit der Haupt-Construction die Spannung in dem horizontalen Fahrbahnbalken nur

$$H + \mathfrak{H} = 600 - 25 = 575 \text{ Tonnen}$$

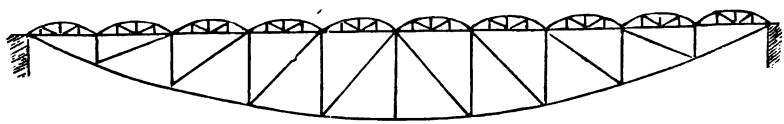
statt 600 Tonnen betragen.

Obwohl man nun deshalb den Fahrbahnbalken nicht um so viel schwächer machen dürfte — weil bei Entlastung eines einzelnen Feldes dieser günstige Fall des Zusammentreffens von Zug- und Druckspannung nicht mehr in der eben gefundenen Weise stattfinden würde, so kann doch wenigstens das sonst zu den horizontalen Balken der Zwischenträger erforderliche Material ganz erspart werden, und da die Bogen derselben nur wenig mehr Material erfordern als die Horizontalbalken, so würde der Materialverbrauch für das Zwischenträger-System zu dem Gesammt-Materialverbrauch ungefähr in demselben Verhältniss stehen, wie die einfache Horizontalspannung im Zwischenträger zur doppelten Horizontalspannung der Haupt-Construction sich verhält, nämlich:

$$\frac{25}{2.600} = \frac{1}{48}.$$

Bei einem parabolischen Träger in der umgekehrten Lage Fig. **382** wird auch die Lage der Zwischenträger die umgekehrte

Fig. 382.



sein müssen, wenn derselbe Vortheil erreicht werden soll. Es ist kaum nöthig, zu bemerken, dass hier nur beispielsweise die parabolische Form für die Zwischenträger angenommen worden ist, und dass dieselben ebensowohl als Fachwerkträger mit parallelen Gurtungen, oder — wenn wegen Kleinheit derselben die dreieckigen leeren Felder mit überschüssigem Material ausgefüllt werden — als Blechträger construirt werden können. In letzterem Falle nehmen dieselben die Form von Verstärkungsrippen an, welche die horizontalen Fahrbahnbalken vor Durchbiegung zu schützen haben, und ergiebt sich für diesen Fall hinsichtlich der vortheilhaftesten Lage solcher Verstärkungsrippen die beachtenswerthe Regel: dass bei obenliegender Fahrbahn wo wöglich die Rippe oberhalb, bei untenliegender Fahrbahn dagegen unterhalb des Fahrbahnbalkens anzubringen ist.

Bei Fachwerkträgern mit gekreuzten Diagonalen würde man eine erste Reihe von Zwischenpunkten auch dadurch gewinnen können, dass man die Kreuzungspunkte der Diagonalen mit als

Belastungspunkte benutzt, indem man auf jeden dieser Kreuzungspunkte eine Verticalstange setzt, welche dem oberhalb derselben liegenden Theile der Belastung als Stütze dient. (Für den Fall, dass die Angriffspunkte der Belastungen unten liegen sollen, würde man der ganzen Construction nur die umgekehrte Lage zu geben brauchen.)

Durch Einschaltung eines Systems dreieckiger Zwischenträger kann man dann abermals die Zahl der Belastungspunkte verdoppeln oder verdreifachen, und — falls eine noch grössere Zahl von Belastungspunkten gefordert werden sollte — dieses Verfahren beliebig wiederholen, gerade so wie oben in Bezug auf die dreieckigen Dach-Constructionen erklärt wurde. Auf solche Weise gelangt man von der Grundform Fig. **383** mittelst der Uebergangsform Fig. **384** zu den in Fig. **385** und Fig. **386** dargestellten Brücken-Constructionen.

Fig. 383.

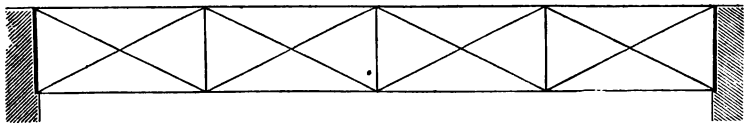


Fig. 384.

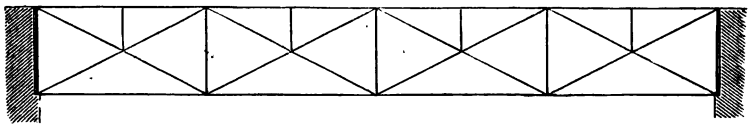


Fig. 385.

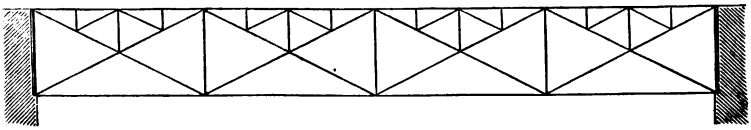
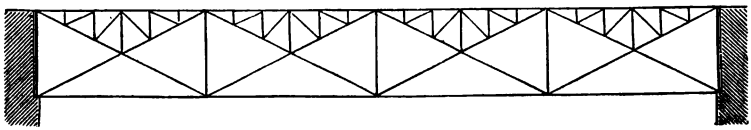


Fig. 386.



Was die Berechnung der Spannungszahlen derartiger Brücken-Constructionen betrifft, so würde man die Berechnung der Uebergangsform Fig. **384** direct nach der Methode der statischen

Momente ausführen können, indem man bei der Berechnung der Spannungen in den horizontalen Stangen die Kreuzungspunkte der Diagonalen als Drehpunkte für die Momenten-Gleichungen wählt, und bei der Berechnung der Diagonalen berücksichtigt, dass die in irgend einem Verticalschnitte thätige Verticalkraft halb genommen die verticale Seitenkraft einer jeden von den beiden Diagonalen-Spannungen bildet.

Bei der Berechnung von Fig. **385** würde man sich zu erinnern haben, dass es rücksichtlich der am Schlusse des § 12 besprochenen resp. vertheidigten Voraussetzungen einen Unterschied macht, ob man diese Construction als einen Träger mit 17 Belastungspunkten behandeln will — wie er es in Wirklichkeit ist — oder als einen Träger mit 9 Belastungspunkten — indem man nämlich das eingeschaltete Zwischenträger-System zu der von der Haupt-Construction zu tragenden Belastung mit hinzu rechnet.

Da nämlich bei allmählichem Fortrücken der mobilen Last der bei allen früheren Berechnungen stets angenommene Fall: dass der am Vorderende der belasteten Strecke befindliche Belastungspunkt schon seine volle Belastung trägt, während der nächstfolgende noch ganz ohne Belastung ist, in Wirklichkeit gar nicht eintreten kann — wie in § 12 bereits erklärt wurde — so muss, wenn man nichtsdestoweniger diese ungenaue Voraussetzung machen will, die daraus hervorgehende Ungenauigkeit des Resultates eine um so grössere werden, je kleiner die Anzahl der Belastungspunkte ist. Man wird daher verschiedene Spannungszahlen für Fig. **385** erhalten, jenachdem man 17 oder 9 Belastungspunkte annimmt und zwar die genaueren bei der Annahme von 17 Belastungspunkten. In diesem letzteren Falle hat man zu berücksichtigen: dass, wenn das Vorderende der belasteten Strecke mit der Mitte eines Zwischenträgers zusammenfällt, der nächstfolgende Belastungspunkt der Haupt-Construction bereits einen Theil seiner Belastung zu tragen hat, insofern derselbe jenem Zwischenträger als Stützpunkt dient; dass dagegen, wenn das Vorderende der belasteten Strecke mit dem Endpunkte eines Zwischenträgers zusammenfällt, dieser Punkt als Belastungspunkt der Haupt-Construction noch nicht seine volle Belastung trägt, insofern derselbe zugleich für den nächstfolgenden noch unbelasteten Zwischenträger einen Stützpunkt bildet.

Wenn man zur Vergleichung mit dem in § 10 berechneten Fachwerkträger die Dimensionen und Belastungen eben so gross

wie dort annimmt, nämlich: Höhe = 2^m, Länge = 16^m, Totalbelastung des ganzen Trägers = 48000 Kil., permanente Last = 8000, mobile Last = 40000 Kil., so erhält man für Fig. **384** und Fig. **385** resp. die in Fig. **387** und Fig. **388** zusammengestellten Spannungszahlen.

Fig. 387.

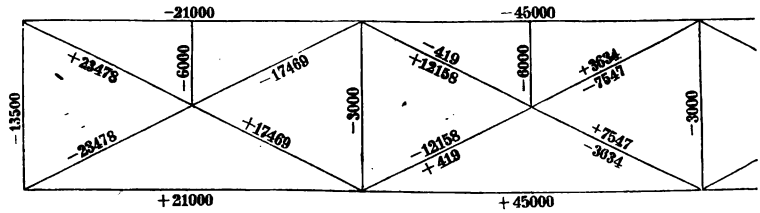
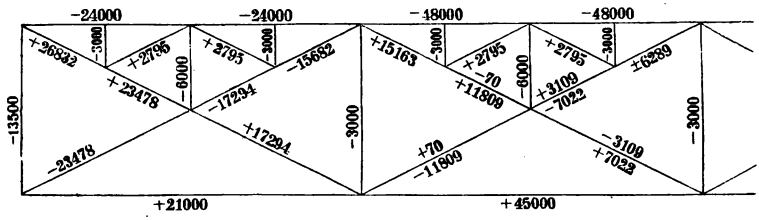


Fig. 388.



Eine Vergleichung der letzteren Figuren mit denen des § 14 zeigt, dass man bei einem solchen einfachen aus nur wenigen Stangen zusammengesetzten Fachwerkträger wie Fig. **383** auf zwei verschiedene Arten die Zahl der Belastungspunkte vergrössern kann. Die eine Methode besteht, wie in § 14 erklärt wurde, darin, dass man das **einfache** aus Diagonalen und Verticalstangen bestehende Absteifungssystem durch ein **mehrfaches** Gittersystem ersetzt; die andere Methode ist die hier erklärte mittelst Einschaltung von Zwischenträgern. Offenbar würde die erstere Methode die vortheilhaftere sein, wenn gleich grosse Zug- und Druckspannungen stets gleich grosse Querschnitte erforderten. Denn in diesem Falle würde man durch Anwendung des Princips der mehrfachen Gittersysteme ohne neuen Materialaufwand die Zahl der Belastungspunkte bis ins Unbestimmte vergrössern können, während bei der anderen Methode die Einschaltung jedes neuen Zwischenträger-Systems stets neuen Materialaufwand bedingt.

Indessen wird dieser scheinbare Vorzug der Gitterträger durch den Nachtheil wieder aufgewogen, dass in der Gitterwand die gedrückten Stäbe bei ihrer mehrfachen Zersplitterung und verhältnissmässig grossen Länge bei weitem ungünstiger situirt sind hinsichtlich ihres Widerstandes gegen Zerknicken und deshalb verhältnissmässig viel grössere Querschnitte erfordern als die gedrückten Stangen bei dem einfachen, in nur wenige Felder eingetheilten Fachwerkträger — wie später in der „Theorie des Widerstandes gegen Zerknicken" noch ausführlicher begründet werden wird.

Die Vorzüge und Nachtheile beider Constructionsweisen müssen in jedem einzelnen Falle gegen einander abgewogen werden, und lässt sich über die Frage: welche von beiden die bessere ist, kein allgemein entscheidendes Urtheil abgeben.

Dreizehnter Abschnitt.

§ 44
Durchbiegung belasteter Träger.

Die Längenänderung einer Stange ist ihrer Spannung proportional.

Wenn man mit $\frac{1}{E}$ das Verhältniss bezeichnet, in welchem eine Stange von $1\square^{mm}$ Querschnitt bei einer Spannung von 1 Kil. sich verlängert, so erhält man das Verlängerungs-Verhältniss, welches dieselbe Stange bei einer Spannung von S Kil. annimmt, aus der Gleichung:

$$\text{I.} \quad \delta = \frac{S}{E}.$$

Die Zahl E wird Elasticitätsmodulus genannt und ist beispielsweise für Schmiedeisen gleich 20000 zu setzen. Eine schmiedeiserne Stange von beliebiger Länge und von beliebigem Querschnitt verlängert sich also um $\frac{1}{20000}$ ihrer ursprünglichen Länge, wenn ihr eine Zugspannung von 1 Kil. pro Quadratmillimeter der

Querschnittsfläche ertheilt wird. Wenn dieselbe Stange statt dessen eine Spannung von 6 Kil. pro Quadratmillimeter erhält, so verlängert sie sich in dem Verhältniss:

$$\delta = \frac{6}{20000}$$

also um etwa $\frac{1}{3333}$ ihre ursprünglichen Länge.

Die Längenänderung selbst erhält man, indem man dieses Verlängerungs-Verhältniss mit der ursprünglichen Länge l der Stange multiplicirt, also aus der Gleichung:

$$\text{II.} \quad \lambda = l \,.\, \delta.$$

Eine schmiedeiserne Stange von 10^m Länge verlängert sich also bei einer Spannung von 6 Kil. pro Quadratmillimeter um die Grösse:

$$\lambda = 10000 \,.\, \frac{6}{20000} = 3^{mm}.$$

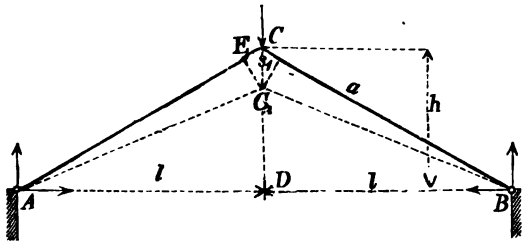
Negative Spannungen erzeugen negative Verlängerungen, d. h. Verkürzungen von demselben Verhältniss. Es gelten deshalb die beiden Gleichungen I. und II. sowohl für Druckspannungen als für Zugspannungen.

Wenn man bei einem belasteten Träger die Spannung jedes Constructionstheils kennt, so ist hiernach die Bestimmung seiner Formänderung — also auch seiner Durchbiegung — eine rein geometrische Aufgabe, die auch auf empirischem Wege, durch Construction, gelöst werden kann, indem man sich die ganze Stangenverbindung aus einander genommen denkt und von irgend einem Knotenpunkte ausgehend die einzelnen Stangenlinien mit ihren neuen Längen wieder an einander setzt in derselben Reihenfolge, wie sie früher verbunden waren.

In einzelnen Fällen, namentlich bei Combinationen mehrerer Constructions-Systeme, ist es von Interesse, die Durchbiegung eines Trägers bei gegebener Belastung zu kennen, um danach die Vertheilung der Belastungen und der Spannungen auf die einzelnen Systeme beurtheilen zu können. Es soll deshalb hier an einigen einfachen Beispielen gezeigt werden, wie man die durch obige Sätze in eine rein geometrische verwandelte Aufgabe lösen kann. In Bezug auf alle nachfolgenden Beispiele soll vorausgesetzt werden, dass die Stärke jedes Constructionstheils seiner Spannung proportional gewählt ist, dass also die Verlängerungs- und Verkürzungs-Verhältnisse sämmtlicher Constructionstheile dieselbe absolute Grösse (δ) haben.

Wenn in Fig. **389** durch Belastung des Punktes C jede der beiden Stangen um die Grössen $a\delta$ verkürzt wird, so rückt der Punkt C nach einer Stelle C_1, welche den Durchschnittspunkt der beiden von A und B aus mit der Länge $a - a\delta$ beschriebenen Kreisbogen bildet. Letztere können (wegen sehr geringer Grösse der Verkürzungen) als gerade Linien angesehen werden, die rechtwinkelig zu den Linien $A\,C$ und $B\,C$ gerichtet sind.

Fig. 389.



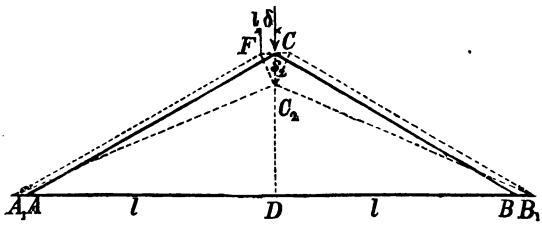
Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CEC_1 und CDA ergiebt sich die Gleichung:

$$\frac{\overline{CC_1}}{\overline{CE}} = \frac{s_1}{a\delta} = \frac{a}{h}, \text{ oder:}$$

$$1) \quad s_1 = \delta \frac{a^2}{h}.$$

Wenn die Auflager durch eine die Endpunkte A und B verbindende Zugstange vom Horizontalschube befreit sind, so entsteht durch die Verlängerung dieser Stange und das Ausweichen jedes der Punkte A und B um die Strecke $l\delta$ eine weitere Senkung s_2, die man für sich allein bestimmen kann, indem man zunächst die vorhin bestimmte Senkung als nicht vorhanden, also die Länge a als unverändert annimmt, und den Durchschnittspunkt C_2 der beiden von A_1 und B_1 aus mit der Länge a beschriebenen Bogen bestimmt (s. Fig. **390**). Aus der Aehnlichkeit der Dreiecke CFC_2 und CDA ergiebt sich die Gleichung:

Fig. 390.



$$\frac{\overline{CC_2}}{\overline{CF}} = \frac{s_2}{l\delta} = \frac{l}{h}, \text{ oder:}$$

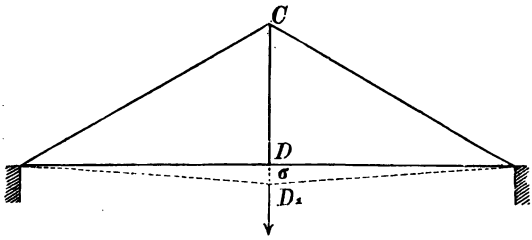
$$2) \quad s_2 = \delta \frac{l^2}{h}.$$

Die **ganze** Senkung des Punktes C ist in diesem Falle gleich der Summe der beiden eben gefundenen Senkungen, also:

3) $s = s_1 + s_2 = \delta\left(\frac{a^2 + l^2}{h}\right)$.

Wenn die Belastung nicht direct an dem Punkte C, sondern an dem Punkte D aufgehängt ist und mittelst der Hängestange CD auf dem Punkt C übertragen wird, so erhält man die totale Senkung s' des Punktes D, wenn man zu der vorher gefundenen Senkung noch die Verlängerung $\sigma = h\delta$ dieser Hängestange hinzurechnet (s. Fig. **391**), also:

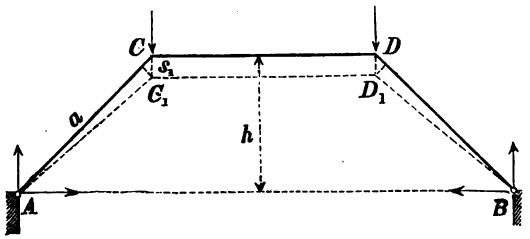
Fig. 391.



4) $s' = s_1 + s_2 + \sigma = \delta\left(\frac{a^2 + l^2}{h} + h\right) = 2\delta\frac{a^2}{h}$.

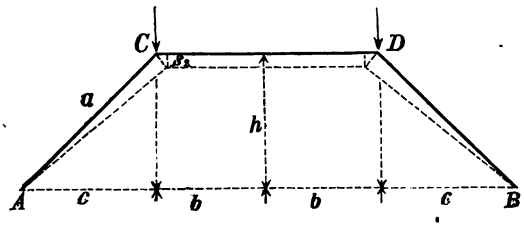
Dieselben hier gefundenen Gleichungen gelten auch für umgekehrte Lage der Construction.

Fig. 392.



Auf ähnliche Weise können bei der in Fig. **392** dargestellten Construction die Senkungen der Punkte C und D bestimmt werden, indem man ein Mal die aus den Längenänderungen der Stangen AC und BD hervorgehende Senkung:

Fig. 393.



$$s_1 = \delta\frac{a^2}{h},$$

ein anderes Mal die aus der Verkürzung der Stange CD hervorgehende Senkung:

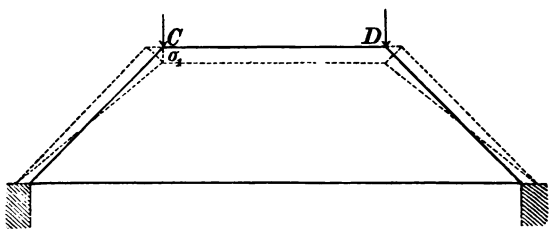
$$s_2 = \delta \cdot \frac{bc}{h}$$

für sich allein bestimmt (s. Fig. **393**) und beide Senkungen dann zusammen addirt:

$$5)\quad s = s_1 + s_2 = \delta\left(\frac{a^2 + bc}{h}\right).$$

Wenn die Punkte A und B durch eine Zugstange verbunden sind (s. Fig. **394**), so kommt zu der vorigen noch die aus der Verlängerung dieser letzteren hervorgehende Senkung:

Fig. 394.



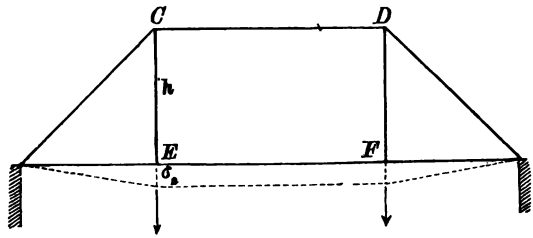
$$\sigma_1 = \delta\,\frac{(b+c)c}{h}$$

hinzu, und man erhält als totale Senkung der Punkte C und D:

$$6)\quad s = s_1 + s_2 + \sigma_1 = \delta\left(\frac{a^2 + bc + (b+c)c}{h}\right).$$

Wenn endlich die Lasten unten hängen und mittelst Hängestangen auf die Punkte C und D übertragen werden (s. Fig. **395**), so kommt für die Punkte E und F noch die aus der Verlängerung:

Fig. 395.



$$\sigma_2 = h\,\delta$$

entstehende Senkung zu der vorigen hinzu, und beträgt also deren Total-Senkung:

$$7)\quad s = s_1 + s_2 + \sigma_1 + \sigma_2 = \frac{\delta}{h}\,[a^2 + bc + (b+c)c + h^2]$$
$$= 2\,\frac{\delta}{h}\,(a^2 + bc).$$

§ 45.

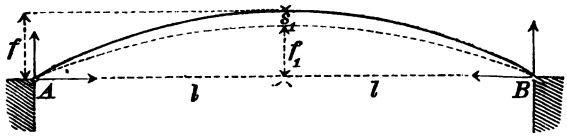
Senkung des Scheitels bei parabolischen Trägern.

Auf ähnliche Weise wie im vorigen Paragraphen in Bezug auf eine aus zwei und aus drei Stangen zusammengesetzte Kette gezeigt wurde, kann man auch bei einer aus mehr als drei Stangen zusammengesetzten Kette die Senkung der Belastungspunkte bestimmen.

Wenn bei immer wachsender Zahl der Belastungspunkte die polygonale Stangenverbindung in eine stetig gekrümmte parabolische Kette übergeht, so wird bei Verkürzung derselben die Pfeilhöhe f in die Pfeilhöhe f_1 übergehen, und als Senkung des Scheitels ergiebt sich dann (s. Fig. **396**):

$$8) \quad s_1 = f - f_1.$$

Fig. 396.



Wenn das Verhältniss $\frac{f}{2l}$ der Pfeilhöhe zur Spannweite klein ist, so gilt für die Bogenlänge der unverkürzten Parabel annähernd die Gleichung:

$$B = 2l\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right) *)$$

folglich für die Bogenlänge der im Verhältniss δ verkürzten Parabel:

$$B(1-\delta) = 2l\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{f_1^2}{l^2}\right)$$

oder, wenn man hierin für B seinen Werth substituirt:

$$2l\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right)(1-\delta) = 2l\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{f_1^2}{l_2}\right)$$

die Auflösung dieser Gleichung für f_1 ergiebt:

$$f_1 = f\sqrt{1 - \delta\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{l^2}{f^2}\right)}$$

---

*) Aus der Gleichung der Parabel $\frac{y}{f} = \frac{x^2}{l^2}$ ergiebt sich $\frac{dy}{dx} = 2f\frac{x}{l^2}$. Das Differenzial des Bogens ist:

$$dB = dx\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = dx\sqrt{1 + \frac{4f^2x^2}{l^4}}$$

$$= dx\left(1 + \frac{2f^2x^2}{l^4} - \frac{2f^4x^4}{l^8} \ldots\right)$$

oder, wenn man nur die ersten beiden Glieder der eingeklammerten Reihe beibehält, annähernd:

$$dB = dx\left(1 + \frac{2f^2}{l^4}x^2\right).$$

Hieraus erhält man durch Integration:

$$B = \int_{-l}^{+l} dx\left(1 + \frac{2f^2}{l^4}x^2\right) = 2l\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right).$$

wofür man — da δ eine sehr kleine Grösse ist, und trotz des angenommenen grossen Werthes von $\frac{l}{f}$ das zweite Glied unter dem Wurzelzeichen als verhältnissmässig klein angesehen werden darf, annähernd auch setzen kann:

$$f_1 = f\left[1 - \frac{\delta}{2}\left(1 + \tfrac{3}{2}\frac{l^2}{f^2}\right)\right].$$

Die Substitution dieses Werthes in Gleichung 8) ergiebt für s_1 den Werth:

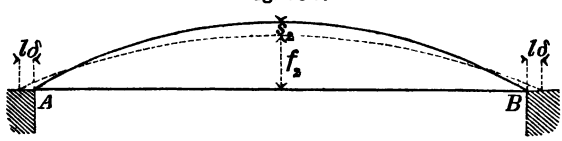
$$9)\quad s_1 = \frac{f\delta}{2}\left(1 + \tfrac{3}{2}\frac{l^2}{f^2}\right) = \tfrac{3}{4}\frac{\delta l^2}{f}\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right).$$

Setzt man hierin $l = 20000^{mm}$, $f = 5000^{mm}$, $\delta = \frac{6}{2000}$, so erhält man $s_1 = 18\,(1 + \frac{1}{24}) = 18^{mm},75$ als Senkung des Scheitelpunktes der in § 22 berechneten Bogenbrücke unter Voraussetzung einer Belastung, welche in dem (schmiedeisernen) Bogen eine Spannung von 6 Kil. pro □mm des Querschnitts hervorbringt.

(Dieselbe Gleichung gilt auch für die Senkung des Scheitelpunktes einer **hängenden** parabolischen Kette, wenn unter δ das **Verlängerungs**verhältniss derselben verstanden wird.)

Wenn die Punkte A und B durch eine Zugstange verbunden sind, die Auflagerpunkte also nur verticale Gegendrücke leisten, so entsteht durch Verlängerung dieser Zugstange eine fernere Senkung des Scheitels s_2, welche wie bei den vorigen Fällen gefunden wird, indem man untersucht: welche Aenderung die Pfeilhöhe erleiden würde, wenn bei unverändert bleibender Bogenlänge die Spannweite der Parabel um die Grösse $2l\delta$ sich verlängerte (s. Fig. **397**).

Fig. 397.



Um die neue Pfeilhöhe f_2 zu erhalten, setzt man die Bogenlänge der ursprünglichen Parabel gleich der Bogenlänge derjenigen Parabel, welche f_2 als Pfeilhöhe und $2l\,(1 + \delta)$ als Spannweite hat:

$$2l\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right) = 2l\,(1 + \delta)\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{f_2{}^2}{l^2\,(1+\delta)^2}\right).$$

Die Auflösung dieser Gleichung ergiebt für f_2 annähernd den Werth:

$$f_2 = f\left[1 + \frac{\delta}{2}\left(1 - \tfrac{3}{2}\frac{l^2}{f^2}\right)\right].$$

Die Aenderung der Pfeilhöhe oder die Senkung des Scheitels ist demnach:

$$10)\quad s_2 = f - f_2 = \frac{f\delta}{2}\left(\tfrac{3}{2}\frac{l^2}{f^2} - 1\right) = \tfrac{3}{4}\frac{\delta l^2}{f}\left(1 - \tfrac{2}{3}\frac{f^2}{l^2}\right).$$

Die totale Senkung des Scheitels ist gleich der Summe der beiden einzeln gefundenen Senkungen, also:

$$11)\quad s = s_1 + s_2 = \tfrac{3}{2}\,\delta\,\frac{l^2}{f}.$$

Wenn die Fahrbahn mittelst Hängestangen an dem Bogen aufgehängt ist, so entsteht durch Verlängerung dieser Hängestangen noch eine weitere Senkung der Belastungspunkte, welche für die Mitte gleich δf sein würde.

Da indessen die obigen Resultate aus der Annahme eines geringen Pfeilhöhenverhältnisses hervorgingen, so kann diese letztere Grösse als vergleichsweise klein vernachlässigt werden, zumal da bei wirklichen Brücken die Verticalstangen nur bei einseitiger, nicht aber bei voller Belastung ihre vollen Spannungen und Verlängerungen erhalten.

Die oben gefundene Gleichung 11) gilt auch für einen parabolischen Träger in der umgekehrten Lage.

Man erhält z. B. für den im zweiten Abschnitt berechneten parabolischen Träger von 16^m Spannweite und 2^m Pfeilhöhe, wenn man $\delta = \frac{6}{20000}$ setzt, als Senkung des Scheitels:

$$s = \frac{3}{2}\cdot\frac{6}{20000}\cdot\frac{8000^2}{2000} = 14^{mm},4.$$

§ 46.

Durchbiegung der Fachwerk- und Gitter-Brücken.

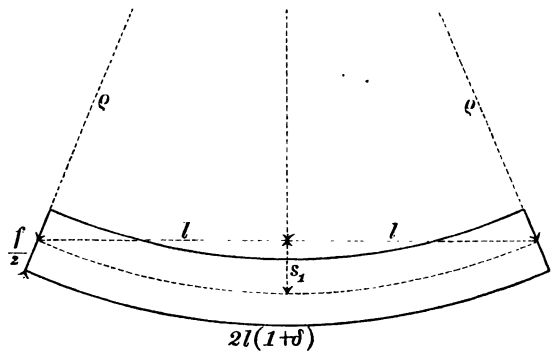
Bei Fachwerkträgern mit parallelen Gurtungen setzt sich die ganze Durchbiegung s (in der Mitte) ebenfalls aus zwei Theilen zusammen, von denen der erstere s_1 allein durch die Längen-Aenderungen der Gurtungen, der andere s_2 allein durch die Längen-Aenderungen der Diagonalen und Verticalständer hervorgebracht wird.

Um den ersteren Theil s_1 zu bestimmen, nimmt man die Mittellinie des Trägers als nach einem Kreisbogen vom Halbmesser ρ gekrümmt an und setzt nach der Gleichung des Kreises,

indem man die Differenz zwischen Bogen- und Sehnen-Länge vernachlässigt (s. Fig. **398**):

$$l^2 = 2\rho s_1 - s_1^2$$

Fig. 398.



oder, da s_1^2 als sehr klein gegen $2\rho s_1$ vernachlässigt werden darf:

12) $$s_1 = \frac{l^2}{2\rho}.$$

Es ergiebt sich ferner, da die Längen des äusseren und mittleren Bogens sich verhalten wie ihre Halbmesser, die Proportion:

$$\frac{\rho + \frac{f}{2}}{\rho} = \frac{2l(1+\delta)}{2l}$$

und hieraus für ρ der Werth:

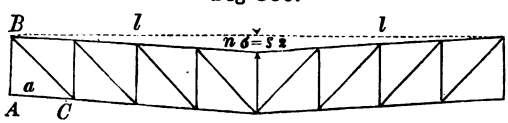
13) $$\rho = \frac{f}{2\delta},$$

dessen Substitution zu folgender Gleichung für s_1 führt:

14) $$s_1 = \frac{l^2\delta}{f}.$$

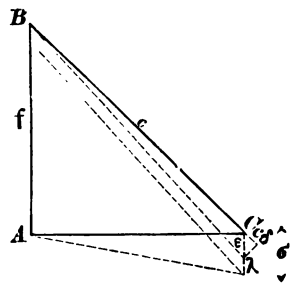
Um die Senkung s_2 zu bestimmen, betrachtet man die Längen der Gurtungen als unveränderlich und untersucht, welche Formänderung jedem der aus Verticalständer, Diagonale und Horizontalstange gebildeten rechtwinkeligen Dreiecke durch Verlängerung der Diagonale und Verkürzung des Verticalständers ertheilt wird (s. Fig. **399**). Diese Formänderung besteht z. B. für das Dreieck ABC darin, dass der Punkt C sich senkt um eine Grösse σ, welche aus folgenden zwei Theilen sich zusammensetzt: der erste Theil ε

Fig. 399.



entsteht durch Verlängerung der Diagonale um die Grösse $c\delta$ und lässt sich aus der Proportion bestimmen (s. Fig. **400**):

Fig. 400.



$$\frac{\varepsilon}{c\,.\,\delta} = \frac{c}{f};$$

der zweite Theil λ entsteht durch Verkürzung des Verticalständers um die Grösse $f\,.\,\delta$ und ist dieser gleich. Die Vereinigung beider Werthe ergiebt für σ die Gleichung:

$$\sigma = \varepsilon + \lambda = \delta f\left(\frac{c^2}{f^2} + 1\right),$$

wofür man, da $c^2 = f^2 + a^2$ ist, auch setzen kann:

$$\sigma = \delta\,.\,a\,.\,\frac{f}{a}\left(\frac{a^2}{f^2} + 2\right).$$

Wenn n die Zahl der Felder zwischen Auflager und Mitte ist, so beträgt die Senkung s_2 das n-fache von σ; man erhält also für s_2 die Gleichung:

$$s_2 = n\,.\,\sigma = na\,.\,\delta\,.\,\frac{f}{a}\left(\frac{a^2}{f^2} + 2\right)$$

oder, da $na = l$ ist:

$$15)\quad s_2 = l\delta\,.\,\frac{f}{a}\left(\frac{a^2}{f^2} + 2\right).$$

Die Vereinigung der beiden in 14) und 15) gefundenen Werthe ergiebt als totale Durchbiegung eines Trägers von der in Fig. **399** dargestellten Form:

$$16)\quad s = l\delta\left[\frac{l}{f} + \frac{f}{a}\left(\frac{a^2}{f^2} + 2\right)\right].$$

Wenn die Felder quadratische Form haben, wird $\frac{f}{a} = 1$ und:

$$s = l\delta\left(\frac{l}{f} + 3\right).$$

Wenn zugleich die halbe Felderzahl oder $\frac{l}{f} = 4$ ist, so wird:

$$s = 7\,l\delta.$$

Nach dieser letzteren Formel erhält man z. B. für den im dritten Abschnitt berechneten Träger von 16^m Spannweite unter der Voraussetzung, dass für alle Theile $\delta = \frac{6}{20000}$ zu setzen ist, als Durchbiegung bei voller Belastung:

$$s = 7\,.\,8000\,.\,\tfrac{6}{20000} = 16^{mm},8.$$

Nimmt man den Fall an: dass die Verticalständer und Diagonalen sehr stark construirt, also ihre Längenänderungen als

vergleichsweise klein gegen die Längenänderungen der Gurtungen zu betrachten seien, so darf man für diesen Fall die Senkung s_2 vernachlässigen und die totale Durchbiegung unmittelbar aus Gleichung 12) bestimmen nach Fig. **398**, indem man annimmt, dass die Biegungscurve ein Kreisbogen ist, welcher wegen Kleinheit der Pfeilhöhe auch als Parabel angesehen werden darf. Annähernd tritt dieser Fall ein, wenn statt des Gittersystems eine massive Wand von überflüssiger Stärke die beiden Gurtungen verbindet, und darf man daher für einen solchen massiven Träger die aus Gleichung 14) sich ergebende Grösse als Näherungswerth für die Grösse der totalen Durchbiegung betrachten.

Setzt man in jene Gleichung für δ den der Elasticitätsgrenze entsprechenden Werth (aus Gleichung I.), so enthält sie zugleich das allgemeine Gesetz der Biegsamkeit massiver Träger von constanter Höhe und symmetrischer Querschnittsform; denn grösser kann die Durchbiegung in der Mitte niemals werden, als wenn die Krümmung an allen Stellen ein Maximum, die Krümmungslinie also ein Kreisbogen wird. Eine solche Krümmung tritt wirklich ein, sobald die biegenden Kräfte an allen Stellen den Querschnittsstärken, oder umgekehrt die Querschnitte überall den biegenden Kräften in der Weise angepasst sind, dass die Spannungen in allen Querschnitten das gleiche Maximum erreicht.

Vierzehnter Abschnitt.

§ 47.

Theorie der zusammengesetzten Systeme.

Die im vorigen Abschnitte gefundenen Gleichungen für die Durchbiegungen kann man nunmehr zur Beantwortung der folgenden zwei Fragen benutzen: erstens, wie bei Combination zweier verschiedener Träger-Systeme zu einer zusammengesetzten Construction die beiden einfachen Systeme einander angepasst werden müssen, wenn ein harmonisches Zusammenwirken derselben stattfinden soll; zweitens, wie bei einer solchen zusammengesetzten Construction die Belastung auf die beiden einzelnen Systeme sich vertheilt.

Wenn die gemeinschaftlichen Belastungspunkte zweier mit einander verbundener einfachen Systeme in Folge zunehmender Belastung allmählich sich senken, so wachsen gleichzeitig in jedem der beiden Systeme die Spannungen und Längenänderungen der einzelnen Constructionstheile. Sobald bei diesem Wachsen in **einem** der beiden Systeme die Elasticitätsgrenze erreicht ist, hört die fernere Tragfähigkeit des Ganzen sofort auf — ganz einerlei, wie weit in dem anderen Systeme die Spannungen noch von der Elasticitätsgrenze entfernt sein mögen. Ohne die Tragfähigkeit des Ganzen irgend zu beeinträchtigen, könnte man also entweder dieses andere System aus schwächerem weniger elastischen Material construiren, welches die Elasticitätsgrenze bei geringerer Spannung schon erreicht, oder könnte man noch besser dadurch, dass man einen Theil des in diesem Systeme enthaltenen Materials ganz wegliesse und den Rest mit besserer Ausnutzung seiner Widerstandsfähigkeit verwendete, bewirken, dass nunmehr beide Systeme gleichzeitig die Elasticitätsgrenze erreichen. Alles in dieser Weise zu ersparende Material war vorher unnützer — und wegen seiner todten Last sogar schädlicher — Ballast für die Construction.

Für alle solchergestalt combinirte Systeme gilt demnach als oberste Constructions-Regel: **die einzelnen Träger-Systeme müssen gleiche Durchbiegungsfähigkeit besitzen.**

Man kann aber auch zweitens — mag diese Bedingung erfüllt sein oder nicht — mit Hülfe der im vorigen Abschnitt an mehreren Beispielen erläuterten Methode das Verhältniss bestimmen, nach welchem die ganze Belastung auf die beiden Systeme sich vertheilt. Dazu ist nur erforderlich, die Senkungen der Belastungspunkte für das eine und für das andere System einander gleich zu setzen. Man erhält damit eine Gleichung für das Verhältniss $\frac{\delta_1}{\delta_2}$ der Längenänderungen in beiden Constructionen, nach welcher sich das Verhältniss $\frac{Q_1}{Q_2}$ der entsprechenden Belastungen leicht bestimmen lässt.

Die Gleichung für die Senkung eines Belastungspunktes erscheint, wie die vorigen Untersuchungen zeigen, in der allgemeinen Form:

$$s = A\delta,$$

worin A eine von der Constructionsform und den Dimensionen des Trägers abhängige Constante bezeichnet, welche für die in

dem vorigen Abschnitt behandelten speciellen Fälle aus den Gleichungen 1) ... 16) zu entnehmen ist.

Die Gleichsetzung der Senkungen

$$A_1 \delta_1 = A_2 \delta_2$$

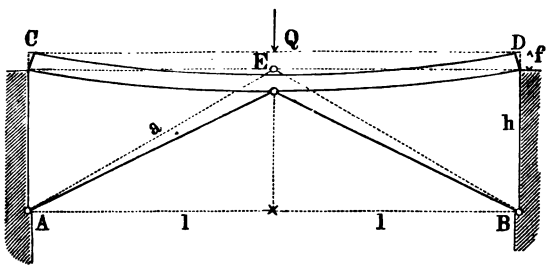
ergiebt also eine Gleichung von der Form

$$\text{III.} \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{A_2}{A_1}.$$

Wenn man dann nach der in der I. Abtheilung erklärten Momenten-Methode untersucht, welche Belastungen erforderlich sind, um solche Spannungen in den beiden Systemen zu erzeugen, bei welchen die Längenänderungen in dem einen System δ_1, in dem anderen δ_2 betragen, so kann man, da die totale Belastung als gegeben zu betrachten ist, hiernach die Vertheilung derselben auf die beiden Systeme bestimmen.

Wenn z. B. zwei aus gleichem Material construirte einfache Systeme — eines wie Fig. **389**, eines wie Fig. **398** construirt — zu einer zusammengesetzten Construction von der Form Fig. **401** verbunden sind, so ergiebt sich durch Gleichsetzung der Werthe von A_1 und A_2 resp. aus den Gleichungen 1) und 12) als Bedingung des harmonischen Zusammenwirkens die Gleichung:

Fig. 401.



$$\frac{a^2}{h} = \frac{l^2}{f}$$

oder für das vortheilhafteste Höhenverhältniss der beiden Constructionen der Werth:

$$17) \quad \frac{f}{h} = \frac{l^2}{a^2}.$$

Wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, und wenn ausserdem etwa die beiden Systeme aus verschiedenem Material construirt sind, so kann man aus der Gleichung III., welche für diesen Fall die Form annimmt:

$$18) \quad \frac{\delta_1 a^2}{h} = \frac{\delta_2 l^2}{f} \quad \text{oder} \quad \frac{\delta_1}{\delta_2} = \frac{\frac{l^2}{f}}{\frac{a^2}{h}}$$

das Verhältniss $\frac{Q_1}{Q_2}$, nach welchem die Belastung Q auf die beiden Systeme sich vertheilt, auf folgende Weise bestimmen.

Ein Gewicht Q_1 erzeugt in den beiden Stangen AE und BE, deren Querschnitte mit F_1 bezeichnet werden sollen, eine Spannung S_1 pro Flächeninhalt des Querschnitts:

$$S_1 = \frac{Q_1 a}{2F_1 h},$$

folglich ist die Längen-Aenderung dieser beiden Stangen:

$$19) \quad \delta_1 = \frac{S_1}{E_1} = \frac{Q_1 a}{2F_1 h E_1}.$$

Wenn ferner F_2 der Querschnitt jeder der beiden Gurtungen des Trägers CD an der Stelle E ist, so beträgt die durch ein Gewicht Q_2 hervorgebrachte Spannung S_2 in diesem Träger:

$$S_2 = \frac{Q_2 l}{2F_2 f},$$

folglich die Längenänderung δ_2 in diesem Systeme:

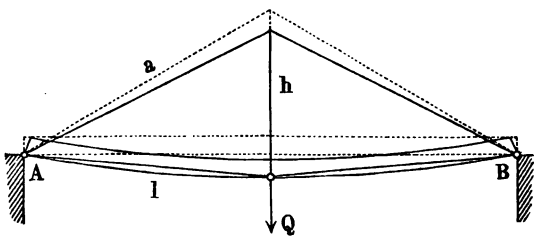
$$20) \quad \delta_2 = \frac{S_2}{E_2} = \frac{Q_2 l}{2F_2 f E_2}.$$

Die Substitution dieser beiden für δ_1 und δ_2 gefundenen Werthe in die Gleichung 18) führt zu der Gleichung:

$$21) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{l^3}{a^3} \cdot \frac{h^2}{f^2} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{E_1}{E_2},$$

aus welcher, da die Summe $Q_1 + Q_2 = Q$ als gegeben zu betrachten ist, ganz allgemein die Vertheilung der Last bestimmt werden kann. So z. B. ergiebt sich für eine Construction, welche überall aus gleichem Material und der in Gleichung 17) ausgedrückten Bedingung gemäss construirt ist, für die Lastvertheilung die Gleichung:

Fig. 402.



$$22) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{a}{l} \cdot \frac{F_1}{F_2}.$$

Für eine Construction von der Form Fig. **402**, welche aus den Figuren **391** und **398** zusammengesetzt ist, ergiebt sich in ähnlicher Weise durch Benutzung der

Gleichungen 4) und 14) als Constructionsregel für den Fall, dass beide aus gleichem Material bestehen:

$$23) \quad \frac{f}{h} = \frac{l^2}{2a^2}$$

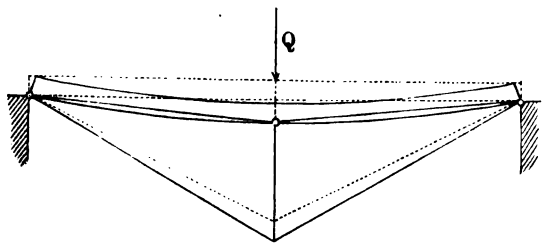
und als allgemeine Gleichung für die Lastvertheilung:

$$24) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{l^3}{a^3} \cdot \frac{h^2}{f^2} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{E_1}{E_2},$$

welche für den der Gleichung 23) entsprechenden speciellen Fall die einfachere Form annimmt:

$$25) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = 2 \cdot \frac{a}{l} \cdot \frac{F_1}{F_2} = \frac{h}{f} \cdot \frac{l}{a} \cdot \frac{F_1}{F_2}.$$

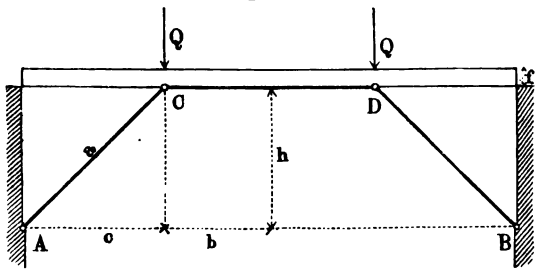
Fig. 403.



Die letzten drei Gleichungen gelten auch für die umgekehrte Lage der Construction (s. Fig. **403**).

Um die analogen drei Gleichungen für Fig. **404** abzuleiten, können die Gleichungen 5) und 14) in ähnlicher Weise benutzt werden; jedoch ist in letzterer Gleichung der für die Senkung in der Mitte gefundene Werth zuvor mit $1 - \frac{b^2}{l^2}$ zu multicipliren, da es sich hier um die Senkung der Punkte *C*, *D* handelt, und von der Mitte nach den Auflagern die Senkung dem Quadrate der Entfernung proportional abnimmt.

Fig. 404.



Hiernach erhält man für das zweckmässigste Höhen-Verhältniss (vorausgesetzt, dass Alles aus gleichem Material besteht) die Gleichung:

$$26) \quad \frac{f}{h} = \frac{l^2 - b^2}{a^2 + bc}$$

und als allgemeine Gleichung für die Lastvertheilung:

$$27) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{h^2}{f^2} \cdot \frac{(l^2 - b^2)\,c}{a(a^2 + b\,c)} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{E_1}{E_2},$$

welche letztere für den der Gleichung 26) entsprechenden speciellen Fall die einfachere Form annimmt:

$$28) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{c}{a} \cdot \frac{h}{f} \cdot \frac{F_1}{F_2}.$$

Ganz auf dieselbe Weise erhält man für Fig. **405** oder Fig. **406** mit Benutzung der Gleichungen 7) und 14) die analogen drei Gleichungen:

$$29) \quad \frac{f}{h} = \frac{l^2 - b^2}{2(a^2 + b\,c)}$$

$$30) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{h^2}{2f^2} \cdot \frac{(l^2 - b^2)\,c}{a\,(a^2 + b\,c)} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{E_1}{E_2}$$

$$31) \quad \frac{Q_1}{Q_2} = \frac{c}{a} \cdot \frac{h}{f} \cdot \frac{F_1}{F_2}.$$

Fig. 405.

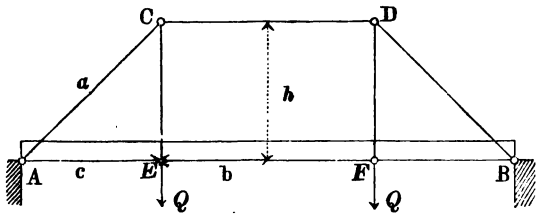
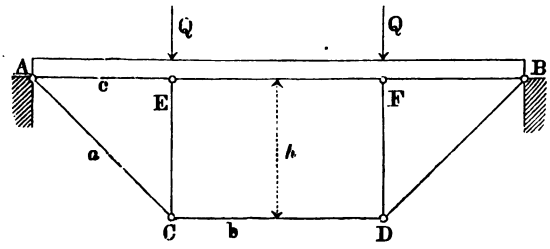


Fig. 406.

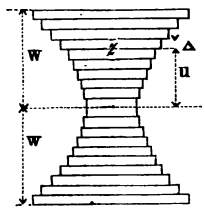


Bei allen diesen Fällen ist die Voraussetzung gemacht, dass in einer und derselben Construction überall das gleiche Längenänderungs-Verhältniss stattfindet, oder mit anderen Worten: dass in einem und demselben System die Stärke jedes einzelnen Constructionstheiles seiner Spannung proportional gewählt wurde.

Wenn mehrere einfache Träger von verschiedener Biegsamkeit zu einer zusammengesetzten Construction verbunden sind, so wird bei wachsender Belastung des Ganzen immer eine ungleichförmige Spannungsvertheilung in denselben stattfinden, und von den einfachen Systemen sind dann diejenigen, welche wegen grösserer Biegsamkeit später als die übrigen die Elasticitätsgrenze erreichen, allemal zu stark construirt, insofern, als sie aus schwächerem Material construirt sein könnten, ohne dass die Tragfähigkeit des Ganzen dadurch vermindert würde.

Derselbe Tadel also, welcher gegen ein solches nicht harmonisches Zusammenwirken der einzelnen Systeme bereits im Anfange dieses § ausgesprochen wurde, trifft auch den massiven Träger, da man einen solchen betrachten kann als eine Combination unendlich vieler Gitter- oder Blechträger von ungleicher Höhe (also auch ungleicher Biegsamkeit), in denen paarweise je zwei einander symmetrisch gegenüberliegende Schichten die Stelle der parallelen Gurtungen vertreten, und die zugehörigen Gitter- oder Blechwände allemal durch das Material der weiter innen liegenden Schichten vertreten sind (s. Fig. **407**).

Fig. 407.



Da nach Gleichung 14) bei gleicher Durchbiegung die Längenänderung der Gurtungen, folglich auch die Spannung derselben, proportional der Höhe des Trägers ist, so darf man annehmen, dass in einem solchen massiven Balken von symmetrischer Querschnittsform die Längenänderungen und Spannungen der einzelnen Schichten von der Mitte aus nach oben und unten proportional der Entfernung von der Mitte zunehmen, in der Weise, dass wenn die äusserste in der Entfernung w von der Mitte befindliche Schicht schon die Spannung S pro Flächeneinheit erreicht hat, eine andere in der Entfernung u liegende Schicht erst die Spannung:

$$s = \frac{u}{w} S$$

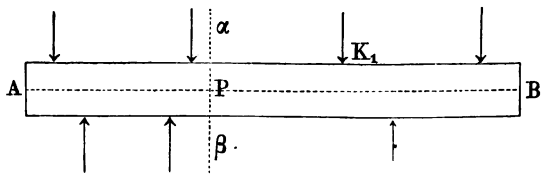
erlangt haben wird. Nach dieser Gleichung kann man, wenn die Spannung S in irgend einem Querschnitt bekannt ist, für jede andere Schicht die in derselben Querschnittsfläche stattfindende Spannung berechnen, und ist dabei für die gegenüberliegenden Schichten allemal das entgegengesetzte Vorzeichen zu nehmen. Die Gesammtspannung einer solchen Schicht beträgt dann, wenn mit Δ ihre Höhe und mit z ihre Breite bezeichnet wird:

$$\frac{u}{w} S \,.\, z \,.\, \Delta.$$

Wenn ein solcher massiver Balken durch Kräfte K_1, K_2 ..., welche rechtwinkelig zu seiner Achse gerichtet sind, in gebogenen Zustand versetzt ist, so kann man die von ihnen an irgend einer Querschnittsstelle P erzeugte Maximal-Spannung S mittelst der Methode der statischen Momente bestimmen, indem man sich an dieser Stelle einen Schnitt $\alpha\,\beta$ durch den Balken hindurchgelegt, die Wirkung der abgeschnittenen Schichten durch ihre Spannkräfte ersetzt denkt, und für das Stück $B\,\alpha\,\beta$ die Gleichung der statischen Momente

aufstellt (s. Fig. **408** und Fig. **409**). Damit keine Drehung um den Punkt P herum stattfinde, muss die algebraische Summe $\mathfrak{M}$ der statischen Momente aller äusseren auf das Stück $B\alpha\beta$ wirkenden Kräfte gleich sein der Momenten-Summe aller Spannungen, bezogen auf den Drehpunkt P.

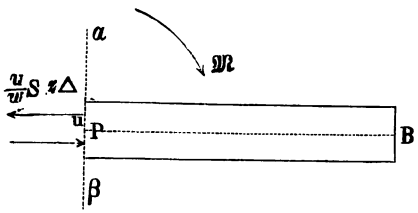
Fig. 408.



Man erhält also die Gleichung:

$$\mathfrak{M} = \Sigma\left(\frac{u}{w} S z \Delta u\right),$$

Fig. 409.



worin das Summations-Zeichen Σ andeutet, dass für alle einzelnen Schichten-Spannungen die Momente in gleicher Weise gebildet und alle diese Momente dann addirt werden sollen.

Da der Quotient $\frac{S}{w}$ ein gemeinschaftlicher Factor aller Glieder dieser Summe ist, so kann man der Gleichung auch die Form geben:

$$\mathfrak{M} = \frac{S}{w} \Sigma (z \Delta u^2),$$

worin der mit dem Summations-Zeichen versehene Ausdruck die Bedeutung einer nur von Grösse und Form der Querschnittsfläche abhängigen rein geometrischen Grösse hat. Bezeichnet man diese Grösse, welche das Trägheitsmoment des Querschnitts genannt wird, mit dem einfachen Buchstaben $\mathfrak{T}$, so nimmt die obige Gleichung die Form an:

$$\mathfrak{M} = \frac{S}{w} \mathfrak{T}$$

oder wenn man dieselbe für S auflöst:

$$S = \frac{w}{\mathfrak{T}} \mathfrak{M}.$$

Die Grösse $\mathfrak{T}$ des Trägheitsmoments ist für jede Querschnittsfläche besonders zu berechnen, indem man dieselbe in sehr viele kleine Theile zerlegt, jeden Flächentheil mit dem Quadrate seines Abstandes von der horizontalen Mittellinie des Querschnitts multiplicirt und die Producte zusammen addirt.

Wenn die Querschnitts-Dimensionen und die äusseren Kräfte gegeben sind, so kann man mittelst der obigen Gleichung die Maximalspannung in jedem Querschnitt bestimmen. *)

*) Die Fortsetzung der Biegungstheorie massiver Balken folgt im funfzehnten Abschnitte.

§ 48.

Fachwerkträger ohne Diagonalen.

In der „Theorie der parabolischen und sichelförmigen Träger" wurde bereits nachgewiesen, dass das Diagonalen-System eines solchen Trägers nur bei ungleichförmiger Belastung in Wirksamkeit tritt, dann aber auch einen nothwendigen Bestandtheil der Construction bildet, wenn dieselbe aus einzelnen durch Gelenkbolzen verbundenen Stangen zusammengesetzt ist, die nur Längsspannungen anzunehmen fähig sind. Wenn das Diagonalen-System fehlt, so muss, um das Zusammenfallen (oder die Verschiebung) der Stangenverbindung zu verhindern, wenigstens eine der beiden Ketten mit einer durchlaufenden steifen Stange vertauscht werden.

Eine solche Aenderung aber hat Aenderungen in der Spannungsvertheilung zur Folge, und darf alsdann der Träger — selbst für gleichförmig vertheilte Belastung, bei welcher die Steifigkeit jener Stange entbehrlich sein würde — nicht mehr als einfacher parabolischer Träger betrachtet werden; es ist vielmehr in diesem Falle der Träger als eine Combination zweier einfacher Träger-Systeme anzusehen, und die Vertheilung der Lasten auf diese beiden Systeme nach den im vorigen Abschnitte entwickelten Principien zu ermitteln.

Obwohl nun das Weglassen des Diagonalen-Systems als eine durchaus nicht zu empfehlende Abweichung von den Constructionsregeln bezeichnet werden muss, so soll — weil dergleichen theoretisch unvollkommene Constructionen trotzdem häufig vorkommen — der Einfluss dieser Abweichung an einigen einfachen Beispielen hier erläutert werden.

Fig. 410.

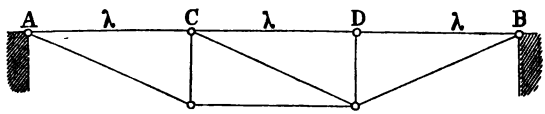
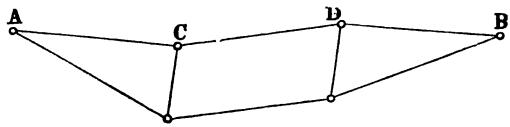


Fig. 411.



Ein regelrecht construirter parabolischer Träger von drei Feldern (s. Fig. 410) muss im Mittelfelde (wenigstens) eine Diagonale haben. Ohne diese Diagonale würde die in Fig. 411 angedeutete Verschiebung möglich sein. Diese Verschiebung kann — anstatt durch die Diagonale — auch da-

durch verhindert werden, dass die drei horizontalen Stangen AC, CD, DB durch einen durchlaufenden steifen Balken AB ersetzt werden, oder dadurch, dass ihnen ein solcher zur Seite gegeben wird (s. Fig. **412**). Damit hört aber der Träger auf, in die Kategorie der einfachen Systeme zu gehören, denn nun wird auch bei voller Belastung in jenem steifen Balken Biegungsspannung erzeugt, und ein Theil der Last von ihm getragen werden, der andere Theil also, welcher mittelst der Verticalständer auf die (aus den drei Stangen AE, EF, FB gebildete) Kette übertragen wird, um so kleiner ausfallen, je steifer der Balken AB construirt ist.

Wenn man unter solchen Umständen die in den einzelnen Stangen stattfindenden Spannungen berechnen will, so muss man sich die Construction aus den beiden einfachen Systemen Fig. **413** und Fig. **414** zusammengesetzt denken und nach der im vorigen

Fig. 412.

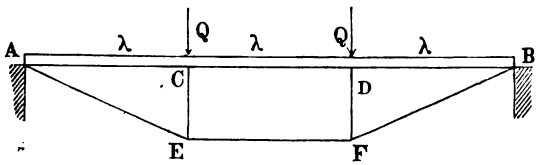


Fig. 413.

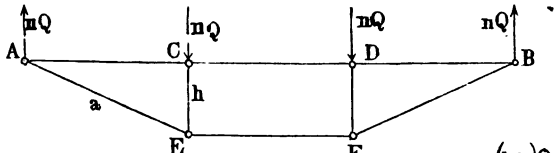
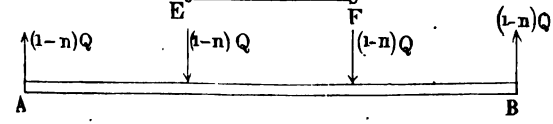


Fig. 414.



Paragraphen für diesen Fall abgeleiteten Gleichung das Verhältniss:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{nQ}{(1-n)Q}$$

der beiden Belastungstheile bestimmen, welche für das eine und für das andere der beiden Systeme in Rechnung zu bringen sind.

Sobald auf diese Weise die Zahl n bestimmt ist, lässt sich dann auch leicht für ungleichförmig vertheilte Belastung die Spannung in den einzelnen Stangen bestimmen, denn dieselbe Zahl n ist auch bei diesem Belastungszustande maassgebend für

die Lastvertheilung. Wenn z. B. allein der Punkt C mit dem Gewichte Q belastet ist (s. Fig. **415**), so zerlegt sich diese Belastung auf folgende Weise in zwei Theile: der eine Theil, bestehend aus den beiden Gewichten

$$\frac{n}{2}Q \quad \text{und} \quad \frac{n}{2}Q,$$

bildet die Belastung für das System Fig. **416**, der andere Theil, bestehend aus den beiden Gewichten

$$\left(1-\frac{n}{2}\right)Q \quad \text{und} \quad -\frac{n}{2}Q,$$

bildet die Belastung des Systems Fig. **417**.

Fig. 415.

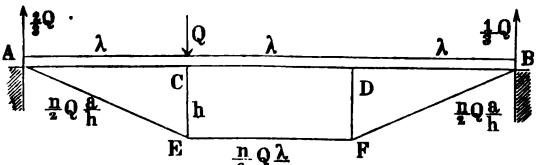


Fig. 416.

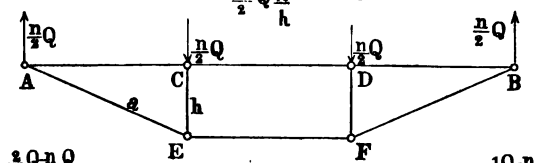
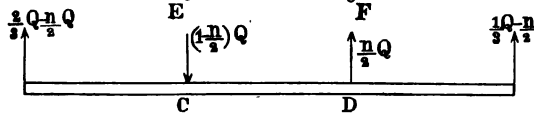


Fig. 417.



Dass eine solche Lastvertheilung wirklich stattfindet, davon überzeugt man sich leicht durch folgende Erwägung: Offenbar muss durch eine Belastung des Punktes D auf den Punkt C genau dieselbe Wirkung ausgeübt werden, wie sie eine Belastung des Punktes C auf den Punkt D hervorbringt (wegen Symmetrie der Construction). Da nun die Spannungen der beiden Verticalstangen stets einander gleich sind (wegen Gleichheit der Horizontalspannungen in AE und BF) und das Hinzufügen einer Last Q an der Stelle D (Fig. **415**) bewirkt, dass für jeden der beiden Lastpunkte in Fig. **416** die Belastung nQ beträgt, so muss nothwendig dieser Lasttheil halb so gross ausfallen, wenn nur einer der beiden Punkte C oder D in Fig. **415** — einerlei welcher — mit dem Gewichte Q belastet wird. Die Balastungen der beiden Punkte C, D in dem System Fig. **417** ergeben sich dann einfach durch

Subtraction der vorigen Lasttheile von den totalen Belastungen dieser Punkte.

Sobald man aber die äusseren Kräfte kennt, welche auf die Construction wirken, so lässt sich — worauf in § 24 schon hingewiesen wurde — mittelst der Momenten-Methode die Spannung jedes Constructionstheiles leicht bestimmen. Beispielsweise sind für die drei Stangen AE, EF, FB die bei einseitiger Belastung des Punktes C eintretenden Spannungen in Fig. **415** eingetragen. Diese Spannungen bleiben dieselben, wenn der Punkt D statt des Punktes C belastet wird, sie werden doppelt so gross, wenn beide zugleich belastet sind.

Die bei voller Belastung in diesen Stangen eintretenden Spannungen verhalten sich also zu denen, welche bei dem gewöhnlichen parabolischen Träger gleicher Form in diesen Stangen stattfinden würden, wie $n : 1$. Da nun die Zahl n wesentlich abhängt von dem Durchbiegungsverhältniss der beiden einfachen Systeme, also von der Steifigkeit des Balkens AB, und nur in dem Falle gleich Eins wird, wenn derselbe mit Gelenken versehen ist, so erkennt man leicht, dass der Fehler, den man begeht, wenn man die hier untersuchte Construction wie einen gewöhnlichen parabolischen Träger behandelt, um so grösser wird, je kleiner die Zahl n, oder je steifer der Balken AB, construirt ist.

Fig. 418.

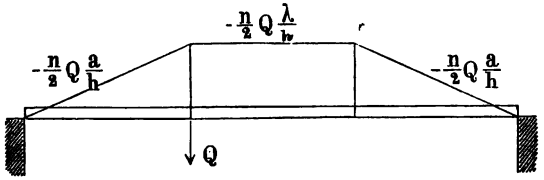
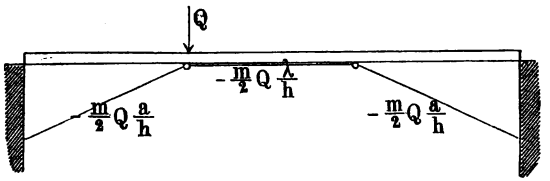


Fig. 419.



Es ist kaum nöthig zu bemerken, dass bei der umgekehrten Lage der vorigen Construction die Spannungen ganz in derselben Weise bestimmt werden können (s. Fig. **418**); ebenso auch für die in Fig. **419** dargestellte Construction, wenn man bei letzterer aus der Gleichung, die für diesen Fall im vorigen Paragraphen abgeleitet wurde, die Zahl m auf gleiche Weise berechnet wie die Zahl n beim vorhergehenden Falle.

§ 49.

Einfluss der Temperatur-Aenderungen.

Die in den vorigen Paragraphen in Bezug auf die combinirten Systeme gefundenen Resultate sind unmittelbar noch nicht für practische Anwendungen brauchbar, insofern als bei Ableitung derselben der Einfluss der Temperatur-Aenderungen unberücksichtigt geblieben ist. Sowohl bei der Berechnung der Vertheilung der Belastung auf die beiden einzelnen Systeme, als auch bei der Bestimmung des vortheilhaftesten Verhältnisses ihrer beiden Höhen, ist es nothwendig, auf die vorkommenden Temperatur-Schwankungen Rücksicht zu nehmen.

Der Wärme-Ausdehnungs-Coefficient für Schmiedeisen hat die Grösse:

$$32) \quad \alpha = 0{,}000\,012\,2,$$

d. h. bei einer Erwärmung um 1 Grad (Celsius) verlängert sich eine schmiedeiserne Stange um $\frac{122}{10\,000\,000}$ ihrer ursprünglichen Länge. Das Ausdehnungsverhältniss wächst proportional der Temperatur-Zunahme. Für das einer Temperatur-Zunahme von t Graden (Celsius) entsprechende Ausdehnungsverhältniss ergiebt sich hiernach der Werth:

$$33) \quad \Delta = \alpha \,.\, t.$$

Es würde also zum Beispiel bei einer Temperatur-Zunahme $t = 41$ Grad (C.) eine schmiedeiserne Stange sich verlängern um $41 \,.\, \frac{122}{10\,000\,000} = \frac{1}{2000}$ ihrer ursprünglichen Länge. In gleichem Verhältniss würde überhaupt jede Dimension eines schmiedeisernen Körpers sich vergrössern in der Weise: dass ein aus drei beliebigen Punkten des Körpers gebildetes Dreieck während der Ausdehnung stets seiner ursprünglichen Form ähnlich bleibt. Bei einer halb so grossen Temperatur-Zunahme $t = 20^0{,}5$ (C.) würde jede Dimension um $\frac{1}{4000}$ sich vergrössern; bei einer Temperatur-Abnahme von derselben Grösse um den gleichen Bruchtheil sich verkürzen.

Diese durch Temperatur-Aenderungen hervorgebrachten Form-Aenderungen der Körper geschehen unabhängig von den **elastischen** Form-Aenderungen. Es würde also bei gleichzeitigem Eintreten von Temperatur-Erhöhung und Zugspannung die Verlängerung der Stange gleich der Summe der beiden einzelnen Verlängerungen zu setzen sein. Da Temperatur-**Abnahmen** als negative Temperatur-**Zunahmen**, und **Dryck**-Spannungen als negative **Zug**-Spannungen auf-

gefasst werden können, so gilt der obige Satz nicht nur für **positive**, sondern auch für **negative** Verlängerungen. Es würde also die wirkliche Verlängerung der Stange gleich der **Differenz** der beiden absoluten Längen-Aenderungen sein, wenn Temperatur-**Erhöhung** mit **Druck**-Spannung, oder Temperatur-**Erniedrigung** mit **Zug**-Spannung zusammentrifft.

Bei der in Fig. **389** dargestellten Stangen-Verbindung würde (nach den Gleichungen 1 und 33) eine Temperatur-Zunahme von t Graden (C.) für sich allein die Wirkung haben, dass der Verbindungspunkt C um die Grösse:

$$34) \quad \sigma = \Delta \frac{a^2}{h}$$

sich **hebt**, und bei der Temperatur-Abnahme von derselben Grösse würde der Punkt C um ebensoviel sich **senken.**

Die in § 22 berechnete Bogenbrücke (Fig. **173**) kann — was den Einfluss der Temperatur-Aenderung auf die Höhenlage des Scharnierpunktes S anbelangt — ebenfalls wie eine solche Verbindung zweier einfacher Stangen behandelt werden. Setzt man, den dort angegebenen Dimensionen entsprechend, $h = 5000$, $a^2 = 20000^2 + 5000^2$, so erhält man z. B. für $\Delta = \frac{1}{4000}$ den Werth:

$$\sigma = \tfrac{1}{4000} \cdot \left(\frac{20000^2 + 5000^2}{5000}\right) = 21{,}25 \text{ Millimeter.}$$

Es würde also der Scharnierpunkt S um 21,25 Millimeter sich **heben**, wenn die Temperatur um 20,5 Grad (C.) **zunimmt**, und um 21,25 Millimeter sich **senken**, wenn die Temperatur um 20,5 Grad (C.) **abnimmt**. Bei Temperatur-Schwankungen von der doppelten Grösse $t = 41$ Grad (C.) würde die Hebung resp. Senkung des Scharnierpunktes 42,5 Millimeter betragen. Wenn eine solche Temperatur-Erniedrigung von 41 Graden zusammenträfe mit dem Belastungszustande, für welchen in § 45 nach Gleichung 9) die Senkung $s_1 = 18{,}75$ Millimeter berechnet wurde, so würde die totale Senkung des Scharnierpunktes $18{,}75 + 42{,}5 = 61{,}25$ Millimeter betragen.

Wenn mit δ_1 das durch die Belastung des Punktes C hervorgebrachte **elastische** Verkürzungsverhältniss der beiden Stangen AC und BC in Fig. **401** bezeichnet wird, und mit Δ das einer gleichzeitig stattfindenden Temperatur-Erniedrigung entsprechende Verkürzungverhältniss derselben, so hat die Senkung des Punktes C (nach Gleichung 1) im Ganzen die Grösse:

$$35) \quad s = (\delta_1 + \Delta) \frac{a^2}{h}.$$

Indem man die Grösse in Gleichung 18) dem für die Senkung des horizontalen Balkens gefundenen Werthe $\frac{\delta_2 l^2}{f}$ gleich setzt, erhält man die Gleichung:

$$36) \quad \frac{(\delta_1 + \Delta)\, a^2}{h} = \frac{\delta_2\, l^2}{f},$$

welche für das Höhenverhältniss $\frac{f}{h}$ aufgelöst nach Substitution des Werthes $a^2 = l^2 + h^2$ die Form annimmt:

$$37) \quad \frac{f}{h} = \left(\frac{\delta_2}{\delta_1 + \Delta}\right) \cdot \left(\frac{1}{1 + \frac{h^2}{l^2}}\right).$$

Setzt man hierin $\delta_1 = \delta_2 = \frac{1,5}{1000}$ (indem man annimmt, dass beide Systeme aus Schmiedeisen construirt sind, für welches $\frac{1,5}{1000}$ als das der Elasticitätsgrenze entsprechende Längenänderungs-Verhältniss gesetzt werden kann), ferner $\frac{h}{l} = \frac{1}{2}$ und $\Delta = \frac{1}{400}$ (entsprechend der Annahme einer grössten vorkommenden Temperatur-Erniedrigung von 20,5 Graden), so erhält man $\frac{f}{h} = \frac{3}{5}$ $\left(\text{oder } \frac{f}{2l} = \frac{3}{20}\right)$. Setzt man ein anderes Mal unter Beibehaltung der übrigen Zahlenwerthe $\Delta = -\frac{1}{400}$, so erhält man $\frac{f}{h} = \frac{6}{5}$ $\left(\text{oder } \frac{f}{2l} = \frac{3}{10}\right)$. Das vortheilhafteste Höhenverhältniss $\frac{f}{h}$ variirt also unter den angenommenen Umständen — je nach dem Stärkeverhältniss der beiden Systeme — zwischen den beiden Grenzwerthen $\frac{3}{5}$ und $\frac{6}{5}$. Dem ersteren rückt dasselbe um so näher, je stärker die beiden Streben im Verhältniss zu dem horizontalen Balken construirt sind, und je kleiner in Folge dessen der von letzterem übernommene Bruchtheil der Totalbelastung ausfällt. Dem andern Grenzwerthe dagegen nähert sich das vortheilhafteste Höhenverhältniss um so mehr, je schwächer die beiden Streben im Verhältniss zu dem horizontalen Balken construirt sind, und je mehr in Folge dessen der von letzterem übernommene Lasttheil überwiegt. Für $\Delta = 0$, d. h. bei unverändert bleibender Temperatur, würde dagegen $\frac{f}{h} = \frac{4}{5}$ $\left(\text{oder } \frac{f}{2l} = \frac{1}{5}\right)$ der vortheilhafteste Werth sein.

Um den Einfluss der Temperatur-Aenderungen auf die Lastvertheilung zu bestimmen, hat man zunächst zu untersuchen, welche Spannungen in den beiden Systemen die Temperatur-Aenderung für sich allein — ohne das Vorhandensein irgend welcher Belastung — hervorbringen würde. Denkt man sich die Temperatur um t Grade abnehmend und bezeichnet man wiederum mit Δ das dieser Temperatur-Erniedrigung entsprechende Verkürzungsverhältniss der beiden Streben, so würde der Gelenkpunkt C (Fig. **401**) um die Grösse $\frac{\Delta\, a^2}{h}$ sich senken, wenn derselbe nicht mit dem horizontalen Balken fest verbunden wäre. Vermöge seiner Steifigkeit setzt der Balken dieser Senkung einen gewissen Widerstand P entgegen, welcher auf die beiden Stangen

als eine in dem Punkte C angreifende Verticalkraft nach oben hin wirkt, folglich Verlängerungen in denselben erzeugt, welche von den durch die Temperatur-Erniedrigung hervorgebrachten Verkürzungen in Abrechnung zu bringen sind. Es wird also, wenn δ_1 das elastische Verlängerungsverhältniss ist, welches die Kraft P für sich allein in den Stangen hervorbringen würde, die wirkliche Senkung des Punktes C die Grösse haben:

$$38) \quad s = (\Delta - \delta_1) \frac{a^2}{h}.$$

Nach Gleichung 19) ist hierin $\delta_1 = \frac{P a}{2 E_1 F_1 h}$ zu setzen, folglich ist:

$$39) \quad s = \left(\Delta - \frac{P a}{2 E_1 F_1 h}\right) \frac{a^2}{h}.$$

Für die Durchbiegung des horizontalen Balkens wurde in Gleichung 14) der Werth $s = \frac{\delta_2 l^2}{f}$ oder nach Substitution des aus Gleichung 20) zu entnehmenden Werthes $\delta_2 = \frac{P l}{2 E_2 F_2 f}$ die Grösse:

$$40) \quad s = \frac{P l^3}{2 E_2 F_2 f^2}$$

gefunden. Die Gleichsetzung dieser beiden Werthe für s führt zu der Gleichung:

$$41) \quad \left(\Delta - \frac{P a}{2 E_1 F_1 h}\right) \frac{a^2}{h} = \frac{P l^3}{2 E_2 F_2 f^2},$$

welche für die Kraft P aufgelöst die Form annimmt:

$$42) \quad P = \frac{2 \Delta E_1 F_1 \frac{h}{a}}{1 + \frac{l^3}{a^3} \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{h^2}{f^2}}.$$

Wenn zu dieser Temperatur-Wirkung noch die Wirkung einer in dem Punkte C angebrachten Belastung hinzukommt, welche nach dem in Gleichung 21) gefundenen Gesetze auf die beiden Systeme sich vertheilt, so summiren sich diese beiden Wirkungen; d. h. eine Temperatur-**Abnahme** bewirkt, dass der Lastantheil der beiden Streben um die Grösse P vermindert, der des horizontalen Balkens dagegen um die Grösse P vermehrt wird. Eine ebenso grosse Temperatur-**Zunahme** dagegen bewirkt, dass die beiden Streben dem horizontalen Balken den Theil P von seiner Belastung abnehmen.

Setzt man in obiger Gleichung $\frac{h}{a} = 0{,}6$, $\frac{l}{a} = 0{,}8$, $\frac{h}{f} = 3$, $E_1 = E_2 = 20000$ (entsprechend der Annahme, dass beide Systeme aus Schmiedeisen construirt sind), ferner $F_1 = F_2 = 10000 \square^{mm}$ und $\Delta = \frac{1}{1000}$ (entsprechend einer Temperatur-Aenderung von 20,5 Grad C.), so erhält man $P = 10700$ Kil. Nach Gleichung 21) wird für diesen Fall $\frac{Q_1}{Q_2} = 4{,}608$; also wenn z. B. die Totalbelastung $Q = 80000$ Kil. ist, so wird $Q_1 = \frac{4{,}608}{5{,}608} \cdot 80000 = 65740$ Kil. und $Q_2 = \frac{80000}{5{,}608} = 14260$ Kil. Es würde also bei einer Temperatur-Abnahme von 20,5 Graden die Lastvertheilung in der Weise sich ändern, dass die beiden Streben nur $65740 - 10700 = 55040$ Kil. zu tragen bekommen, und der Balken $14260 + 10700 = 24960$ Kil. erhält. Eine Temperatur-Zunahme von 20,5 Graden würde dagegen zur Folge haben, dass die beiden Streben den Lastantheil $65740 + 10700 = 76440$ Kil. übernehmen, und der Balken nur $14260 - 10700 = 3560$ Kil. zu tragen bekommt.

(Weitere Anwendungen der Principien, welche der Theorie der zusammengesetzten Systeme zu Grunde liegen, folgen im funfzehnten und sechszehnten Abschnitte.)

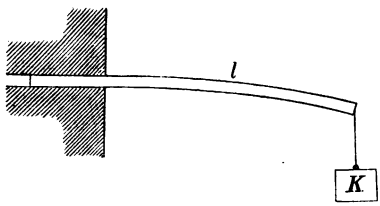
Funfzehnter Abschnitt.

§ 50.

Widerstand des prismatischen Balkens gegen Biegung.

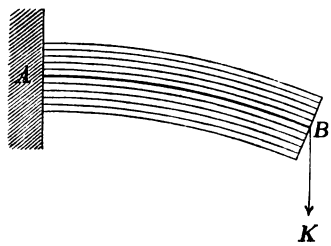
Wenn man das eine Ende eines prismatischen Balkens in horizontaler Lage einspannt, und das andere freie Ende desselben mit einem Gewichte belastet, so wird durch diese Belastung eine **Biegung** des Balkens hervorgebracht; der vorher geradlinige Balken nimmt eine krummlinige Form an, deren convexe Seite nach oben gerichtet ist (Fig. **420**). Betrachtet man den Balken als ein Bündel von parallel neben einander liegenden, in unverschiebbarer Lage an einander befestigten Fasern, so findet man, dass

Fig. 420.



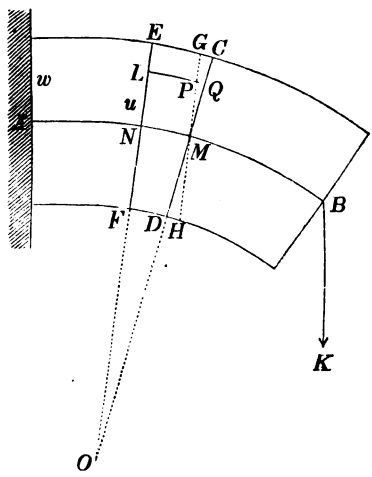
beim Eintreten dieser Biegung die **oben** liegenden Fasern sich **verlängern**, die **unten** liegenden sich **verkürzen** müssen. Zwischen der obersten und untersten Fasernschicht muss irgendwo eine mittlere Fasernschicht sich befinden, welche weder eine Verlängerung noch eine Verkürzung erleidet; diese mittlere Fasernschicht AB (Fig. **421**) wird die **neutrale Faser** genannt.

Fig. 421.



Die Verlängerungen der oberen und die Verkürzungen der unteren Fasern sind um so grösser, je weiter die Fasern von der neutralen Faser entfernt liegen Man darf annehmen, dass die einzelnen Querschnitts-Ebenen des Balkens, welche vor dem Eintreten der Biegung rechtwinkelig zur geradlinigen Achse des Balkens standen, annäherungsweise auch nach eingetretener Biegung noch ihre ebene Form und ihre rechtwinkelige Lage zu der nunmehr gekrümmten Achsenlinie des Balkens überall beibehalten. Die beiden sehr nahe bei einander liegenden Querschnitts-Ebenen M und N, welche vorher einander parallel waren, nehmen beim Eintreten der Biegung die gegen einander convergirenden Lagen CD und EF an (Fig. **422**). Die zwischen diesen beiden Querschnitts-Ebenen liegenden Fasernabschnitte hatten vor dem Eintreten der Biegung sämmtlich die gleiche Länge MN. Die Längenänderungen, welche diesen Fasern-Abschnitten durch die Biegung ertheilt werden, kann man finden, indem man jene ursprüngliche Länge MN von der einen Ebene EF aus auf den Fasernrichtungen abträgt, oder indem man durch den Punkt M eine Ebene GH legt, welche der Ebene EF parallel ist. Die zwischen den beiden Ebenen CD und GH liegenden Theile stellen die Längenänderungen

Fig. 422.



der einzelnen Fasern-Abschnitte dar. Nach Fig. **422** ist:

$$\frac{PQ}{GC} = \frac{u}{w}.$$

Aus der obigen Annahme folgt also, dass die Längenänderungen der einzelnen Fasern-Abschnitte sich verhalten wie ihre Abstände von der neutralen Faser, und da nach dem Elasticitätsgesetze die Spannung der Längenänderung proportional ist, so verhalten sich auch die **Spannungen** der einzelnen Fasern-Abschnitte wie ihre Abstände von der neutralen Faser.

Wenn also mit s die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnitts) für die im Abstande u von der neutralen befindliche Faser LQ bezeichnet wird (Fig. **423**), und mit S die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnitts) für die im Abstande w befindliche Faser EC, so ist:

Fig. 423.

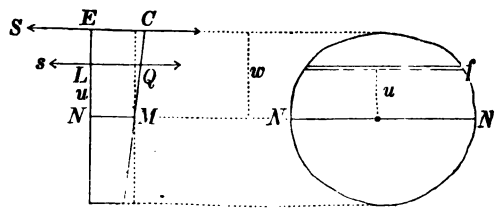


Fig. 424.

$$43) \quad \frac{s}{S} = \frac{u}{w} \quad \text{oder} \quad s = S\frac{u}{w}.$$

Um die totale Spannung irgend einer Faser zu bestimmen, hat man die pro Quadratmillimeter ihrer Querschnittsfläche gefundene Spannung zu multipliciren mit der Anzahl der Quadratmillimeter, welche ihre Querschnittsfläche enthält. Denkt man sich die ganze Querschnittsfläche des Balkens zerlegt in unendlich schmale parallel zur neutralen Faserschicht liegende Streifen, und sieht man den Flächeninhalt f des in der Entfernung u von der Neutralen befindlichen Streifens als Querschnittsfläche jener im Abstande u von der Neutralen NN liegenden Fasernschicht an (Fig. **424**), so erhält man für die totale Spannung derselben die Grösse:

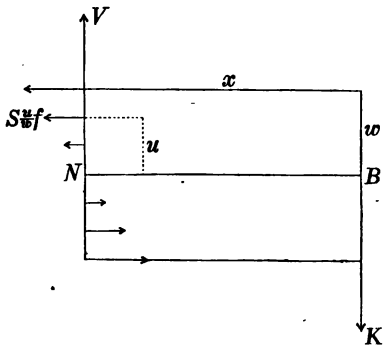
$$44) \quad s.f = S\frac{u}{w}.f.$$

Diese Spannung ist als eine **Zug**-Spannung (positive Spannung) anzusehen, wenn die betreffende Faser oberhalb der Neutralen liegt, d. h. wenn u **positiv** ist; als eine **Druck**-Spannung (negative Spannung) dagegen, wenn dieselbe unterhalb der Neutralen liegt, d. h. wenn u **negativ** ist. Der obige Ausdruck kann daher (für positive sowohl als für negative Werthe von u) als allgemein

gültiger Ausdruck für die Spannung irgend einer im Abstande u von der Neutralen befindlichen Faser betrachtet werden.

Wenn man sich durch eine an der Stelle N hindurchgelegte Querschnittsebene den Balken in zwei Theile zerschnitten denkt, und untersucht, welche Kräfte zur Wiederherstellung des Gleichgewichtszustandes für das Stück BN an der Schnittfläche desselben angebracht werden müssten, so findet man: dass zunächst an der Schnittstelle jeder einzelnen Faser eine in die Längenrichtung derselben fallende Kraft anzubringen ist von gleicher Grösse mit der Spannung, welche vorher in der Faser an dieser Stelle vorhanden war (Fig. **425**).

Fig. 425.



Diese Spannungswiderstände der einzelne Fasern können, wenn die Biegung — wie vorausgesetzt werden soll — eine sehr geringe ist, als Horizontalkräfte angesehen werden. Ausserdem ist an der Schnittfläche noch eine vertical aufwärts wirkende Kraft V anzubringen, da jene Horizontalkräfte für sich allein nicht ausreichen würden, um der vertical abwärts wirkenden Kraft K das Gleichgewicht zu halten. Diese Kraft V darf — bei der vorausgesetzten geringen Abweichung der Schnittfläche von der Verticalebene — als eine **längs** der Trennungsfläche aufwärts wirkende Widerstandskraft angesehen werden, welche einer Verschiebung des Stückes BN längst jener Fläche entgegenwirkt, und wird der Widerstand gegen **Abscheerung** genannt. Da die Kräfte V und K die einzigen Verticalkräfte sind, welche auf das Stück BN wirken, so ist nach den allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen:

45) $V = K.$

In der Querschnittsfläche ist also ausser den Spannungswiderständen der horizontalen Fasern noch ein Widerstand gegen Abscheerung thätig von gleicher Grösse mit derjenigen Kraft (K), welche ohne das Vorhandensein dieses Widerstandes eine Verschiebung längst der Querschnittsfläche hervorbringen würde.

Die einzigen **Horizontal**kräfte, welche auf das Stück BN wirken, sind die Spannungswiderstände der einzelnen Fasern.

Oberhalb der Neutralen wirken diese Kräfte von rechts nach links, unterhalb derselben von links nach rechts. Die algebraische Summe dieser Horizontalkräfte muss gleich Null sein. Nach Gleichung 44) ist also:

$$46) \quad \Sigma\left(\frac{S}{w} u f\right) = 0.$$

Wenn man die Grösse $\frac{S}{w}$ als gemeinschaftlichen Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder fortlässt, so erhält man die Gleichung:

$$47) \quad \Sigma (f u) = 0.$$

Diese Gleichung zeigt, dass die Momenten-Summe sämmtlicher Flächentheilchen der Querschnittsfläche (Fig. **424**) in Bezug auf den in der neutralen Fasernschicht liegenden Horizontal-Durchmesser $N N$, welcher die **neutrale Achse** genannt wird, gleich Null ist. Nach der Lehre vom Schwerpunkte kann statt dieser Momenten-Summe auch das Product aus der ganzen Querschnittsfläche in den Abstand ihres Schwerpunktes von jener Achse gesetzt werden, und da dieses Product gleich Null ist, so folgt hieraus, dass der Schwerpunkt der Querschnittsfläche in der neutralen Achse $N N$ selbst liegt. Durch Gleichung 46) wird also die Lage der neutralen Achse bestimmt; diese Gleichung drückt aus: **dass die neutrale Fasernschicht diejenige ist, welche durch die Schwerpunkte sämmtlicher Querschnittsflächen hindurchgeht.**

Die allgemeinen Gleichgewichtsbedingungen erfordern ausserdem noch: dass die algebraische Summe der statischan Momente sämmtlicher auf das Stück $B N$ wirkenden Kräfte in Bezug auf eine beliebige Achse, z. B. in Bezug auf die in Fig. **425** rechtwinkelig zur Bildfläche stehende neutrale Achse N, gleich Null ist. Es muss also das statische Moment der Kraft K, welche für sich allein eine von **links** nach **rechts** gerichtete Drehung hervorbringen würde, gleich der Summe der statischen Momente aller Spannungswiderstände sein, deren jeder für sich allein eine von **rechts** nach **links** gerichtete Drehung um die Achse hervorbringen würde. Das statische Moment des Spannungswiderstandes der im Abstande u von der Neutralen befindlichen Faser ist gleich $\frac{S u f}{w} . u$; folglich ist:

$$48) \quad \Sigma\left(\frac{S u f}{w} . u\right) = K . x,$$

oder in Worten ausgedrückt: **das Widerstandsmoment der Faserspannung ist gleich dem Momente der biegenden Kraft.**

Die Grösse $\frac{S}{w}$ als gemeinschaftlicher Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder kann auch vor das Summationszeichen gesetzt werden, also ist:

$$49) \quad \frac{S}{w} \Sigma (f u^2) = K x.$$

In dieser Gleichung bedeutet $\Sigma (f u^2)$ die Summe aller Producte aus den einzelnen Flächentheilchen der Querschnittsfläche in die Quadrate ihrer Abstände von der neutralen Achse, oder das **Trägheitsmoment der Querschnittsfläche** in Bezug auf den horizontalen Schwerpunktsdurchmesser derselben. Wenn man dieses Trägheitsmoment mit $\mathfrak{T}$ bezeichnet, so nimmt die obige Gleichung die einfache Form an:

$$50) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = K x.$$

Für den Fall, dass ausser der Kraft K noch andere Verticalkräfte auf das Stück BN wirken, würde man statt Kx die Summe der statischen Momente aller dieser biegenden Kräfte zu setzen haben. Wenn man also allgemein mit $\mathfrak{M}$ die Momenten-Summe dieser biegenden Kräfte in Bezug auf die neutrale Achse des Querschnitts bezeichnet, so kann man der obigen Gleichung die noch einfachere und allgemeinere Form geben:

$$51) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = \mathfrak{M}.$$

In dieser Gleichung bedeutet S die Spannung (pro Quadratmillimeter des Querschnitts) für die im Abstande w von der Neutralen befindliche Faser, also — wenn man, wie hier vorausgesetzt werden soll, unter w die Entfernung der am **weitesten** von der Neutralen entfernt liegenden Faser versteht — zugleich die **stärkste** Spannung (pro $\square^{mm}$), welche in der **ganzen** Querschnittsfläche vorkommt. Die obige Gleichung kann daher in der Form:

$$52) \quad S = \frac{w}{\mathfrak{T}} \mathfrak{M}$$

benutzt werden, um die Spannung der am stärksten gespannten Faser zu berechnen, sobald die Grösse

$$53) \quad \mathfrak{T} = \Sigma (f u^2)$$

für die betreffende Querschnittsform zuvor bestimmt wurde.

Für den rechteckigen Querschnitt ist nach Fig. **426** das im Abstande u von der Neutralen befindliche Flächentheilchen $f = b\Delta$ zu setzen, also ist $\mathfrak{T} = b\,\Sigma\,(\Delta\,u^2)$, oder nach der Bezeichnungsweise der Integralrechnung:

$$54)\quad \mathfrak{T} = b\int_{-\frac{1}{2}h}^{+\frac{1}{2}h} u^2\,du = \frac{b\,h^3}{12}.$$

Fig. 426.

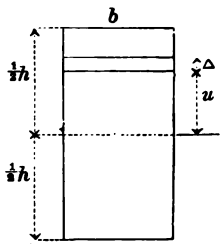


Fig. 427.

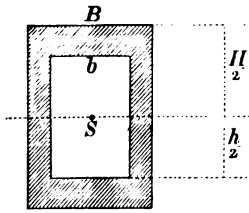
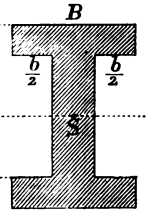


Fig. 428.



Die in Fig. **427** dargestellte Querschnittsfläche kann als Differenz der beiden Rechteckflächen $B\,H$ und $b\,h$ angesehen werden; das Trägheitsmoment einer solchen Querschnittsfläche in Bezug auf den horizontalen Schwerpunktsdurchmesser ist also:

$$55)\quad \mathfrak{T} = \frac{B\,H^3}{12} - \frac{b\,h^3}{12}.$$

Dieselbe Gleichung gilt auch für die in Fig. **428** dargestellte Querschnittsform. Auf ähnliche Weise können die Trägheitsmomente anderer Querschnittsflächen, welche auf die Grundform des Rechtecks sich zurückführen lassen, bestimmt werden, sobald dieselben **symmetrisch** in Bezug auf den horizontalen Schwerpunktsdurchmesser geformt sind. So z. B. erhält man für den in Fig. **429** dargestellten Querschnitt, welcher als Summe zweier Rechteckflächen betrachtet werden kann, den Werth:

Fig. 429.

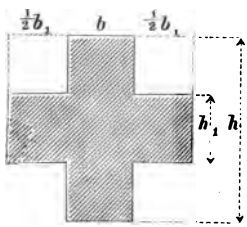
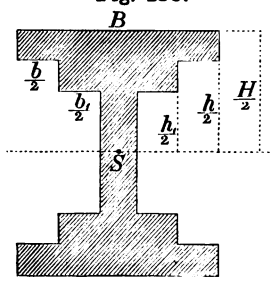


Fig. 430.



$$56)\quad \mathfrak{T} = \frac{b\,h^3}{12} + \frac{b_1\,h_1^3}{12},$$

und für das Trägheitsmoment der in Fig. **430** dargestellten Querschnittsfläche die Gleichung:

$$57)\quad \mathfrak{T} = \frac{B H^3}{12} - \frac{b h^3}{12} - \frac{b_1 h_1^3}{12}.$$

Für den kreisförmigen Querschnitt ist (nach Fig. **431**) $\Sigma(f u^2) = \Sigma(f v^2)$ zu setzen, und da $u^2 + v^2 = x^2$ also $\Sigma(f u^2) + \Sigma(f v^2) = \Sigma(f x^2)$, so ist:

$$\mathfrak{T} = \tfrac{1}{2}\,\Sigma(f x^2).$$

Fig. 431.

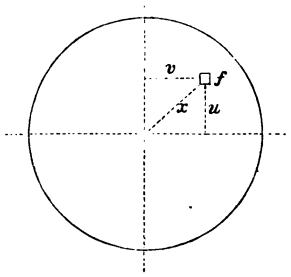
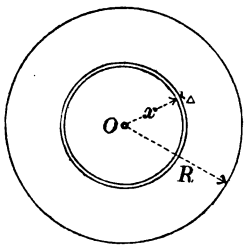


Fig. 432.



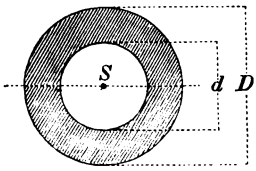
Die letztere Grösse $\Sigma(f x^2)$ findet man nach Fig. **432**, indem man für f die Fläche des unendlich schmalen Ringes von der Breite Δ, nämlich $f = 2 x \pi \Delta$ setzt; man erhält dann die Gleichung $\Sigma(f x^2) = 2\pi\,\Sigma(x^3\,\Delta)$, oder nach der Bezeichnungsweise der Integralrechnung:

$$\Sigma(f x^2) = 2\pi \int_0^R x^3\,dx = \frac{\pi}{2} R^4.$$

Es ist also, wenn mit D der Durchmesser des Kreises bezeichnet wird:

$$58)\quad \mathfrak{T} = \frac{\pi}{4} R^4 = \frac{\pi}{64} D^4.$$

Fig. 433.



Die Ringfläche (Fig. **433**) kann als Differenz zweier Kreisflächen von den Durchmessern D und d angesehen werden. Das Trägheitsmoment derselben ist also:

$$59)\quad \mathfrak{T} = \frac{\pi}{64}(D^4 - d^4).$$

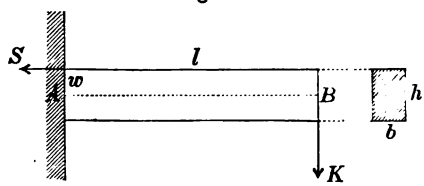
Aus Gleichung 50) ergiebt sich, dass die grösste in einem Querschnitte vorkommende Spannung an den verschiedenen Stellen des Balkens verschiedene Grössen hat; denn die Grösse S hängt ab von dem Momente der biegenden Kraft und wird am grössten da, wo der Hebelarm x seinen grössten Werth annimmt, d. h. in demjenigen Querschnitte, welcher mit

der Befestigungsstelle zusammenfällt. Setzt man $x = l$, so erhält man die Gleichung:

$$60) \quad \frac{S}{w} \mathfrak{T} = K l,$$

in welcher die Grösse S nunmehr die grösste in dem **ganzen Balken** überhaupt vorkommende Spannung bezeichnet.

Fig. 434.



Für einen Balken von rechteckigem Querschnitt (Fig. **434**) ist $w = \frac{h}{2}$, und nach Gleichung 54) $\mathfrak{T} = \frac{b h^3}{12}$ zu setzen, nimmt also die obige Gleichung die Form an:

$$61) \quad \frac{S b h^2}{6} = K l.$$

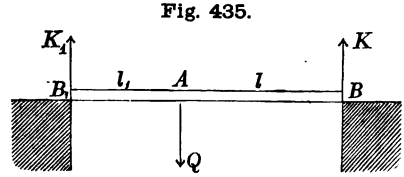
Wenn man z. B. $K = 125$ Kil., $l = 800^{mm}$, $b = 20^{mm}$, $h = 100^{mm}$ setzt, so erhält man für die grösste in dem Balken vorkommende Spannung den Werth:

$$S = \frac{6 K l}{b h^2} = \frac{6 . 125 . 800}{20 . 100^2} = 3 \text{ Kil.}$$

Dieser Werth ist unabhängig von der Beschaffenheit des Materials. Bei einer Vergleichung desselben mit der für das betreffende Material als zulässig zu betrachtenden Spannung findet man alsdann: ob die Widerstandsfähigkeit des Balkens der biegenden Kraft gegenüber eine hinreichende Grösse hat, oder umgekehrt: wie gross die letztere höchstens sein darf, wenn jene Grenze nicht überschritten werden soll. So z. B. würde man für einen **schmiedeisernen** Balken von den oben angenommenen Dimensionen finden, dass die Kraft K bis auf das Doppelte (also bis auf 250 Kil.) vergrössert werden kann, ohne dass die (für Schmiedeisen) als practisch zulässig anzunehmende Spannung von 6 Kil. pro $\square^{mm}$ überschritten wird.

Die grösste Spannung in einem an beiden Endpunkten unterstützten Balken $B B_1$, der an irgend einem Zwischenpunkte A mit einem Gewicht Q belastet ist (Fig. **435**), kann ebenfalls nach Gleichung 60) berechnet werden, wenn mit K der Gegendruck des einen Stützpunktes, und mit l die Entfernung desselben von dem Belastungspunkte bezeichnet wird. Denkt man sich den Theil $A B_1$ in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, dass der Theil $A B$ in demselben Biegungszustande sich befindet, wie der in Fig. **434**

Fig. 435.



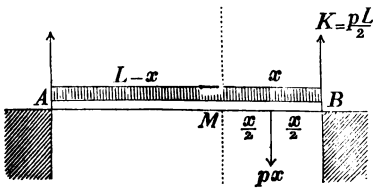
dargestellte Balken — nur mit dem Unterschiede, dass die biegende Kraft hier nach oben wirkt, und in Folge dessen die grösste Zugspannung in der **unteren** Faser stattfindet. Wenn man für den Gegendruck K alsdann den aus der Gleichung des Hebels: $K(l+l_1) = Q\,l_1$ sich ergebenden Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$62) \quad \frac{S}{w}\mathfrak{T} = \frac{Q\,l\,l_1}{l+l_1}.$$

(Da $K_1\,l_1 = Kl$ ist, so gelangt man zu eben derselben Gleichung, wenn man die in dem Theile AB_1 stattfindende grösste Spannung aufsucht.)

Wenn die Belastung eines an beiden Endpunkten unterstützten Balkens gleichförmig über seine Länge L vertheilt ist, und mit p die auf jeder Längeneinheit enthaltene Belastung bezeichnet wird, so ist $K = \frac{pL}{2}$ der Gegendruck jedes der beiden Stützpunkte, und px die Belastung des Theiles $BM = x$ (Fig. **436**).

Fig. 436.



Denkt man sich den Theil AM in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, dass der aus der Wand hervorragende Theil BM angesehen werden kann als ein Balken, der unter Einwirkung **zweier** biegenden Kräfte sich befindet, nämlich der aufwärts biegenden Kraft K und der abwärts biegenden Kraft px. Die in dem Querschnitte M hervorgebrachten Biegungsspannungen entsprechen also der Differenz der statischen Momente dieser beiden Kräfte, und in der allgemeinen Gleichung 51) ist für die Grösse $\mathfrak{M}$ in diesem Falle der Werth zu substituiren:

$$\mathfrak{M} = Kx - px\frac{x}{2} = \frac{pL}{2}\,.\,x - \frac{px^2}{2}.$$

Für die in der Entfernung x von dem einen Endpunkte stattfindende grösste Spannung ergiebt sich also die Gleichung:

$$63) \quad \frac{S}{w}\mathfrak{T} = \frac{p}{2}\,x\,(L-x).$$

Das Product der beiden Abschnitte x und $L-x$ wird am grössten, wenn $x = L - x = \frac{L}{2}$ gesetzt wird. Die grösste in

dem Balken **überhaupt** vorkommende Spannung findet also in der Mitte des Balkens statt und ist zu bestimmen aus der Gleichung:

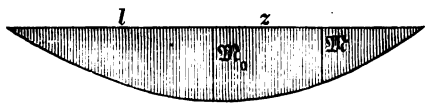
$$64) \quad \frac{S}{w}\mathfrak{T} = \frac{p L^2}{8}.$$

Setzt man $L = 2l$ und $x = l - z$, so erhält man als allgemeine Gleichung für das Biegungsmoment im Abstande z von der Mitte

$$65) \quad \mathfrak{M} = p\left(\frac{l^2 - z^2}{2}\right),$$

welche für $z = 0$ die Form annimmt:

Fig. 437.



$$66) \quad \mathfrak{M}_0 = \frac{p l^2}{2}.$$

Die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem $\mathfrak{M}$ mit z sich ändert, führt zu der Parabel Fig. **437.**

§ 51.

Elastische Linie.

Die krumme Linie AB (Fig. **422**), nach welcher die neutrale Faser eines gebogenen Balkens gekrümmt ist, wird die „elastische Linie" genannt. Das unendlich kleine Bogenstück MN dieser elastischen Linie kann als ein Kreisbogen angesehen werden, dessen Mittelpunkt O mit dem Convergenzpunkte der beiden Normalen CD und EF zusammenfällt, und dessen Halbmesser $ON = \rho$ den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie für dessen Stelle bildet. Aus der Aehnlichkeit der beiden Dreiecke CGM und MNO ergiebt sich die Proportion:

$$\frac{CG}{MN} = \frac{MG}{ON}.$$

Der Quotient auf der linken Seite ist das Verlängerungsverhältniss derjenigen Faser, deren Spannung (pro Quadratmillimeter) mit S bezeichnet wurde, also (nach Gleichung I) gleich $\frac{S}{E}$. Wenn man ferner $MG = w$ und $ON = \rho$ setzt, so erhält man die Gleichung:

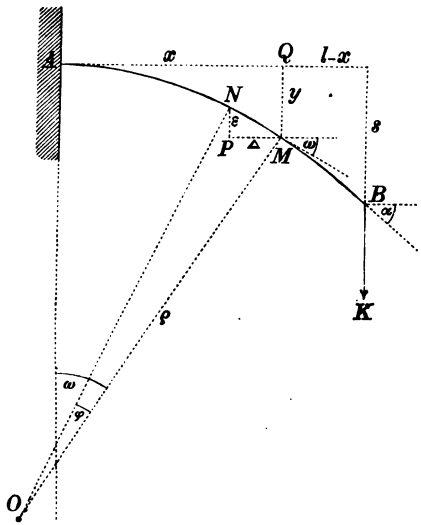
$$67) \quad \frac{S}{E} = \frac{w}{\rho} \quad \text{oder} \quad \frac{S}{w} = \frac{E}{\rho}.$$

Nach Substitution dieses Werthes für den Quotienten $\frac{S}{w}$ nimmt die allgemeine Gleichung 51) die Form an:

$$68) \quad \frac{E\mathfrak{T}}{\rho} = \mathfrak{M}.$$

Aus dieser Gleichung ergiebt sich für den Krümmungshalbmesser des unendlich kleinen Bogenstückes $\overset{\frown}{MN}$ der elastischen Linie AB (Fig. **438**) der Werth:

Fig. 438.



$$69) \quad \rho = \frac{E\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}} = \frac{E\mathfrak{T}}{K(l-x)}.$$

Bei der vorausgesetzten geringen Grösse der Durchbiegung kann in der Gleichung:

$$\overset{\frown}{MN} = \rho\,\varphi \quad \text{oder}$$

$$\varphi = \frac{\overset{\frown}{MN}}{\rho}$$

statt des Bogens $\overset{\frown}{MN}$ auch die Horizontal-Projection desselben $MP = \Delta$ gesetzt werden, und wenn man ausserdem darin den für ρ gefundenen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$70) \quad \varphi = \frac{K(l-x)\,\Delta}{E\mathfrak{T}}.$$

Denkt man sich die Horizontal-Projection $AQ = x$ des ganzen Bogens AM in ihre unendlich kleinen Theile Δ zerlegt und in der obigen Gleichung statt x der Reihe nach die einzelnen Vielfachen von Δ substituirt, so erhält man durch Summation aller der auf solche Weise für die zugehörigen unendlich kleinen Winkelgrössen gebildeten Ausdrücke die Gleichung:

$$71) \quad \Sigma(\varphi) = \Sigma\left(\frac{K(l-x)\,\Delta}{E\mathfrak{T}}\right).$$

Die auf der linken Seite stehende Winkelsumme ist gleich dem Winkel ω, welchen der Krümmungshalbmesser OM mit der Verticalen (oder die elastische Linie an der Stelle M mit der Horizontalen) einschliesst. In dem Ausdrucke auf der rechten Seite ist die Grösse $\frac{K}{E\mathfrak{T}}$ (bei der vorausgesetzten prismatischen

Form des Balkens ein gemeinschaftlicher Factor aller unter dem Summationszeichen vereinigten Glieder. Man erhält also die Gleichung:

$$72) \quad \omega = \frac{K}{E\mathfrak{T}} \Sigma [(l - x)\Delta] = \frac{K}{E\mathfrak{T}} [l \Sigma (\Delta) - \Sigma (x \Delta)].$$

Hierin ist $\Sigma (\Delta) = x$ und $\Sigma (x \Delta) = \frac{x^2}{2}$ zu setzen, also ist:

$$73) \quad \omega = \frac{K}{E\mathfrak{T}} \left(l x - \frac{x^2}{2} \right).$$

Setzt man in dieser Gleichung $x = l$, so erhält man für den Winkel α, welchen die elastische Linie an dem Endpunkte B mit der Horizontalen einschliesst, die Gleichung:

$$74) \quad \alpha = \frac{K l^2}{2 E \mathfrak{T}}.$$

In dem unendlich kleinen rechtwinkligen Dreieck MNP ist die verticale Kathete $\varepsilon = \Delta \operatorname{tg} \omega$, oder — da wegen vorausgesetzter geringer Grösse der Durchbiegung statt $\operatorname{tg} \omega$ auch die Winkelzahl ω selbst gesetzt werden kann —:

$$75) \quad \varepsilon = \omega \, . \, \Delta.$$

Wenn man hierin für ω den in Gleichung 73) gefundenen Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$76) \quad \varepsilon = \frac{K}{E\mathfrak{T}} \left(l x - \frac{x^2}{2} \right) \Delta.$$

Denkt man sich wiederum die Horizontal-Projection $A Q$ des Bogens $A M$ in ihre unendlich kleinen Theile zerlegt, so kann man die zu jedem dieser Theile gehörige Vertical-Projection des betreffenden Bogentheiles mittelst der obigen allgemeinen Gleichung bestimmen, indem man jedes Mal den zugehörigen Werth von x substituirt, und man erhält durch Summation aller auf solche Weise gefundenen Gleichungen:

$$77) \quad \Sigma (\varepsilon) = \frac{K}{E\mathfrak{T}} [l \Sigma (x \Delta) - \tfrac{1}{2} \Sigma (x^2 \Delta)].$$

Die auf der linken Seite stehende Grösse ist als Summe der Vertical-Projectionen aller Theile des Bogens $A M \doteq y$ zu setzen; ferner ist $\Sigma (x \Delta) = \frac{x^2}{2}$ und $\Sigma (x^2 \Delta) = \frac{x^3}{3}$; man erhält also die Gleichung:

$$78) \quad y = \frac{K}{E\mathfrak{T}} \left(\frac{l x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right).$$

Setzt man — der Bezeichnungsweise der Differenzialrechnung entsprechend — $\Delta = dx$, $\varepsilon = dy$, $\omega = \frac{dy}{dx}$, ferner $\varphi = d\omega = d\left(\frac{dy}{dx}\right)$, so nehmen die Gleichungen die Formen an:

$$E\mathfrak{T}\frac{d^2y}{dx^2} = K(l-x).$$

$$E\mathfrak{T}\left(\frac{dy}{dx}\right) = K\left(lx - \frac{x^2}{2}\right).$$

$$E\mathfrak{T}y = K\left(\frac{lx^2}{2} - \frac{x^3}{6}\right).$$

Für $x = l$ wird $y = s$, die Senkung des Endpunktes B ist also:

$$79) \quad s = \frac{Kl^3}{3E\mathfrak{T}}.$$

Wenn man diese letztere Gleichung durch Gleichung 60) dividirt, so erhält man:

$$\frac{sw}{S} = \frac{l^2}{3E},$$

und wenn man hierin $\frac{S}{E} = \delta$ ferner $2w = h$ setzt, so nimmt diese Gleichung für s aufgelöst die Form an:

$$s = \tfrac{2}{3}\,\delta\,\frac{l^2}{h}.$$

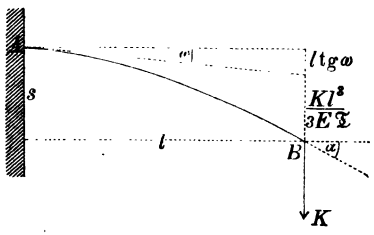
Denkt man sich in Fig. **435** das Gewicht Q in der Mitte hängend, so findet man, dass die obige Gleichung dann auch für diesen Fall gelten würde. Man kann dieselbe daher auch dazu benutzen, um die Formen zu finden, welche die für das zusammengesetzte System Fig. **401** gefundenen Gleichungen annehmen würden, wenn der horizontale Balken überall gleichen Querschnitt hätte. Man erhält nämlich statt Gleichung 18), indem man darin die Grösse δ_2 mit der Grösse $\frac{2}{3}\,\delta_2$ vertauscht, für diesen Fall die Gleichung:

$$\frac{\delta_1 a^3}{h} = \tfrac{2}{3}\,\delta_2\,\frac{l^2}{f}$$

und auf gleiche Weise findet man, dass Gleichung 21) alsdann die Form annimmt:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \tfrac{2}{3}\cdot\frac{l^3}{a^3}\cdot\frac{h^2}{f^2}\cdot\frac{E_1}{E_2}\cdot\frac{F_1}{F_2}.$$

Fig. 439.



Wenn der Balken an der Befestigungsstelle — anstatt in horizontaler Lage — in einer um den sehr kleinen Winkel ω nach unten hin von der Horizontalen abweichenden Lage eingespannt ist (Fig. **439**), so kann der Neigungswinkel α am Endpunkte B angesehen werden als zusammengesetzt aus zwei Theilen: der eine Theil ist derjenige Neigungswinkel,

um welchen ohne das Vorhandensein einer Durchbiegung die Achse des Balkens bei B von der Horizontalen abweichen würde, also gleich ω; der andere von der Durchbiegung herrührende Theil ist nach Gleichung 74) zu bestimmen. Man erhält also für diesen Fall die Gleichung:

$$80) \quad \alpha = \omega + \frac{K l^2}{2 E \mathfrak{T}}.$$

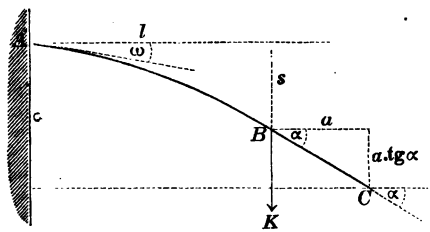
Ebenso kann die Grösse s in diesem Falle angesehen werden als zusammengesetzt aus dem Theile $l \operatorname{tg} \omega$ (wofür wegen vorauszusetzender Kleinheit des Winkels ω auch $l \omega$ gesetzt werden kann), welcher ohne das Vorhandensein der Durchbiegung die Höhendifferenz der beiden Endpunkte bilden würde, und dem von der Durchbiegung herrührenden Theile, welcher aus Gleichung 79) zu bestimmen ist. Für diesen Fall gilt also die Gleichung:

$$81) \quad s = l \omega + \frac{K l^3}{3 E \mathfrak{T}}.$$

Zu gleichem Resultate würde man gelangen, wenn man in Fig. **438** den Theil AM in eine feste Wand eingeschlossen ansähe, und für den Theil MB als einen schräg eingespannten Balken die Länge $l - x$ mit l, die Höhendifferenz $s - y$ mit s bezeichnete und die letztere aus den beiden Gleichungen 78) und 79) berechnete.

Die obigen Gleichungen behalten in Bezug auf die Lage des Punktes B, sowie in Betreff der Richtung der elastischen Linie an dieser Stelle ihre Gültigkeit auch dann noch, wenn der Balken über den Punkt B um die Strecke $BC = a$ noch hinausreicht (Fig. **440**). Wenn auf diesen letzteren Theil des Balkens keine biegende Kräfte wirken — wie vorausgesetzt wird — so behält derselbe seine geradlinige Form bei. Es ist also der Winkel, welchen bei dem Endpunkte C die elastische Linie mit der Horizontalen einschliesst, ebenfalls gleich α. Die Ordinate oder Senkung des Punktes C erhält man, indem man zu dem für s gefundenen Werthe noch die Grösse $a \,.\, \operatorname{tg} \alpha$ oder $a \,.\, \alpha$ hinzuaddirt. Es ist also:

Fig. 440.



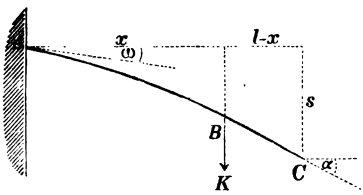
$$82) \quad \sigma = l \omega + \frac{K l^3}{3 E \mathfrak{T}} + a \,.\, \alpha.$$

Diese Gleichung nimmt nach Substitution des für α gefundenen Werthes die Form an:

$$83) \quad \sigma = (l + a)\,\omega + \frac{K(2l^3 + 3al^2)}{6E\mathfrak{T}}.$$

Wenn man statt dessen die in Fig. **441** gewählte Bezeichnung einführt, also x statt l und $l - x$ statt a und s statt σ setzt, so erhält man die Gleichungen:

Fig. 441.

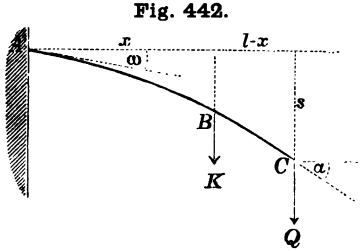


$$84) \quad \alpha = \omega + \frac{Kx^2}{2E\mathfrak{T}}.$$

$$85) \quad s = l\,\omega + \frac{K(3lx^2 - x^3)}{6E\mathfrak{T}}.$$

Für den Fall, dass ausser der in dem Punkte B angreifenden Kraft K noch in dem Punkte C eine Verticalkraft Q auf den Balken wirkt, hat man zu den vorigen Werthen der Grössen α und s noch die nach den Gleichungen 74) und 79) zu bestimmenden Beiträge hinzuzuaddiren, welche die Kraft Q zu diesen Grössen liefert. Man erhält also für den in Fig. **442** dargestellten Fall die Gleichungen:

Fig. 442.



$$86) \quad \alpha = \omega + \frac{Kx^2}{2E\mathfrak{T}} + \frac{Ql^2}{2E\mathfrak{T}}.$$

$$87) \quad s = l\,\omega + \frac{K(3lx^2 - x^3)}{6E\mathfrak{T}} + \frac{Ql^3}{3E\mathfrak{T}}.$$

Diese Gleichungen gelten nicht nur für positive, sondern auch für negative Werthe der Grössen K und Q, d. h. für die Fälle, in denen diese Kräfte vertical aufwärts wirken.

Setzt man in den obigen Gleichungen $\omega = 0$, $Q = 0$ und $p\,dx$ statt K, ferner $d\alpha$ statt α und ds statt s, so nehmen dieselben die Form an:

$$88) \quad d\alpha = \frac{p\,x^2\,dx}{2E\mathfrak{T}},$$

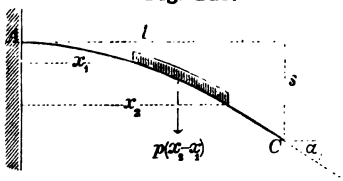
$$89) \quad ds = \frac{p\,(3lx^2 - x^3)\,dx}{6E\mathfrak{T}},$$

und wenn man auf der rechten Seite zwischen den Grenzen x_1 und x_2 integrirt, so erhält man für den in Fig. **443** dargestellten Fall die Werthe:

90) $$\alpha = \frac{p(x_2^3 - x_1^3)}{6 E \mathfrak{T}}.$$

91) $$s = \frac{p[l(x_2^3 - x_1^3) - \frac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4)]}{6 E \mathfrak{T}}.$$

Fig. 443.



Für den Fall, dass die ganze Länge l mit der Belastung p pro Längeneinheit bedeckt ist, hat man $x_1 = 0$, $x_2 = l$ zu setzen, und es wird dann:

92) $$\alpha = \frac{p l^3}{6 E \mathfrak{T}}.$$

93) $$s = \frac{p l^4}{8 E \mathfrak{T}}.$$

Ist ausserdem noch die Neigung ω an der Befestigungsstelle A und das Gewicht Q am Endpunkte C vorhanden, so wird:

94) $$\alpha = \omega + \frac{p l^3}{6 E \mathfrak{T}} + \frac{Q l^2}{2 E \mathfrak{T}}.$$

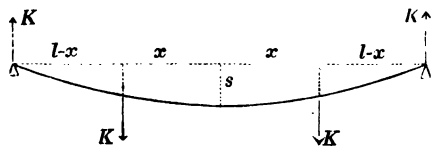
95) $$s = l\omega + \frac{p l^4}{8 E \mathfrak{T}} + \frac{Q l^3}{3 E \mathfrak{T}}.$$

Die Gleichung 87) nimmt, wenn darin $\omega = 0$, ferner $-K$ statt Q und $-s$ statt s gesetzt wird, die Form an:

96) $$s = \frac{K(2l^3 - 3lx^2 + x^3)}{6 E \mathfrak{T}}.$$

Denkt man sich in Fig. **444** die linksseitige Hälfte in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, dass alsdann die rechtsseitige Hälfte in demselben Biegungszustande sich befindet, wie der in Fig. **442** dargestellte Balken, sobald bei letzterem $\omega = 0$ und $Q = -K$ angenommen wird. Es ist daher für Fig. **444** die Durchbiegung s nach Gleichung 96) zu bestimmen.

Fig. 444.



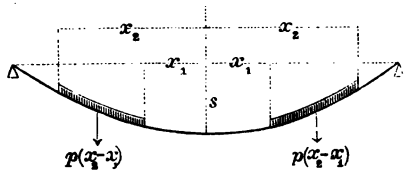
Setzt man in dieser Gleichung wiederum ds statt s und $p\,dx$ statt K, so nimmt dieselbe die Form an:

97) $$ds = \frac{p(2l^3 - 3lx^2 + x^3)\,dx}{6 E \mathfrak{T}}$$

und man erhält, indem man auf der rechten Seite zwischen den Grenzen x_1 und x_2 integrirt, für den in Fig. **445** dargestellten Fall die Gleichung:

$$98)\quad s = \frac{p\,[2\,l^3\,(x_2 - x_1) - l\,(x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{4}\,(x_2^4 - x_1^4)]}{6\,E\,\mathfrak{T}}.$$

Fig. 445.

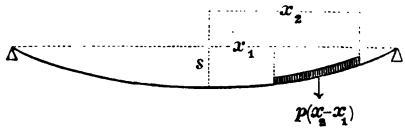


Für den Fall, dass die ganze Länge des Balkens belastet ist, hat man $x_1 = 0$, $x_2 = l$ zu setzen, und es wird dann:

$$99)\quad s = \tfrac{5}{24}\,\frac{p\,l^4}{E\,\mathfrak{T}}.$$

Da zu der Durchbiegung in der Mitte die Belastung der linksseitigen Balkenhälfte denselben Beitrag liefert, wie die der rechtsseitigen, so ist, wenn eine von Beiden fehlt, die Durchbiegung halb so gross. Für den in Fig. **446** dargestellten Fall ist also die Durchbiegung zu bestimmen aus der Gleichung:

Fig. 446.



$$100)\quad s = \frac{p\,[2\,l^3\,(x_2 - x_1) - l\,(x_2^3 - x_1^3) + \frac{1}{4}\,(x_2^4 - x_1^4)]}{12\,E\,\mathfrak{T}}.$$

Wenn man in Gleichung 87) die Werthe $\omega = 0$ und $s = 0$, ferner $-Q$ statt $+Q$ substituirt, so nimmt dieselbe die Form an:

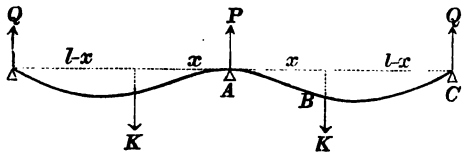
$$0 = \frac{K\,(3\,l\,x^2 - x^3)}{6\,E\,\mathfrak{T}} - \frac{Q\,l^3}{3\,E\,\mathfrak{T}},$$

und man erhält durch Auflösung derselben für Q den Werth:

$$101)\quad Q = \frac{K}{2}\left(3\,\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3}\right).$$

Nach dieser Gleichung kann man den Gegendruck jeder von den beiden Endstützen in Fig. **447** berechnen; denn wenn man sich die linke Balkenhälfte in eine feste Wand eingeschlossen denkt, so ergiebt sich, dass die rechte Hälfte genau in demselben Zustande sich befindet wie der in Fig. **442** dargestellte Balken (wenn bei letzterem $\omega = 0$, $s = 0$ und Q negativ angenommen wird). Da die Gegendrücke der drei Stützen zusammen gleich $2\,K$ sind, so ist der Gegendruck der Mittelstütze:

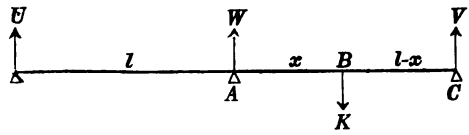
Fig. 447.



$$102)\quad P = 2\,K - 2\,Q.$$

Zu diesem Gegendrucke liefert die Belastung der linken Seite denselben Beitrag, wie die der rechten Seite. Es ist also bei dem in Fig. **448** dargestellten Falle der Gegendruck der Mittelstütze:

Fig. 448.



103) $W = \frac{1}{2} P = K - Q.$

Nach Substitution des für Q gefundenen Werthes nimmt diese Gleichung die Form an:

104) $$W = K\left\{1 - \tfrac{3}{2}\frac{x^2}{l^2} + \tfrac{1}{2}\frac{x^3}{l^3}\right\}.$$

Die Gegendrücke der Endstützen können nunmehr wie bei dem Balken auf zwei Stützen nach dem Gesetze des Hebels bestimmt werden aus den Gleichungen:

$$V = K\left(\frac{l+x}{2l}\right) - \frac{W}{2} \quad \text{und} \quad U = K\left(\frac{l-x}{2l}\right) - \frac{W}{2},$$

welche nach Substitution des für W gefundenen Werthes die Formen annehmen:

105) $$V = \frac{K}{4}\left\{2\frac{x}{l} + 3\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3}\right\}.$$

106) $$U = -\frac{K}{4}\left\{2\frac{x}{l} - 3\frac{x^2}{l^2} + \frac{x^3}{l^3}\right\}.$$

Das Biegungsmoment an der im Abstande z vom Punkte A zwischen A und B gelegenen Stelle N hat die Grösse:

107) $$\mathfrak{M} = K(x - z) - V(l - z).$$

Wenn man hierin $\mathfrak{M} = 0$ setzt und für V den in Gleichung 105) gefundenen Werth substituirt, so erhält man für z die Gleichung:

108) $$\frac{z}{l} = \frac{2\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}}{4 + 2\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}},$$

welche nach Substitution der Werthe $\frac{l-x}{l} = u$ und $\frac{l-z}{l} = v$ die einfachere Form annimmt:

109) $$v = \frac{4}{5 - u^2}.$$

Nach dieser Gleichung kann die Stelle N, wo das Biegungsmoment die Grösse Null hat, bestimmt, und das Gesetz, nach welchem das Biegungsmoment längs der ganzen Länge des Balkens sich ändert, auf die in Fig. **449** angegebene Art graphisch dargestellt werden. Auch kann man — wie in Fig. **450** und Fig. **451** angedeutet — die obige Gleichung in der für u aufgelösten Form:

Fig. 449.

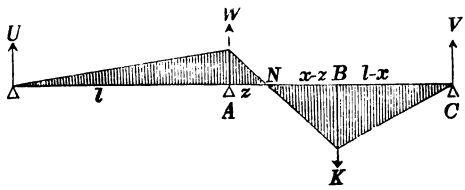


Fig. 450.

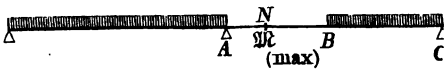
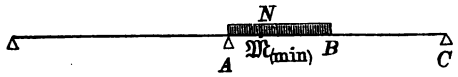


Fig. 451.

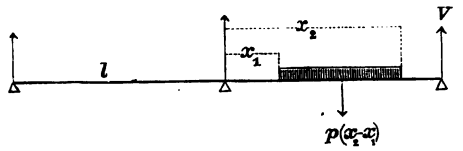


$$110)\quad u = \sqrt{5 - \frac{4}{v}}$$

dazu benutzen, um diejenigen Belastungszustände zu finden, bei welchen an einer gegebenen Stelle N das Biegungsmoment resp. seinen grössten und kleinsten Werth annimmt.

Nachdem in den Gleichungen 104), 105), 106) die Gegendrücke gefunden sind, welche ein einzelnes Gewicht K an den Stützpunkten hervorbringt, findet man die Wirkung, welche eine über die Strecke $x_2 - x_1$ gleichförmig vertheilte Belastung hervorbringt, indem man wiederum $p\,dx$ statt K setzt und zwischen den Grenzen x_1 und x_2 integrirt. So ergiebt sich z. B. für den Stützendruck V bei dem in Fig. **452** dargestellten Belastungszustande nach Gleichung 105) der Werth:

Fig. 452.



$$V = \int_{x_1}^{x_2} \frac{p\,dx}{4} \left\{ 2\,\frac{x}{l} + 3\,\frac{x^2}{l^2} - \frac{x^3}{l^3} \right\},\quad \text{oder}$$

$$111)\quad V = \frac{p}{4\,l^3} \left\{ l^2\,(x_2^2 - x_1^2) + l\,(x_2^3 - x_1^3) - \tfrac{1}{4}\,(x_2^4 - x_1^4) \right\}.$$

Sind gleichzeitig mehrere solcher Strecken belastet, so ist der

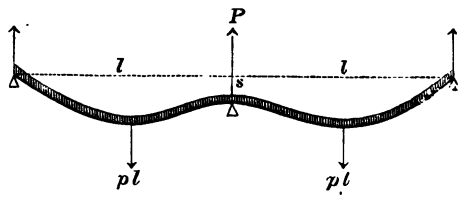
betreffende Stützendruck gleich der Summe der Beiträge zu setzen, welche die einzelnen Belastungen zu demselben liefern.

Nach Gleichung 101) erhält man, indem man $p\,dx$ statt K setzt und zwischen den Grenzen 0 und l integrirt, für den Gegendruck einer der beiden Endstützen den Werth $Q = \frac{3}{8} p\,l$. Wenn also bei dem in Fig. **452** dargestellten Balken mit p die gleichförmig über die ganze Balkenlänge vertheilte Belastung pro Längeneinheit und mit m eine über die Strecke $x_2 - x_1$ gleichförmig vertheilte mobile Belastung pro Längeneinheit bezeichnet wird, so ergiebt sich für den Stützendruck V der Werth:

$$112) \quad V = \tfrac{3}{8} p\,l + \frac{m}{4\,l^3}\left\{l^2(x_2^2 - x_1^2) + l(x_2^3 - x_1^3) - \tfrac{1}{4}(x_2^4 - x_1^4)\right\}.$$

Wäre in Fig. **453** die Mittelstütze nicht vorhanden, so würde die Durchbiegung in der Mitte wie bei dem Balken auf **zwei** Stützen nach Gleichung 96) zu bestimmen sein, und man erhielte für dieselbe den Werth:

Fig. 453.



$$113) \quad s_1 = \tfrac{5}{24} \frac{p\,l^4}{E\mathfrak{T}}$$

für die nach **oben** gerichtete Durchbiegung, welche bei dem **unbelasteten** Balken die in der Mitte angreifende Kraft P für sich allein hervorbringen würde, erhält man ferner nach Gleichung 96), indem man darin $x = 0$ und $2K = P$ setzt, den Werth:

$$114) \quad s_2 = \frac{P\,l^3}{6\,E\mathfrak{T}}.$$

Die wirkliche Durchbiegung muss gleich der Differenz dieser beiden Grössen sein, ist also:

$$115) \quad s = s_1 - s_2 = \tfrac{5}{24} \frac{p\,l^4}{E\mathfrak{T}} - \frac{P\,l^3}{6\,E\mathfrak{T}}.$$

Diese Gleichung kann man benutzen, um bei dem zusammengesetzten Systeme (Fig. **401**) die Lastvertheilung zu berechnen für den Fall, dass die Belastung über die Länge des horizontalen Balkens gleichförmig vertheilt ist, und der letztere überall gleichen Querschnitt hat. Der Druck P bildet nämlich, in entgegengesetzter Richtung genommen, zugleich die Kraft, welchen dem Verbindungspunkte der beiden Streben die Senkung:

$$116) \quad s = \frac{P a^3}{2 E_1 F_1 h_1^2}$$

ertheilt, und man erhält, indem man wiederum die beiden Werthe von s einander gleichsetzt, eine Gleichung von der Form:

$$117) \quad \frac{P a^3}{2 E_1 F_1 h_1^2} = \frac{5}{24} \frac{p l^4}{E_2 \mathfrak{T}_2} - \frac{P l^3}{6 E_2 \mathfrak{T}_2}.$$

Wenn der Querschnitt des horizontalen Balkens ein Rechteck ist, und mit F_2 die Fläche, mit h_2 die Höhe desselben bezeichnet wird, so ist (nach Gleichung 54) $\mathfrak{T}_2 = \frac{F_2 h_2^2}{12}$ zu setzen und man erhält aus obiger Gleichung für P den Werth:

$$118) \quad P = \frac{5 p l}{4 + \frac{a^3}{l^3} \cdot \frac{h_2^2}{h_1^2} \cdot \frac{E_2}{E_1} \cdot \frac{F_2}{F_1}}.$$

Nach dieser Gleichung ist der von den beiden Streben übernommene Theil der Belastung zu berechnen, wenn vorausgesetzt wird, dass die Temperatur unverändert blieb, und dass vor Beginn der Lastwirkung die drei Punkte C, E, D in einer Horizontalen lagen.

Wenn z. B. $\frac{a}{l} = \frac{5}{4}$, $\frac{h_2}{h_1} = \frac{1}{3}$, $\frac{E_2}{E_1} = 1$ und $\frac{F_2}{F_1} = 2$ ist, so wird $P = 1{,}128\, p l$. Für $\frac{F_2}{F_1} = 0$ wird $P = \frac{5}{4} p l$, also ebensogross wie bei dem Balken auf drei gleich hohen Stützpunkten der Gegendruck der Mittelstütze.

Setzt man in Gleichung 115) $p = 0$ und $-P$ statt $+P$, so erhält man für s den Werth:

$$119) \quad s = \frac{P l^3}{6 E \mathfrak{T}}.$$

Diese Gleichung kann man benutzen, um den Einfluss einer Temperaturänderung auf die Lastvertheilung in Fig. **401** zu bestimmen. Indem man (auf dieselbe Weise wie in Gleichung 41 geschehen) die beiden durch Temperatur-Abnahme hervorgebrachten Werthe von s einander gleichsetzt, erhält man die Gleichung:

$$\left(\Delta - \frac{P a}{2 E_1 F_1 h_1}\right) \frac{a^2}{h_1} = \frac{P l^3}{6 E_2 \mathfrak{T}_2},$$

welche für P aufgelöst, nach Substitution des Werthes $\mathfrak{T} = \frac{F_2 h_2^2}{12}$ die Form annimmt:

$$120) \quad P = \frac{2 \Delta E_1 F_1 \frac{h_1}{a}}{1 + 4 \cdot \frac{E_1}{E_2} \cdot \frac{F_1}{F_2} \cdot \frac{l^3}{a^3} \cdot \frac{h_1^2}{h_2^2}}.$$

Setzt man hierin $E_1 = E_2 = 20{,}000$, $F_1 = 10{,}000$, $F_2 = 20{,}000$, $\frac{l}{a} = 0{,}8$, $\frac{h_1}{a} = 0{,}6$, $\frac{h_1}{h_2} = 3$ und $\Delta = \frac{1}{1000}$ (entsprechend einer Temperatur-Abnahme von 20,5 Grad C.), so wird $P = 5873$ Kil. Wenn ausserdem die Belastung $2pl$ wirkt, so wird $P = 1{,}128\,pl - 5873$ Kil. bei einer Temperatur-Abnahme von 20,5 Grad, und $P = 1{,}128\,pl + 5873$ Kil. bei einer Temperatur-Zunahme von 20,5 Grad.

Der allgemeine Ausdruck für den Krümmungshalbmesser der elastischen Linie (Fig. **438**) hat nach Gleichung 68) die Form:

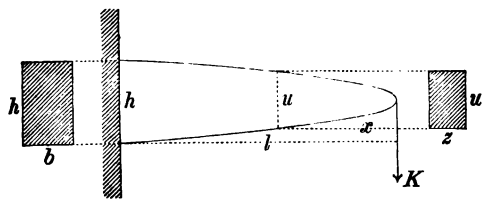
$$121) \quad \rho = \frac{E\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}},$$

und zwar bedeutet darin ρ den Krümmungshalbmesser an derjenigen Stelle des Balkens, an welcher das Moment der biegenden Kraft die Grösse $\mathfrak{M}$, und das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche die Grösse $\mathfrak{T}$ hat. Wenn der Quotient $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}}$ für alle Stellen des Balkens gleiche Werthe annimmt, so ist auch der Krümmungshalbmesser an allen Stellen gleich gross, und die elastische Linie wird in diesem Falle ein **Kreisbogen.**

Bei einem Balken von constantem Querschnitte ist das Trägheitsmoment $\mathfrak{T}$ an allen Stellen von gleicher Grösse. Ein **prismatischer** Balken wird daher nur dann nach einer Kreislinie sich krümmen, wenn auch das Moment $\mathfrak{M}$ an allen Stellen des Balkens gleich gross ist, wie z. B. in dem Falle, wenn an dem freien Ende des Balkens (Fig. **422**) statt der einzelnen Kraft ein Kräftepaar wirkte.

Wenn dagegen die Grössen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{T}$ mit der Entfernung vom Endpunkte des Balkens sich ändern, und wenn mit $\mathfrak{T}_1$, $\mathfrak{M}_1$ resp. die Werthe bezeichnet werden, welche die Grössen $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{M}$ an einer bestimmten willkürlich zu wählenden Stelle — z. B. an dem einen Endpunkte — des Balkens annehmen, so drückt die Gleichung:

Fig. 454.



$$122) \quad \frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}} = \frac{\mathfrak{T}_1}{\mathfrak{M}_1}$$

oder

$$\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{T}_1} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_1}$$

die allgemeine Bedingung aus, unter welcher die elastische Linie ein Kreisbogen wird.

Für den in Fig. **454** dargestellten Fall nimmt die allgemeine Bedingungsgleichung 122) die Form an:

123) $\frac{z\,u^3}{b\,h^3} = \frac{x}{l}$.

Setzt man $z = b$, so erhält man für den in Fig. **455** und Fig. **456** dargestellten Träger von constanter Breite die Gleichung:

Fig. 455.

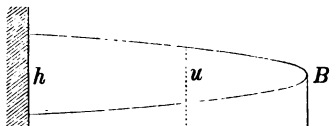
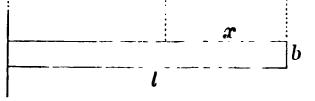


Fig. 456.



124) $\frac{u^3}{h^3} = \frac{x}{l}$,

und wenn man ein anderes Mal $u = h$ setzt, so wird:

125) $\frac{z}{b} = \frac{x}{l}$,

und man erhält einen im Grundriss dreieckigen Balken von constanter Höhe (Fig. **457** und Fig. **458**).

Fig. 457.

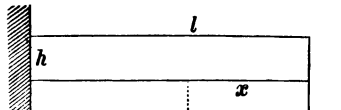


Fig. 458.

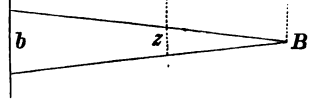
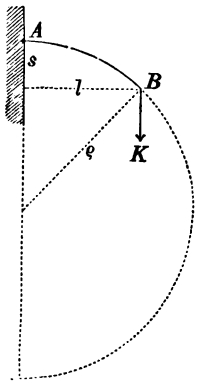


Fig. 459.



Die Senkung des Belastungspunktes kann für den Balken von constanter Krümmung (Fig. **459**) nach der Gleichung der Kreislinie:

$$l^2 = 2\rho s - s^2$$

berechnet werden. Wegen vorauszusetzender Kleinheit der Durchbiegung darf in dieser Gleichung das Glied s^2 weggelassen, und die Grösse l als Länge des Balkens angesehen werden. Hiernach ergiebt sich für die Senkung des Belastungspunktes B der Werth:

126) $s = \frac{l^2}{2\rho}$.

Wenn man hierin für ρ den aus Gleichung 67) zu entnehmenden Werth substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$127) \quad s = \frac{l^2 S}{2 w E}.$$

Für einen symmetrisch in Bezug auf die neutrale Axe geformten Querschnitt von constanter Höhe h ist $2w = h$ zu setzen, und wenn man ausserdem $\frac{S}{E} = \delta$ setzt, so wird:

$$128) \quad s = \delta \frac{l^2}{h}.$$

Denkt man sich in Fig. **435** das Gewicht Q in der Mitte hängend und jede Hälfte des Balkens wie Fig. **457** und Fig. **458** geformt, so findet man, dass dieser Balken alsdann ebenfalls nach einem Kreisbogen sich biegen wird. Es würde daher bei dem in Fig. **401** dargestellten Falle die in Bezug auf den horizontalen Balken gemachte Voraussetzung: dass derselbe unter Einwirkung der Belastung nach einem Kreisbogen sich krümmt, auch dann zutreffen, wenn jede Hälfte desselben die in Fig. **457** und Fig. **458** dargestellte Form hätte.

Wenn man statt dessen in Gleichung 126) für ρ den Werth aus Gleichung 121) einführt, und für den constanten Quotienten $\frac{\mathfrak{T}}{\mathfrak{M}}$ den Werth $\frac{\mathfrak{T}_1}{Kl}$ substituirt, welchen derselbe an der Befestigungsstelle A annimmt, so erhält man die Gleichung:

$$s = \frac{K l^3}{2 E \mathfrak{T}_1}.$$

Bei dem Träger von constanter Krümmung ist also die Senkung des Belastungspunktes 1,5 mal so gross als bei dem prismatischen Träger (Gleichung 79).

§ 52.

Widerstand gegen Zerknicken.

Wenn an den beiden Enden einer geradlinigen prismatischen Stange vom Querschnitt F zwei gleichförmig über die Endflächen vertheilte gleich grosse Druckkräfte K wirken, so entsteht in der Stange pro Flächeneinheit ihres Querschnitts eine Druckspannung:

$$129) \quad S_1 = \frac{K}{F},$$

welche längs der ganzen Stange in jedem Querschnitte und in allen Theilen dieses Querschnitts eine und dieselbe Grösse hat (Fig. **460**).

Angenommen: die Stange würde auf irgend eine Weise in eine gekrümmte Form gebracht, und die Krümmung so lange vergrössert, bis die Pfeilhöhe der Biegungscurve die Grösse f erreicht (Fig. 461); angenommen ferner: die Stange würde in diesem gebogenen Zustande der Wirkung der beiden Kräfte K ausgesetzt, und die letzteren würden so lange vergrössert, bis dieselben für sich allein ausreichen, die Stange in einem solchen gebogenen Zustande zu erhalten, bei welchem die Pfeilhöhe der Biegungscurve gleich f ist. Die grösste Druckspannung, welche unter diesen Umständen in der Stange entsteht, lässt sich auf folgende Weise berechnen.

Fig. 460.

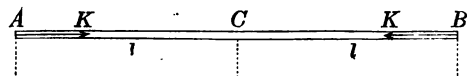
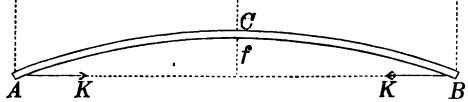


Fig. 461.



Die an irgend einer Stelle eines bestimmten Querschnitts stattfindende Spannung kann in diesem Falle angesehen werden als aus zwei Spannungen zusammengesetzt: nämlich aus der gleichförmig über die Querschnittsfläche vertheilten Druckspannung S_1, welche wie im vorigen Falle aus Gleichung 129) bestimmt werden kann, und aus der in Folge der Krümmung an dieser Stelle entstehenden Biegungsspannung, welche von dem Momente der biegenden Kraft abhängt und an der concaven Seite der Krümmung ebenfalls eine Druckspannung bildet. Das Moment der biegenden Kraft erreicht an der Stelle C seinen grössten Werth:

$$130) \quad \mathfrak{M} = Kf;$$

es wird daher die in Folge der Biegung hinzukommende Druckspannung ebenfalls an dieser Stelle (und zwar an der concaven Seite) ihren grössten Werth annehmen. Setzt man in der allgemeinen Gleichung 52) für $\mathfrak{M}$ den obigen Werth, so erhält man für diese allein von der Biegung herrührende grösste Druckspannung S_2 die Gleichung:

$$131) \quad S_2 = \frac{w}{\mathfrak{T}} . Kf.$$

Die grösste in der Stange **überhaupt** vorkommende Druckspannung S ist nunmehr zu berechnen aus der Gleichung:

$$132) \quad S = S_1 + S_2.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass die Elasticitätswiderstände der Stange auf zwei verschiedene Arten jenen Druckkräften K das Gleichgewicht halten können: das eine Mal auf die in Fig. **460** angedeutete Art, bei welcher die hervorgebrachte Druckspannung nur die Grösse S_1 erreicht; das andere Mal auf die in Fig. **461** angedeutete Art, bei welcher die grössere Druckspannung $S_1 + S_2$ entsteht. Wenn also diejenige Querschnittsgrösse F berechnet werden sollte, bei welcher die Widerstandsfähigkeit der Stange jenen Druckkräften gegenüber eine hinreichende Grösse besitzt, so würde zunächst die Frage entschieden werden müssen, ob jene Druckkräfte auf die **erste** oder auf die **zweite** Art die Widerstandsfähigkeit der Stange in Anspruch nehmen werden. Im ersten Falle würde in Gleichung 129) für S_1 die Grösse der **zulässigen** Druckspannung zu setzen, und die Grösse F unmittelbar aus dieser Gleichung zu berechnen sein. Im zweiten Falle dagegen würde man dem Querschnitt eine solche Grösse zu geben haben, bei welcher erst die **Summe** der beiden Spannungen S_1 und S_2 die Grösse der **zulässigen** Druckspannung erreicht.

Bei langen dünnen Stangen reicht die geringste **zufällige** Krümmung schon hin, um zu bewirken, dass durch die Druckkräfte eine seitliche Ausbiegung hervorgebracht, und der Widerstand gegen Zerknicken in Anspruch genommen wird. Wenn also nicht durch besonders günstige Umstände — wie etwa durch feste Wände, welche die Stange von allen Seiten umgeben und die Form derselben geradlinig erhalten — jede Möglichkeit einer seitlichen Ausbiegung ausgeschlossen ist, so wird man bei der Querschnittsberechnung allemal die zweite Methode vorziehen und der Sicherheit wegen von der Voraussetzung ausgehen, dass jede Druckkraft ausser der **direct** hervorgebrachten Druckspannung S_1 noch eine Biegungsspannung S_2 erzeugt, entsprechend — nach Gleichung 131) — dem grössten Werthe, welchen der Hebelarm f im ungünstigsten Falle erreichen kann.

Für diese Grösse f lässt sich auf folgende Weise ein oberer Grenzwerth ermitteln, in Bezug auf welchen mit Bestimmtheit behauptet werden kann, dass bei **genügender Stärke** der Stange in Wirklichkeit niemals eine Biegung entstehen kann, bei welcher der Hebelarm der Kraft K jenen Grenzwerth erreichte. Denkt man sich nämlich die Stange an allen Stellen gleich stark gekrümmt — in welchem Falle also die Biegungscurve ein **Kreisbogen** wird — und denkt man sich zugleich diese Krümmung so stark,

dass die solcher Krümmung entsprechende **Biegungs**spannung für sich allein schon die Elasticitätsgrenze erreicht, so würde offenbar bei dem Hinzutreten der gleichförmig vertheilten Druckspannung S_1 die Elasticitätsgrenze überschritten werden. Könnte durch die Druckkräfte K ein solcher Zustand der Stange jemals herbeigeführt werden, so würde die Stärke der Stange jedenfalls **ungenügend** zu nennen sein. Wenn man also die einer **solchen** Krümmung entsprechende Pfeilhöhe f in Geichung 131) als Hebelarm der Kraft K in Rechnung bringt, so wird der aus jener Gleichung hervorgehende Werth von S_2 jedenfalls grösser sein als die Biegungsspannung, welche bei **genügender Stärke** der Stange in Wirklichkeit durch die Kräfte K hervorgebracht werden kann, und die aus dieser Annahme sich ergebende Querschnittsgrösse F wird etwas grösser ausfallen als in Wirklichkeit erforderlich ist.

Wenn man in Gleichung I (§ 44) dem Buchstaben S die Bedeutung der „Druckspannung an der Elasticitätsgrenze" giebt, so bedeutet δ das Verkürzungsverhältniss, welches der Elasticitätsgrenze entspricht. Man kann also den gesuchten Werth von f aus Gleichung 127) berechnen, indem man darin δ statt $\frac{S}{E}$ und f statt s substituirt, woraus sich die Gleichung ergiebt:

$$133) \quad f = \frac{l^2 \delta}{2w}.$$

Wenn man diesen Werth für f und ausserdem den aus Gleichung 129) für K sich ergebenden Werth in Gleichung 131) substituirt, so nimmt letztere die Form an:

$$134) \quad S_2 = \frac{\delta l^2 F}{2\mathfrak{T}} \cdot S_1,$$

und für die grösste Druckspannung in der Stange ergiebt sich nach Gleichung 132) der Werth:

$$135) \quad S = S_1 \left(1 + \frac{\delta}{2} \frac{F l^2}{\mathfrak{T}}\right).$$

Wenn man die ganze Länge der Stange $2l = L$ setzt und das Verhältniss $\frac{S}{S_1}$ mit n bezeichnet, so erhält man für letztere Zahl die allgemeine Gleichung:

$$136) \quad n = \frac{S}{S_1} = 1 + \frac{\delta}{8} \frac{F L^2}{\mathfrak{T}}.$$

In dieser Gleichung bedeutet S_1 diejenige Druckspannung, welche **ohne** das Hinzutreten der Biegung in der Stange entstanden

sein würde, und die Verhältnisszahl n giebt an: wie vielmal die Druckspannung vergrössert werden kann durch das Hinzutreten der Biegung.

Die Zahl n giebt daher zugleich an: den wievielten Theil von der sonst zulässigen Druckspannung man als Belastung für jede Flächeneinheit der Querschnitts als zulässig in Rechnung bringen darf, wenn die Stange eine genügende Widerstandsfähigkeit gegen das Zerknicken besitzen soll.

Wenn man in obiger Gleichung für den Coefficienten δ die der Elasticitätsgrenze entsprechenden Werthe substituirt, so erhält man die Gleichungen resp. für:

Gusseisen: $\delta = \frac{15}{10000}$, 137) $n = 1 + \frac{1}{5333}\frac{FL^2}{\mathfrak{T}}$,

Schmiedeisen: $\delta = \frac{15}{20000}$, 138) $n = 1 + \frac{1}{10666}\frac{FL^2}{\mathfrak{T}}$,

Holz: $\delta = \frac{1{,}8}{1000}$, 139) $n = 1 + \frac{1}{4444}\frac{FL^2}{\mathfrak{T}}$.

In diesen Gleichungen bedeutet $\mathfrak{T}$ das Trägheitsmoment der Querschnittsfläche in Bezug auf diejenige Schwerpunktsachse, welche rechtwinkelig zur Biegungsebene steht, d. h. rechtwinkelig zu derjenigen Ebene, in welcher eine Biegung der Stange am leichtesten hervorgebracht werden kann.

Wenn z. B. der Querschnitt ein Rechteck, und H die grössere, B die kleinere Seite desselben ist, so würde $\mathfrak{T} = \frac{HB^3}{12}$ zu setzen sein; wenn dagegen H die kleinere, B die grössere Seite wäre, so würde $\mathfrak{T} = \frac{BH^3}{12}$ zu setzen sein. Für letzteren Fall würde man also $\frac{F}{\mathfrak{T}} = \frac{BH}{\frac{1}{12}BH^3} = \frac{12}{H^2}$ zu substituiren haben und die Gleichungen erhalten resp. für:

Gusseisen: 140) $n = 1 + 0{,}002\,25\left(\frac{L}{H}\right)^2$

Schmiedeisen: 141) $n = 1 + 0{,}001\,125\left(\frac{L}{H}\right)^2$

Holz: 142) $n = 1 + 0{,}002\,7\left(\frac{L}{H}\right)^2$,

aus denen sich z. B. die nachfolgenden zusammengehörigen Werthe ergeben:

$\frac{L}{H} =$	10	20	30	40	50
Gusseisen: $n =$	1,225	1,9	3,025	4,6	6,625
Schmiedeisen: $n =$	1,1125	1,45	2,0125	2,8	3,8125
Holz: $n =$	1,27	2,08	3,43	5,32	7,75

Setzt man als zulässige Druckspannung für Schmiedeisen $S = 6$ Kil., so würde z. B. eine parallelepipedische schmiedeiserne Stange, deren **kleinere** Querschnitts-Dimension H den zwanzigsten Theil der Länge L beträgt, nur mit dem Gewichte:

$$S_1 = \frac{S}{n} = \frac{6}{1{,}45} = 4{,}14 \text{ Kil.}$$

für jeden Quadratmillimeter des Querschnitts belastet werden dürfen; und wenn z. B. $H = 10^{mm}$, $B = 40^{mm}$ ist, so würde die Druckkraft K (Fig. **461**) die Grösse

$$K = F \,.\, S_1 = 400 \,.\, 4{,}14 = 1656 \text{ Kil.}$$

nicht überschreiten dürfen, wenn noch hinreichende Sicherheit gegen das Zerknicken vorhanden sein soll.

Wenn die Querschnittsfläche in der Differenz zweier Rechteckflächen besteht (Fig. **427**), so ist $\frac{F}{\mathfrak{T}} = \frac{B\,H - b\,h}{\frac{1}{12}B\,H^3 - \frac{1}{12}b\,h^3}$ zu setzen, und die für **Schmiedeisen** gefundene Gleichung 138) nimmt für diesen Fall die Form an:

$$143) \quad n = 1 + 0{,}001\,125\,\frac{(B\,H - b\,h)\,L^2}{B\,H^3 - b\,h^3}.$$

Hiernach ergiebt sich z. B. für eine quadratische schmiedeiserne Röhre, deren Wandstärke $\frac{1}{20}$ der äusseren Dicke beträgt, die Gleichung:

$$144) \quad n = 1 + 0{,}00062\left(\frac{L}{H}\right)^2$$

und wenn zugleich die äussere Dicke H gleich dem zwanzigsten Theile der Länge L ist, so wird:

$$n = 1{,}248.$$

Eine solche Röhre würde also unter den obigen Voraussetzungen nur mit dem Gewichte:

$$S_1 = \frac{6}{1{,}248} = 4{,}8 \text{ Kil.}$$

pro Quadratmillimeter ihres Querschnitts belastet werden dürfen.

Für eine **runde** schmiedeiserne Röhre vom äusseren Durchmesser D und vom inneren Duchmesser d würde $\frac{F}{\mathfrak{T}} = \frac{\frac{\pi}{4}(D^2 - d^2)}{\frac{\pi}{64}(D^4 - d^4)} = \frac{16}{D^2 + d^2}$ zu setzen sein, und ergiebt sich nach Gleichung 138) der Werth:

$$145) \quad n = 1 + 0{,}0015\left(\frac{L^2}{D^2 + d^2}\right).$$

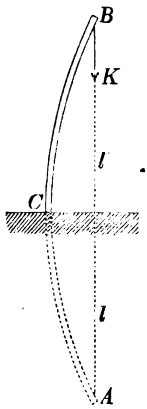
Setzt man hierin $\frac{d}{D} = 0{,}9$ und $\frac{L}{D} = 20$, so wird $n = 1{,}3315$ und $S_1 = 4{,}5$ Kil.

Für $d = 0$ und $\frac{L}{D} = 20$ dagegen wird $n = 1{,}6$ und $S_1 = 3{,}75$ Kil.

Denkt man sich in Fig. **461** die eine Hälfte der Stange in eine feste Wand eingeschlossen, so findet man, dass dadurch in dem Spannungszustande der andern Hälfte — folglich auch in

der bei C stattfindenden grössten Druckspannung — keine Aenderung hervorgebracht werden würde. Die allgemeine Gleichung 136) gilt daher auch für den in Fig. **462** dargestellten Fall, und wenn man wiederum $L = 2\,l$ setzt, so erhält man für diesen Fall die Gleichung:

Fig 462.



$$146)\quad n = 1 + \frac{\delta}{2}\,\frac{F l^2}{\mathfrak{T}}.$$

Für eine massive runde schmiedeiserne Stange, deren Länge $BC = l$ das Zwanzigfache des Durchmessers beträgt, würde also in diesem Falle $n = 3{,}4$ und $S_1 = \frac{6}{3{,}4} = 1{,}76$ Kil. zu setzen sein; und wenn der Querschnitt der Stange z. B. 100 Quadratmillimeter enthielte, so würde bei der in Fig. **462** dargestellten Befestigungsweise nur eine Belastung $K = 176$ Kil. als zulässig zu betrachten sein (während dieselbe Stange bei der in Fig **461** dargestellten Belastungsweise ein Gewicht $K = 375$ Kil. mit hinreichender Sicherheit tragen würde).

Hiernach sind die im zwölften Abschnitte für die Querschnittsbestimmung gegebenen Regeln zu modificiren, und sind die dort für die gedrückten Stangen gefundenen Querschnittszahlen nur gültig unter Voraussetzung solcher Querschnittsformen, für welche die Zahl n einen nur wenig von 1 verschiedenen Werth erhält.

Aus den oben gefundenen Gleichungen ergeben sich überhaupt folgende allgemeine Regeln und Gesetze: erstens, gedrückte Stangen erfordern bei gleicher Spannung im allgemeinen grössere Querschnitte als gezogene Stangen; zweitens, die Querschnittsfläche einer gedrückten Stange ist um so mehr zu vergrössern, je grösser das Verhältniss ihrer Länge zur kleinsten Querschnitts-Dimension ist, und je ungünstiger in dieser Beziehung die Form des Querschnitts gewählt wird; drittens, bei gleicher Länge und Querschnittsform wird die erforderliche Vergrösserung des Querschnitts um so beträchtlicher werden, je geringer die Spannung der Stange und je kleiner in Folge dessen die kleinste Querschnitts-Dimension im Verhältniss zu ihrer Länge wird.

Aus der letzten Folgerung ergiebt sich die Constructionsregel: bei gedrückten Stangen sind Zersplitterungen in mehrere isolirte Theile womöglich zu vermeiden. In dieser Beziehung sind die einfachsten Constructionsformen die vortheilhaftesten, sind also z. B. einfache Gitter-Systeme den mehrfachen, kleinere Felder-

zahlen den grösseren vorzuziehen; weil die Zahl n mit der Zahl der gedrückten Theile rasch zunimmt. Grössere Felderzahlen und mehrfache Gitter-Systeme haben dagegen — wie schon in § 43 bemerkt wurde — den Vortheil, dass wegen grösserer Zahl der Belastungspunkte an Material für die Zwischenträger gespart werden kann. Ebenso ergiebt sich hieraus, dass bei der Bestimmung des vortheilhaftesten Höhenverhältnisses der Träger auf den mit wachsender Höhe rasch abnehmenden Widerstand der gedrückten Theile gegen Zerknicken gehörig Rücksicht genommen werden muss.

Welche Felderzahlen und Höhenverhältnisse hinsichtlich des Materialaufwandes die vortheilhaftesten sind: diese Frage lässt sich überhaupt nicht allgemein beantworten, sondern muss in jedem einzelnen Falle durch vorläufige versuchsweise angestellte Rechnungen entschieden werden.

Sechzehnter Abschnitt.

Berechnung einer combinirten Gitter- und Hänge-Brücke von 60m Spannweite.*)

§ 53.

Voruntersuchung zur Ermittelung des vortheilhaftesten Höhenverhältnisses.

Die Brücke sollte womöglich so construirt werden, dass ein jeder Constructionstheil unter den für ihn ungünstigen Umständen das Maximum der für zulässig erachteten Spannung erreicht. Es ist deshalb das Verhältniss:

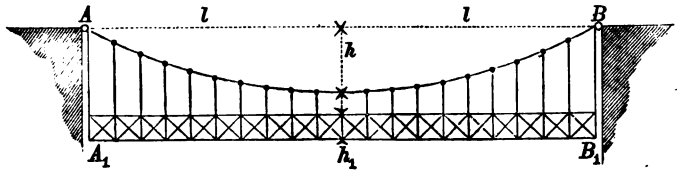
$$\frac{h_1}{h} = \frac{\text{Höhe des Gitterbalkens}}{\text{Pfeilhöhe der Kette}}$$

so zu wählen, dass bei allmählig wachsender Belastung die Spannungen in Kette und Gitterbalken gleichzeitig die zulässige

*) Diese Brücke wurde in einer deutschen Maschinenfabrik für Brasilien gebaut, und hat der Verfasser auf Wunsch des Fabrikanten die obige Berechnung dazu geliefert.

Grenze erreichen (Fig. **463**). Hinsichtlich der Kette ist dabei zugleich Rücksicht zu nehmen auf den Einfluss einer etwa gleichzeitig stattfindenden Temperatur-Aenderung.

Fig. 463.



Wenn mit δ das grösste Verlängerungsverhältniss bezeichnet wird, welches in der parabolischen Kette durch die Belastung allein hervorgebracht werden würde, so ist nach § 45 die demselben entsprechende Senkung des Scheitelpunktes der Kette:

$$147) \quad \sigma = \tfrac{3}{4}\,\delta\,\frac{l^2}{h}\left(1 + \tfrac{2}{3}\,\frac{h^2}{l^2}\right),$$

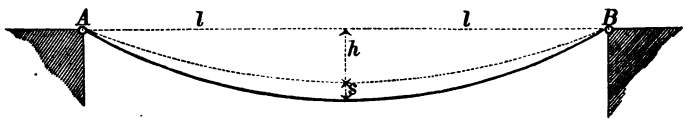
wofür man wegen hier vorauszusetzender Kleinheit des Verhältnisses $\frac{h}{l}$ annäherungsweise auch setzen kann:

$$148) \quad \sigma = \tfrac{3}{4}\,\delta\,\frac{l^2}{h}.$$

Wenn ferner mit Δ das der grössten vorkommenden Temperatur-Erhöhung entsprechende Ausdehnungsverhältniss der Kette bezeichnet wird, so hat die grösste überhaupt vorkommende Senkung des Scheitelpunktes der Kette (s. Fig. **464**) die Grösse:

$$149) \quad s = \tfrac{3}{4}\,(\delta + \Delta)\,\frac{l^2}{h}.$$

Fig. 464.



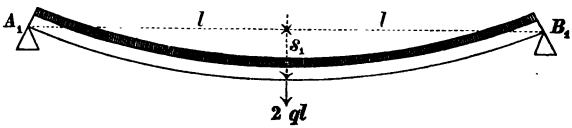
Bei einem prismatischen Balken auf zwei Stützen ist die von einer gleichförmig über die Länge vertheilten Belastung hervorgebrachte Durchbiegung in der Mitte (nach § 51) zu bestimmen nach der Gleichung:

$$150) \quad s_1 = \tfrac{5}{2^4}\,\frac{q\,l^4}{E_1\,\mathfrak{T}_1},$$

in welcher q die Belastung pro Längeneinheit, $\mathfrak{T}_1$ das Trägheitsmoment der (in Bezug auf die neutrale Achse symmetrisch vor-

ausgesetzten) Querschnittsfläche, und E_1 den Elasticitätsmodulus des Materials bezeichnet. (S. Fig. **465**.)

Fig. 465.



Die grösste Biegungsspannung im Balken (S_1) ist (nach § 50) zu berechnen aus der Gleichung:

$$151) \quad \frac{S_1}{\frac{1}{2}h_1}\,\mathfrak{T}_1 = \frac{q\,l^2}{2}.$$

Wenn man den aus dieser Gleichung für $\mathfrak{T}_1$ zu entnehmenden Werth in der vorigen substituirt, so erhält man die Gleichung:

$$152) \quad s_1 = \tfrac{5}{6}\,\frac{S_1}{E_1}\,\frac{l^2}{h_1},$$

welche, wenn die Grösse $\frac{S_1}{E_1}$ als das grösste im Balken vorkommende Längenänderungsverhältniss mit δ_1 bezeichnet wird, die Form annimmt:

$$153) \quad s_1 = \tfrac{5}{6}\,\delta_1\,\frac{l^2}{h_1}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für s und s_1 gefundenen Werthe erhält man die Gleichung: *)

$$154) \quad \tfrac{3}{4}\,(\delta + \Delta)\,\frac{l^2}{h} = \tfrac{5}{6}\,\delta_1\,\frac{l^2}{h_1},$$

aus welcher für das vortheilhafteste Höhenverhältniss der Werth sich ergiebt:

$$155) \quad \frac{h_1}{h} = \frac{\frac{5}{6}\,\delta_1}{\frac{3}{4}\,(\delta + \Delta)}.$$

Wenn man annimmt, dass die Brücke bei mittlerer Temperatur aufgestellt wird, so ist die Grösse Δ zu berechnen nach dem Ueberschusse der höchsten möglicherweise vorkommenden Temperatur über jene mittlere Temperatur. Bei einer Temperatur-Erhöhung von der Grösse $t = 41^0$ (Celsius) hat das Ausdehnungs-Verhältniss für Schmiedeisen die Grösse: $\Delta = \frac{1}{2000}$; für $t = 20{,}5^0$ (Celsius) würde $\Delta = \frac{1}{4000}$ zu setzen sein. Es ist ferner der Elasticitätsmodulus für Schmiedeisen $E = 20000$ Kil. (pro Quadratmillimeter) und die zulässige Spannung variirt zwischen 5 und

*) Vergl. § 49.

10 Kil. (pro $\square^{mm}$). Die für δ und δ_1 zu substituirenden Werthe liegen also zwischen den Grenzen $\frac{5}{20000}$ und $\frac{10}{20000}$. Wenn man für die Pfeilhöhe der Kette die Grösse $h = 4^m$ als gegeben annimmt, so ergeben sich aus obiger Gleichung die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe:

δ (Kette)	δ_1 (Gitterbalken)	Δ (Temp.-Ausdehnung)	$\frac{h_1}{h}$	h_1
$\frac{6}{20000}$	$\frac{6}{20000}$	$\frac{1}{4000}$ (20,5° C.)	$\frac{20}{33}$	$2{,}424^m$
		$\frac{1}{2000}$ (41° C.)	$\frac{5}{12}$	$1{,}66\ldots^m$
$\frac{8}{20000}$	$\frac{6}{20000}$	$\frac{1}{4000}$ (20,5° C.)	$\frac{20}{39}$	$2{,}051^m$
		$\frac{1}{2000}$ (41° C.)	$\frac{10}{27}$	$1{,}48^m$
$\frac{8}{20000}$	$\frac{5}{20000}$	$\frac{1}{4000}$ (20,5° C.)	$\frac{50}{117}$	$1{,}71^m$
		$\frac{1}{2000}$ (41° C.)	$\frac{25}{81}$	$1{,}234^m$
$\frac{10}{20000}$	$\frac{5}{20000}$	$\frac{1}{4000}$ (20,5° C.)	$\frac{10}{27}$	$1{,}48^m$
		$\frac{1}{2000}$ (41° C.)	$\frac{5}{18}$	$1{,}111^m$

Bei der Benutzung dieser Tabelle hat man zu berücksichtigen, dass, obwohl Kette und Gitterbalken aus demselben Materiale bestehen, doch aus verschiedenen Gründen für die Grösse δ_1 ein kleinerer Werth in Rechnung zu bringen ist als für die Grösse δ. Erstens: weil für die Biegungs-Spannungen im Gitterbalken die Grösse δ_1 nach der grössten zulässigen **Druck**-Spannung zu bemessen ist, während in der Kette stets nur **Zug**-Spannungen vorkommen; zweitens: weil die bei voller Belastung und höchster Temperatur in dem Gitterbalken eintretende Spannung noch nicht das überhaupt erreichbare Maximum bildet, insofern durch den Horizontaldruck des Windes und Ungleichförmigkeiten in der Vertheilung der mobilen Belastung jene Spannung noch eine weitere Vergrösserung erleiden kann; drittens: weil die vorläufig als unbeweglich betrachteten Aufhängepunkte der Kette in Wirklichkeit einander etwas näher rücken können in Folge des Ausreckens der Spannketten (was denselben Einfluss hat, wie wenn die Dehnbarkeit der Kette entsprechend vergrössert wäre).

Es erscheint hiernach, wenn die Ketten-Pfeilhöhe $h = 4^m$ als gegeben angenommen wird, die Grösse $h_1 = 1{,}5^m$ als ein passender zugehöriger Werth für die Höhe des Gitterbalkens, insofern dieser

Werth das arithmetische Mittel von den in der letzten Columne stehenden Zahlen bilden würde, wenn die ersten beiden fortgelassen worden wären.

§ 54.

Berechnung der durch Temperatur-Aenderungen hervorgebrachten Spannungen.

Bei abnehmender Temperatur verkürzt sich die Kette und der Scheitelpunkt derselben hebt sich; es entstehen dadurch in Kette und Gitterbalken Spannungen, welche mit den von den Belastungen hervorgebrachten sich summiren, aber zu berechnen sind, wie wenn gar keine Belastung vorhanden und das Ganze gewichtlos wäre.

Die Endpunkte A_1 und B_1 des Gitterbalkens dürfen als feste Punkte betrachtet werden, welche sowohl vertical abwärts als aufwärts gerichtete Gegendrücke zu leisten fähig sind.*) Die durch Abkühlung hervorgebrachte Verkürzung der Kette würde mit einer Durchbiegung des Gitterbalkens nach oben hin verbunden sein. (S. Fig. **466**.) Vermöge seiner Steifigkeit setzt der Gitterbalken

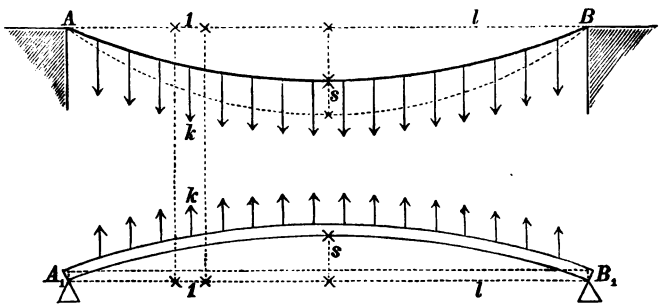


Fig. 466.

dieser Durchbiegung einen gewissen Widerstand entgegen, welcher auf die parabolische Kette wie eine gleichförmig über die Horizontal-Projection derselben vertheilte Belastung k pro Längeneinheit wirkt und den Scheitelpunkt der Kette verhindert, bis zu derjenigen Höhe zu steigen, welche derselbe ohne den Widerstand des steifen Balkens erreichen würde. Es ist daher die wirkliche Hebung s gleich dem Ueberschusse der **Hebung** s_1, welche durch

*) Die Zulässigkeit dieser Annahme wird in § 66 bewiesen.

die Abkühlung allein hervorgebracht worden wäre, über die **Senkung** s_2, welche die Belastung k für sich allein hervorgebracht hätte, zu setzen.

Wenn mit Δ das der Temperatur-Abnahme entsprechende Verkürzungsverhältniss ($\Delta = \frac{1}{2000}$ für $t = 41^0$ Celsius) bezeichnet wird, so ist:

$$156) \quad s_1 = \tfrac{3}{4} \Delta \frac{l^2}{h}.$$

Die der Belastung k entsprechende Horizontalspannung der Kette ist (nach § 8):

$$157) \quad H = \frac{k l^2}{2h}.$$

Wenn also mit E der Elasticitäts-Modulus des Ketten-Materials und mit F der Querschnitt der Kette im Scheitelpunkte (oder die Summe der Ketten-Querschnitte, wenn es mehre neben einander hängende Ketten sind) bezeichnet wird, so hat das von der Belastung k hervorgebrachte Verlängerungsverhältniss die Grösse:

$$158) \quad \delta = \frac{H}{F} \frac{1}{E} = \frac{k l^2}{2EFh},$$

und dieser Verlängerung würde die **Senkung** des Ketten-Scheitelpunktes entsprechen:

$$159) \quad s_2 = \tfrac{3}{4} \delta \frac{l^2}{h} = \tfrac{3}{8} \frac{k l^4}{EFh^2}.$$

Die wirkliche Hebung desselben ist daher:

$$160) \quad s = s_1 - s_2 = \tfrac{3}{4} \Delta \frac{l^2}{h} - \tfrac{3}{8} \frac{k l^4}{EFh^2}.$$

Ebensogross muss die nach oben hervorgebrachte Durchbiegung des Gitterbalkens in der Mitte sein, und da dieselbe durch die nach **oben** wirkende Belastung k pro Längeneinheit hervorgebracht wird, so ist:

$$161) \quad s = \tfrac{5}{24} \frac{k l^4}{E_1 \mathfrak{T}_1}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für s gefundenen Werthe erhält man die Gleichung:

$$162) \quad \tfrac{3}{4} \Delta \frac{l^2}{h} - \tfrac{3}{8} \frac{k l^4}{EFh^2} = \tfrac{5}{24} \frac{k l^4}{E_1 \mathfrak{T}_1}, \quad \text{oder}$$

$$163) \quad k = \frac{\frac{3}{4} \frac{\Delta}{h}}{\frac{3}{8} \frac{l^2}{EFh^2} + \frac{5}{24} \frac{l^2}{E_1 \mathfrak{T}_1}}.$$

Wenn mit F_1 die Summe der Querschnitte der vier Gurtungen des Gitterbalkens bezeichnet wird (s. Fig. **467**), so ist:

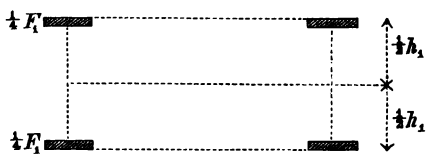
$$164) \quad \mathfrak{T}_1 = 4\,(\tfrac{1}{4}\,F_1)\,(\tfrac{1}{2}\,h_1)^2 = \frac{F_1\,h_1^2}{4},$$

und man erhält nach Substitution dieses Werthes die Gleichung:

$$165) \quad k = \frac{2\,\Delta\,E\,F\,h}{l^2\left(1 + \frac{20}{9}\cdot\frac{E}{E_1}\cdot\frac{F}{F_1}\cdot\frac{h^2}{h_1^2}\right)}.$$

Setzt man hierin beispielsweise $\Delta = \frac{1}{2000}$, $E = E_1 = 20000$, $h = 4000^{mm}$, $F = 7500\,\square^{mm}$, $F_1 = 15000\,\square^{mm}$, $l = 30000^{mm}$, so wird $k = 0{,}074896$ Kil. pro Millimeter oder circa 75 Kil. pro laufenden Meter.

Fig. 467.



Wenn die Grösse Δ negativ ist, so wird auch k negativ; die Wirkung einer Temperatur-**Erhöhung** besteht also darin, dass die Kette **ent**lastet und der Gitterbalken **be**lastet wird und zwar wiederum mit der Belastung k pro Längeneinheit. Wenn also die Brücke bei mittlerer Temperatur aufgestellt wird, und nachher die Temperatur um 41° (Celsius) von der mittleren sich entfernt — das eine Mal nach **unten**, das andere Mal nach **oben** hin — so wird im ersteren Falle die Kette dem Balken, im letzteren der Balken der Kette 75 Kil. pro laufenden Meter von der zu tragenden Belastung abnehmen.

Die Belastung k, welche man die Temperatur-Belastung nennen könnte, — und zwar **Kälte**-Belastung für die Kette, **Wärme**-Belastung für den Gitterbalken — erzeugt in denselben Temperatur-Spannungen, welche zu den von den Belastungen hervorgebrachten nachher hinzugerechnet werden müssen. Für die Kette hat diese Temperatur-Spannung nach Gleichung 157) die Grösse:

$$166) \quad S = \frac{k\,l^2}{2\,F\,h} = 1{,}1234 \text{ Kil. pro } \square^{mm},$$

und für den Gitterbalken erhält man nach den Gleichungen 151) und 164) die Temperatur-Spannung:

$$167) \quad S_1 = \frac{k\,l^2}{F_1\,h_1} = 2{,}996 \text{ Kil. pro } \square^{mm}.$$

§ 55.

Berechnung der von der permanenten Belastung hervorgebrachten Spannungen.

Wenn die Brücke mit einer gleichförmig über ihre Länge vertheilten Belastung von der Grösse p pro Längeneinheit belastet ist, und mit np der von der Kette, mit $(1-n)p$ der von dem Gitterbalken getragene Theil derselben bezeichnet wird (s. Fig. **468**, **469** und **470**), so hat nach Gleichung 159) die von solcher Be-

Fig. 468.

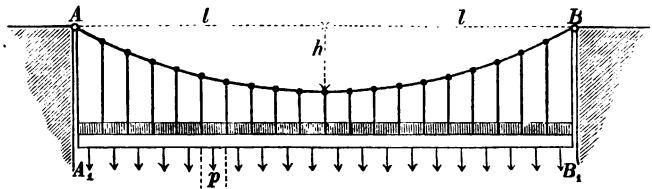


Fig. 469.

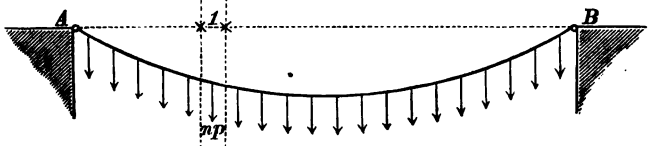
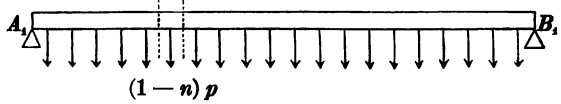


Fig. 470.



lastung hervorgebrachte Senkung des Ketten-Scheitelpunktes die Grösse:

$$168) \quad s = \tfrac{3}{8} \frac{n p l^4}{E F h^2},$$

und für die Durchbiegung des Gitterbalkens in der Mitte erhält man nach den Gleichungen 161) und 164) den Werth:

$$169) \quad s = \tfrac{5}{6} \frac{(1-n) p l^4}{E_1 F_1 h_1^2}.$$

Die Gleichsetzung dieser beiden Senkungen ergiebt für den Lastvertheilungs-Coefficienten n die Gleichung:

170) $\frac{3}{8}\frac{npl^4}{EFh^2} = \frac{5}{6}\frac{(1-n)pl^4}{E_1F_1h_1^2}$, oder

171) $n = \frac{1}{1+\frac{9}{20}\cdot\frac{E_1}{E}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{h_1^2}{h^2}}$.

Setzt man hierin wiederum $\frac{E_1}{E}=1$, $\frac{F_1}{F}=2$, $\frac{h_1}{h}=\frac{1,5}{4}$, so erhält man für n den Werth:

172) $n = \frac{1}{1+\frac{81}{640}} = 0{,}887656.$

Wenn also die permanente Belastung 375 Kil. pro laufenden Meter beträgt (oder $p=0{,}375$ ist), so vertheilt sich diese Belastung in der Weise, dass die Kette davon den Theil übernimmt:

173) $np = 0{,}33287$ Kil. p. mm. (= 332,87 Kil. p. Meter),

und der Gitterbalken mit dem Reste, nämlich:

174) $(1-n)p = 0{,}04213$ Kil. p. mm (= 42,13 Kil. p. Meter)

belastet wird. Diese Belastungen erzeugen resp. in Kette und Gitterbalken die Spannungen:

175) $S = \frac{npl^2}{2Fh} = 4{,}993$ Kil. p. □mm.

176) $S_1 = \frac{(1-n)pl^2}{F_1h_1} = 1{,}685$ Kil. p. □mm.

§ 56.

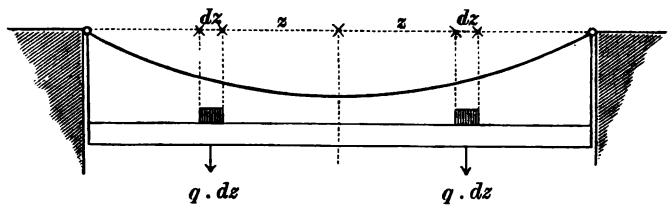
Berechnung der von einer ungleichförmig über die Brückenlänge vertheilten Belastung hervorgebrachten Spannungen.

Die parabolische Form der Kette bildet die Gleichgewichtsform **ausschliesslich** für eine **gleichförmig** über die Horizontal-Projection vertheilte Belastung, und da wegen geringer Grösse der Durchbiegung des mit ihr verbundenen steifen Gitterbalkens angenommen werden darf, dass die Kette ihre parabolische Form stets beibehält, so ist die fernere Annahme zulässig, dass — wie auch immer eine Belastung über die Brückenlänge vertheilt sein möge — die Kette unter allen Umständen an dem Tragen dieser Last in der Weise sich betheiligt, dass sie eine **gleichförmig** über die Horizontal-Projection vertheilte Belastung übernimmt — selbst

in dem Falle, wenn jene Last in einem einzelnen, an irgend einem Punkte der Brückenbahn aufgehängten Gewichte bestände.

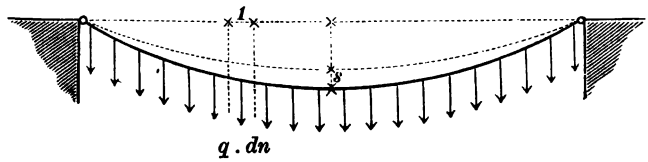
Denkt man sich in gleichen Abständen z von der Mitte an jeder Seite die unendlich kleinen Strecken dz mit den Belastungen q pro Längeneinheit belastet (Fig. **471**), und bezeichnet man mit

Fig. 471.



$q \,.\, dn$ die dadurch für die Kette hervorgebrachte Belastung pro Längeneinheit der Horizontal-Projection (Fig. **472**), so kann man

Fig. 472.

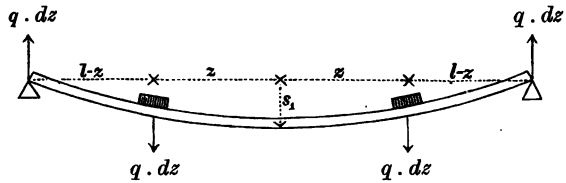


die Grösse dn berechnen, indem man wiederum die Senkung des Ketten-Scheitelpunktes gleich der Durchbiegung des Gitterbalkens in der Mitte setzt. Nach Gleichung 159) hat erstere die Grösse:

$$177) \quad s = \tfrac{3}{8} \frac{q\,dn \,.\, l^4}{E F h^2}.$$

Die Durchbiegung des Gitterbalkens ist gleich dem Ueberschusse derjenigen Durchbiegung s_1, welche die beiden Gewichte $q \,.\, dz$ für sich allein hervorbringen würden (Fig. **473**), über die-

Fig. 473.

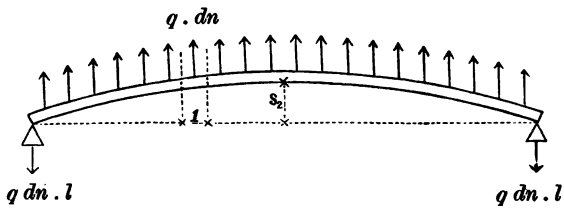


jenige nach **oben** gerichtete Durchbiegung s_2, welche eine nach **oben** wirkende Belastung $q \,.\, dn$ pro Längeneinheit für sich allein

hervorbringen würde (Fig. **474**). Für erstere ergiebt sich nach Gleichung 97) der Werth:

$$178)\quad s_1 = \frac{q\,dz}{6\,E_1\,\mathfrak{T}_1}(2\,l^3 - 3\,l\,z^2 + z^3),$$

Fig. 474.



für letztere nach Gleichung 99) der Werth:

$$179)\quad s_2 = \tfrac{5}{24}\,\frac{q\,dn\,.\,l^4}{E_1\,\mathfrak{T}_1}.$$

Also ist die wirkliche Durchbiegung des Gitterbalkens:

$$180)\quad s = s_1 - s_2 = \frac{q\,dz}{6\,E_1\,\mathfrak{T}_1}(2\,l^3 - 3\,l\,z^2 + z^3) - \tfrac{5}{24}\,\frac{q\,dn\,.\,l^4}{E_1\,\mathfrak{T}_1}.$$

Durch Gleichsetzung der beiden für s gefundenen Werthe erhält man die Gleichung:

$$181)\quad \tfrac{3}{8}\,\frac{q\,dn\,.\,l^4}{E\,F\,h^2} = \frac{q\,dz}{6\,E_1\,\mathfrak{T}_1}(2\,l^3 - 3\,l\,z^2 + z^3) - \tfrac{5}{24}\,\frac{q\,dn\,.\,l^4}{E_1\,\mathfrak{T}_1},$$

oder:

$$182)\quad dn = \frac{(2\,l^3 - 3\,l\,z^2 + z^3)\,dz}{\tfrac{5}{4}\,l^4\left(1 + \tfrac{9}{5}\,\frac{E_1\,\mathfrak{T}_1}{E\,F\,h^2}\right)}.$$

Setzt man wiederum nach Gleichung 164) $\mathfrak{T}_1 = \frac{F_1\,h_1^2}{4}$ und integrirt man zwischen den Grenzen z_1 und z_2 einerseits, und zwischen den Grenzen n_1 und n_2 andererseits, so erhält man die Gleichung:

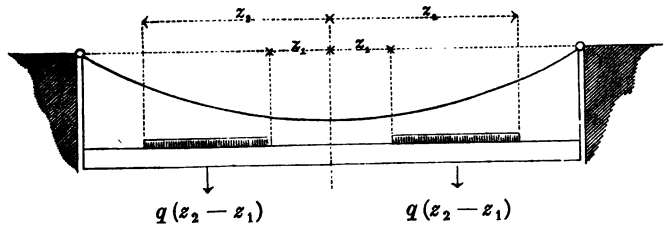
$$183)\quad \int_{n}^{n_2} dn = \int_{z_1}^{z_2} \frac{(2\,l^3 - 3\,l\,z^2 + z^3)\,dz}{\tfrac{5}{4}\,l^4\left(1 + \tfrac{9}{20}\cdot\frac{E_1}{E}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{h_1^2}{h_2}\right)},\quad \text{oder}$$

$$184)\quad n_2 - n_1 = \frac{2\,l^3\,(z_2 - z_1) - l\,(z_2^3 - z_1^3) + \tfrac{1}{4}\,(z_2^4 - z_1^4)}{\tfrac{5}{4}\,l^4\left(1 + \tfrac{9}{20}\cdot\frac{E_1}{E}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{h_1^2}{h^2}\right)}.$$

Es würde also bei dem in Fig. **475** dargestellten Belastungszustande die Kette eine gleichförmig über die Horizontal-Projection

vertheilte Belastung von der Grösse $(n_2 - n_1)q$ pro Längeneinheit zu tragen haben.

Fig. 475.



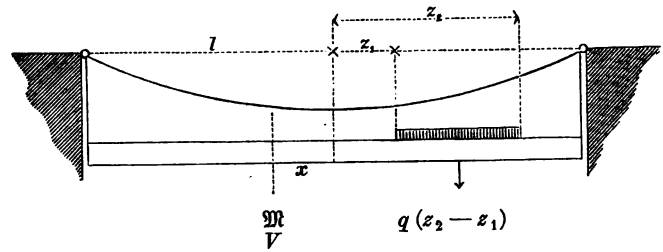
Setzt man $z_1 = 0$, $z_2 = l$ und $n_1 = 0$, $n_2 = n$, so erhält man:

$$185) \quad n = \frac{1}{1 + \frac{9}{20} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2}} = \frac{640}{721} = 0{,}887656,$$

als wiederum denselben Werth, welcher bereits in Gleichung 172) für eine gleichförmig über die ganze Brückenlänge vertheilte Belastung gefunden wurde.

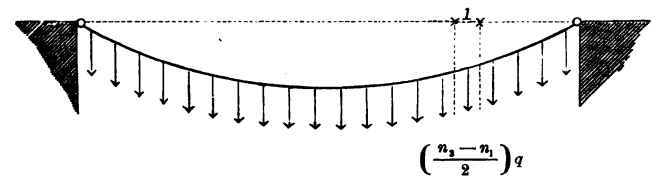
Offenbar liefert zu der von der Kette zu tragenden Belastung $(n_2 - n_1)q$ (pro Längeneinheit der Horizontal-Projection) das auf der **linken** Brückenhäfte liegende Gewicht denselben Beitrag, wie

Fig. 476.



das auf der **rechten** Seite liegende, folglich jedes von beiden die **Hälfte**. Es würde also bei dem in Fig. **476** dargestellten Belastungs-

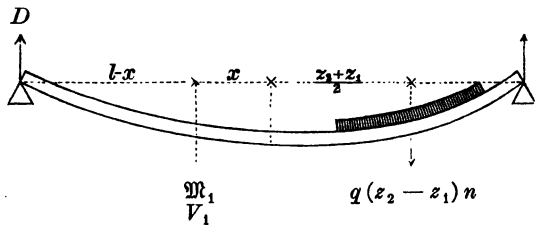
Fig. 477.



zustande die Kette mit der Belastung $\left(\frac{n_2 - n_1}{2}\right)q$ pro Längeneinheit der Horizontal-Projection belastet sein (Fig. **477**); der Gitter-

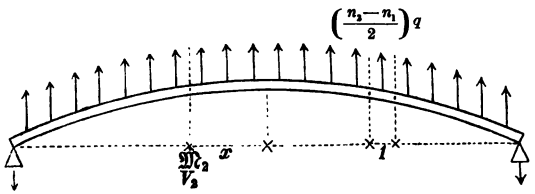
balken aber würde eine Biegung erleiden, welche man betrachten kann als zusammengesetzt aus den beiden einzelnen Biegungen, welche einerseits die Belastung $q(z_2 - z_1)$ nach **unten** hin (Fig. **478**),

Fig. 478.



andererseits die nach oben wirkende Belastung $\left(\frac{n_2 - n_1}{2}\right) q$ pro Längeneinheit nach **oben** hin erzeugen würde (Fig. **479**). Es würde

Fig. 479.



also z. B. das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ im Abstande x links von der Mitte gleich dem Ueberschusse des aus Fig. **478** sich ergebenden Biegungsmomentes:

$$186) \quad \mathfrak{M}_1 = D(l - x)$$

über das aus Fig. **479** sich ergebende Biegungsmoment:

$$187) \quad \mathfrak{M}_2 = \left(\frac{n_2 - n_1}{2}\right) q \left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right)$$

zu setzen sein, folglich die Grösse haben:

$$188) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 = D(l - x) - \left(\frac{n_2 - n_1}{2}\right) q \left(\frac{l^2 - x^2}{2}\right);$$

und für die verticale Abscheerungskraft V an derselben Stelle ergiebt sich auf gleiche Weise der Werth:

$$189) \quad V = V_1 - V_2 = D - \left(\frac{n_2 - n_1}{2}\right) q\, x.$$

In diesen Gleichungen ist nach Fig. **478** für D der Werth zu substituiren:

$$190) \quad D = q \left(\frac{z_2 - z_1}{2}\right) \left[1 - \left(\frac{z_2 + z_1}{2l}\right)\right].$$

Als positive Richtungen für $\mathfrak{M}$ und V sind hier diejenigen gewählt, bei welchen die entsprechenden Kraftwirkungen in demselben Sinne wie bei der vollbelasteten Brücke stattfinden.

§ 57.

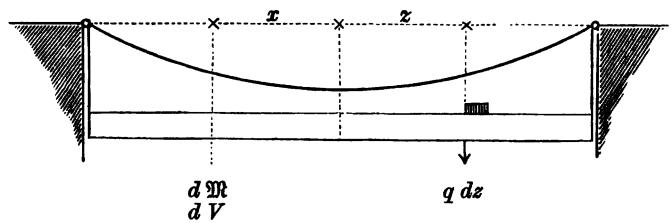
Ermittelung der ungünstigsten Belastungszustände für den Gitterbalken.

Um diejenigen Belastungszustände zu finden, bei welchen resp. das Biegungsmoment $\mathfrak{M}$ und die verticale Abscheerungskraft V an einer bestimmten Stelle ihre Maximalwerthe erreichen, hat man zunächst diejenigen Punkte aufzusuchen, an welchen eine Belastung angebracht werden müsste, um an jener Stelle resp. die Wirkungen $\mathfrak{M} = 0$ oder $V = 0$ hervorzubringen. Diese Punkte scheiden diejenigen Strecken, deren Belastungen **positive** Werthe resp. für $\mathfrak{M}$ oder V hervorbringen, von den Strecken, deren Belastungen **negative** Werthe hervorbringen, und sind bei den späteren Berechnungen der Maximalspannungen als Grenzpunkte für die belasteten Strecken anzunehmen.

Die in den Gleichungen 188) und 189) für $\mathfrak{M}$ und V gefundenen Werthe können betrachtet werden als zusammengesetzt aus den einzelnen Beiträgen, welche die unendlich kleinen Theile der Belastung $q(z_2 - z_1)$ dazu liefern.

Wenn mit $d\mathfrak{M}$ und dV resp. die unendlich kleinen Beiträge bezeichnet werden, welche die im Abstande z **rechts** von der Mitte angebrachte Belastung $q\,dz$ zu den Grössen $\mathfrak{M}$ und V liefert (Fig. **480**), so ergeben sich — auf dieselbe Weise, wie oben in

Fig. 480.



Bezug auf die Belastung einer endlichen Strecke $z_2 - z_1$ gezeigt wurde — die Gleichungen:

$$191)\quad d\mathfrak{M} = \frac{q\,dz\,(l-z)(l-x)}{2l} - \frac{q\,dn\,(l^2-x^2)}{4}.$$

$$192)\quad dV = \frac{q\,dz\,(l-z)}{2l} - \frac{q\,dn}{2}\,.\,x.$$

Hierin ist für dn der in Gleichung 182) gefundene Werth zu substituiren, und wenn man zugleich die Grösse $(l-z)$ als gemeinschaftlichen Factor der alsdann auf der rechten Seite stehenden Glieder voranstellt, so nehmen diese Gleichungen die Formen an:

193) $$d\mathfrak{M} = \frac{q\,dz\,(l-z)\,(l-x)}{2\,l}\left\{1 - \frac{2\,(l+x)\,(2\,l^2+2\,l\,z-z^2)}{l^3\left(5+9\,\frac{E_1\,\mathfrak{T}_1}{E\,F\,h^2}\right)}\right\}$$

194) $$dV = \frac{q\,dz\,(l-z)}{2\,l}\left\{1 - \frac{4\,x\,(2\,l^2+2\,l\,z-z^2)}{l^3\left(5+9\,\frac{E_1\,\mathfrak{T}_1}{E\,F\,h^2}\right)}\right\}.$$

Setzt man zunächst den für $d\mathfrak{M}$ gefundenen Ausdruck gleich Null, so erhält man durch Auflösung der daraus sich ergebenden quadratischen Gleichung für z denjenigen Werth $z=u$, welcher den Punkt bezeichnet, wo auf der **rechtsseitigen** Brückenhälfte ein Gewicht liegen muss, wenn dasselbe an der im Abstande x **links** von der Mitte befindlichen Stelle des Gitterbalkens das Biegungsmoment Null hervorbringen soll. Jene quadratische Gleichung erscheint zunächst in der Form:

195) $$\frac{l^3\left(5+9\,\frac{E_1\,\mathfrak{T}_1}{E\,F\,h^2}\right)}{2\,(l+x)} = 2\,l^2 + 2\,l\,u - u^2$$

und man erhält durch Auflösung derselben, wenn man zugleich wiederum $\mathfrak{T}_1 = \frac{F_1\,h_1^2}{4}$ setzt, den Werth:

196) $$\frac{u}{l} = 1 - \sqrt{\frac{6\,x + l\left(1 - \frac{9}{4}\cdot\frac{E_1}{E}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{h_1^2}{h^2}\right)}{2\,(l+x)}}.$$

Wenn man auf gleiche Weise mit der für dV gefundenen Gleichung verfährt, so erhält man für denjenigen Werth $z=v$, welcher den Punkt bezeichnet, wo auf der **rechtsseitigen** Brückenhälfte ein Gewicht liegen muss, um die Verticalkraft Null hervorzubringen an der im Abstande x **links** von der Mitte befindlichen Stelle, die Gleichung:

197) $$\frac{l^3}{4\,x}\left(5+9\,\frac{E_1\,\mathfrak{T}_1}{E\,F\,h^2}\right) = 2\,l^2 + 2\,l\,v - v^2, \quad \text{oder}$$

198) $$\frac{v}{l} = 1 - \sqrt{3 - \frac{l}{4\,x}\left(5 + \tfrac{9}{4}\cdot\frac{E_1}{E}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{h_1^2}{h^2}\right)}.$$

Setzt man wiederum $\frac{E_1}{E}=1$, $\frac{F_1}{F}=2$, $\frac{h_1}{h}=\frac{1{,}5}{4}$, so nehmen die resp. für u und v gefundenen Gleichungen die einfacheren Formen an:

199) $$\frac{u}{l} = 1 - \sqrt{\frac{768\,x + 47\,l}{256\,(l+x)}}.$$

200) $$\frac{v}{l} = 1 - \sqrt{3 - \frac{721\,.\,l}{512\,.\,x}}.$$

Diese beiden Gleichungen beziehen sich auf den Fall, in welchem die Belastung rechts von der betreffenden Stelle sich befindet. Wenn mit u_1 und v_1 resp. die Abstände **links** von der Mitte bezeichnet werden, in welchen die Belastungen sich befinden müssen, um resp. Biegungsmoment und Verticalkraft Null hervorzubringen an der weiter rechts im kleineren Abstande x links von der Mitte gelegenen Stelle, so ergeben sich für diese andern beiden Nullpunkte die Gleichungen:

201) $$\frac{u_1}{l} = 1 - \sqrt{\frac{47\,.\,l - 768\,.\,x}{256\,.\,(l-x)}},$$

202) $$\frac{v_1}{l} = 1 - \sqrt{3 + \frac{721}{512} \cdot \frac{l}{x}},$$

welche man aus den beiden vorhergehenden durch Vertauschung von $+x$ mit $-x$ erhält. Die letzteren 4 Gleichungen liefern die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe.

$\frac{x}{l}$	$\frac{u}{l}$	$\frac{u_1}{l}$	$\frac{v}{l}$	$\frac{v_1}{l}$
− 1	. . . . .	+ 0,2616	. . . . .	− 0,2616
− 0,75	. . . . .	− 0,18	. . . . .	− 0,0594
− 0,7041	. . . . .	. . . . .	. . . . .	0
− 0,5	. . . . .	− 0,0594	. . . . .	+ 0,5715
− 0,4694	. . . . .	. . . . .	. . . . .	+ 1
− 0,4082	. . . . .	0		
− 0,25	. . . . .	+ 0,1358		
− 0,24	. . . . .	+ 0,1464		
− 0,2	. . . . .	+ 0,1919		
− 0,125	. . . . .	+ 0,29535		
− 0,0612	+ 1	+ 0,4118		
0	+ 0,5715	+ 0,5715		
+ 0,0612	+ 0,4118	+ 1		
+ 0,125	+ 0,29535			
+ 0,2	+ 0,1919			
+ 0,24	+ 0,1464			
+ 0,25	+ 0,1358			
+ 0,4082	0			
+ 0,4694	. . . . .	. . . . .	+ 1	
+ 0,5	− 0,0594	. . . . .	+ 0,5715	
+ 0,7041	. . . . .	. . . . .	0	
+ 0,75	− 0,18	. . . . .	− 0,0594	
+ 1	− 0,2616	. . . . .	− 0,2616	

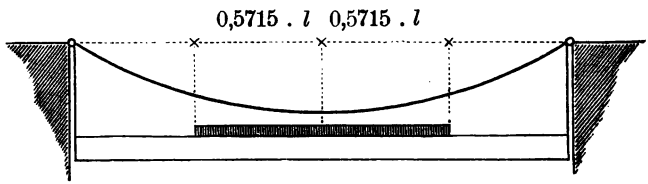
§ 58.

Berechnung der von der mobilen Last in den Gurtungen des Gitterbalkens hervorgebrachten Spannungen.

Die obige Tabelle zeigt hinsichtlich der Biegungsmomente, dass für alle Werthe von x, die zwischen den Grenzen $+ 0{,}0612 \,.\, l$ und $- 0{,}0612 \,.\, l$ liegen, immer **zwei** Nullpunkte vorhanden sind (wenn man abkürzungsweise den Punkt, wo das Gewicht liegen muss, um an der im Abstande x links von der Mitte befindlichen Stelle das Biegungsmoment Null hervorzubringen, den Nullpunkt nennt). Für alle übrigen Stellen giebt es allemal nur **einen** Nullpunkt.

Für $x = 0$, d. h. für die Mitte des Gitterbalkens liegen die beiden Nullpunkte in den gleichen Abständen $u = u_1 = 0{,}5715 \,.\, l$ rechts und links von der Mitte. Diese beiden Nullpunkte bilden die Grenzen zwischen den Strecken, deren Belastungen **positive** und den Strecken, deren Belastungen **negative** Biegungsmomente in der Mitte des Gitterbalkens hervorbringen. Man erhält also das grösste **positive** Biegungsmoment in der Mitte, wenn man ausschliesslich die ersteren, und das grösste **negative**, wenn man ausschliesslich die letzteren belastet annimmt. Es würde also z. B. bei dem in Fig. **481** dargestellten Belastungszustande das positive

Fig. 481.



Biegungsmoment in der Mitte des Gitterbalkens seinen grössten Werth annehmen und die demselben entsprechende Biegungsspannung auf folgende Weise zu berechnen sein.

Man erhält zunächst aus Gleichung 183), indem man auf der linken Seite zwischen den Grenzen $n_1 = 0$ und $n_2 = n$, auf der rechten Seite zwischen den Grenzen $z_1 = 0$ und $z_2 = 0{,}5715 \,.\, l$ integrirt den Werth:

$$203) \quad n = \frac{2 l^3 z - l z^3 + \frac{1}{4} z^4}{\frac{5}{4} l^4 \left(1 + \frac{9}{20} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{F} \cdot \frac{h_1^2}{h^2}\right)} = 0{,}6983.$$

Nimmt man an, dass die Totalbelastung der vollbelasteten Brücke 0,575 Kil. pro Millimeter beträgt, und dass dieselbe aus einer permanenten $p = 0{,}375$ Kil. und einer mobilen $m = 0{,}2$ Kil. pro Millimeter sich zusammensetzt, so würde die von der mobilen Last allein in der Mitte hervorgebrachte Maximalspannung zu berechnen sein aus der Voraussetzung, dass ausschliesslich die in Fig. **481** bezeichnete Strecke mit dem Gewichte $m = 0{,}2$ Kil. pro Millimeter belastet ist, wobei die Kette eine Belastung von der Grösse $n \,.\, m = 0{,}6983 \,.\, 0{,}2 = 0{,}1396$ Kil. pro Millimeter ihrer Horizontal-Projection erhält. Das Biegungsmoment in der Mitte ist also:

$$204) \quad \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2,$$

wenn mit $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ resp. die Biegungsmomente bezeichnet werden, welche den in Fig. **482** und Fig. **483** angedeuteten Biegungszuständen entsprechen. Diese Biegungsmomente sind:

Fig. 482.

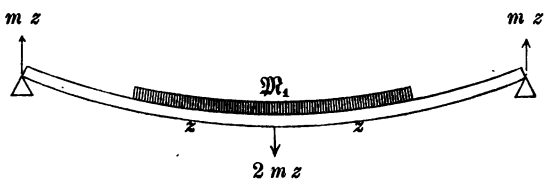
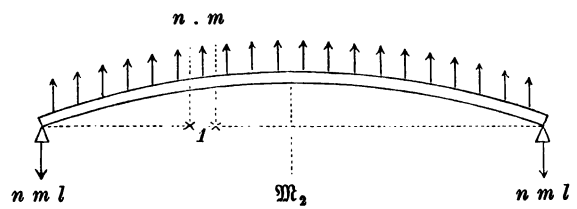


Fig. 483.



$$205) \quad \mathfrak{M}_1 = m z l - \frac{m z^2}{2},$$

$$206) \quad \mathfrak{M}_2 = \frac{n m l^2}{2}.$$

Die hervorgebrachte Biegungsspannung S_m ist nunmehr zu berechnen aus der Gleichung:

$$207) \quad \frac{S_m \,.\, \mathfrak{T}_1}{\frac{1}{2} h_1} = \mathfrak{M} = \frac{S_m \,.\, F_1 \, h_1}{2}, \quad \text{oder:} \quad S_m = \frac{2\,\mathfrak{M}}{F_1 \, h_1},$$

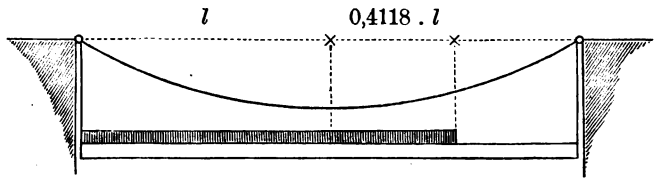
und man erhält nach Substitution der oben angenommenen Zahlenwerthe:

$$208) \quad S_m = \frac{0{,}0237 \,.\, l^2}{F_1 \, h_1} = 0{,}948 \text{ Kil. pro } \square^{mm}.$$

Es wirkt also — wie Gleichung 176) zeigt — diese Belastung gerade so, wie wenn der Gitterbalken allein eine gleichförmig über seine **ganze** Länge vertheilte Belastung von 23,7 Kil. pro Meter zu tragen hätte (während bei Belastung der ganzen Brückenlänge diese äquivalente Belastung nur 22,5 Kil. betragen würde).

An der Stelle im Abstande $x = +\,0{,}0612\,.\,l$ links von der Mitte würde (nach obiger Tabelle) bei dem in Fig. **484** dargestellten

Fig. 484.

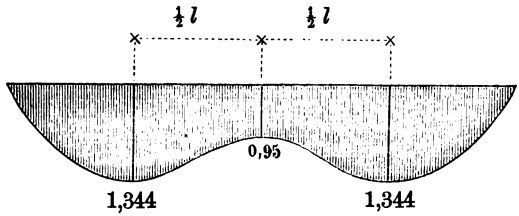


Belastungszustande das der mobilen Last entsprechende Biegungsmoment sein Maximum erreichen. Nach Gleichung 183) erhält man — indem man auf der rechten Seite einmal zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = 0{,}4118\,.\,l$, ein anderes Mal zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = l$ integrirt und die beiden auf solche Weise erhaltenen Werthe zusammen addirt — für diesen Belastungszustand den Werth $n = 0{,}714$, worauf dann auf ähnliche Weise, wie oben durch die Figuren **482** und **483** erläutert wurde, für die Spannung in den Gurtungen der Werth sich ergiebt:

$$209)\quad S_m = \frac{0{,}0245\,.\,l^2}{F_1\,.\,h_1} = 0{,}98 \text{ Kil. pro } \square^{mm}.$$

Wenn man auf solche Weise für die verschiedenen Werthe von x die zugehörigen Werthe von S_m berechnet und das Gesetz, nach welchem S_m mit x sich ändert, graphisch darstellt, so erhält man eine Kurve, welche ungefähr die in Fig. **485** angegebene Form

Fig. 485.



hat und zeigt, dass für $x = \frac{1}{2}\,l$ das der mobilen Last entsprechende Biegungsmoment seinen grössten Werth annimmt.

§ 59.

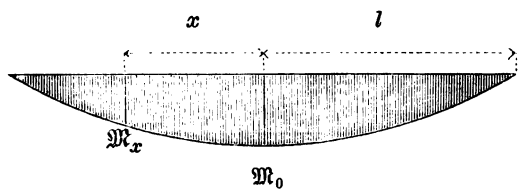
Berechnung der Maximalspannungen in den Gurtungen des Gitterbalkens.

Um die grösste in dem Gitterbalken überhaupt vorkommende Biegungsspannung zu finden, hat man zu berücksichtigen, dass die von der permanenten Belastung hervorgebrachte Biegungsspannung nach einem **anderen** Gesetze sich ändert. Es ist nämlich, wenn mit $\mathfrak{M}_0$ das dem Werthe $x = 0$ entsprechende, von der permaneten Last hervorgebrachte Biegungsmoment bezeichnet wird, das Biegungsmoment im Abstande x von der Mitte zu bestimmen nach der Gleichung:

$$210) \quad \mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_0 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right),$$

und die graphische Darstellung des Gesetzes, nach welchem $\mathfrak{M}_x$ mit x sich ändert, führt zu der Parabel Fig. **486**. Nach demselben

Fig. 486.



Gesetze ändert sich auch die diesem Biegungsmomente entsprechende Biegungsspannung S_p, und da nach Gleichung 176) dieselbe in der Mitte 1,685 Kil. beträgt, so ergiebt sich für S_p die Gleichung:

$$211) \quad S_p = 1{,}685 \left(1 - \frac{x_2}{l_2}\right).$$

Nach ebendemselben Gesetze ändert sich auch die Temperaturspannung S_t mit dem Abstande von der Mitte, und da nach Gleichung 167) dieselbe in der Mitte 2,996 Kil. beträgt, so ist S_t zu bestimmen aus der Gleichung:

$$212) \quad S_t = 2{,}996 \left(1 - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Hiernach ergeben sich für die Maximalspannungen an den verschiedenen Punkten die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe.

Werthe von	Spannungen in den Gurtungen des Gitterbalkens, hervorgebracht durch			
	mobile Last	permanente Last	Temperatur-Aend.	alle 3 zusammen
$\frac{x}{l}$	S_m	S_p	S_t	$S_m + S_p + S_t$
0	0,95	1,685	2,996	5,63
0,0612	0,98	1,68	2,98	5,64
0,125	1,07	1,66	2,95	5,68
0,2	1,15	1,62	2,88	5,64
0,24	1,20	1,59	2,82	5,61
0,25	1,22	1,58	2,81	5,61
0,408	1,34	1,40	2,48	5,24
0,5	1,344	1,26	2,25	4,85
0,6	1,28	1,08	1,92	4,28
0,75	1,0	0,74	1,31	3,05
1	0	0	0	0

Diese Tabelle zeigt, dass die Spannung in den Gurtungen im Abstande $x = \frac{1}{5} l$ von der Mitte am grössten wird, und dass diese Maximalspannung 5,68 Kil. pro Quadratmillimeter des Querschnitts beträgt. Es ist jedoch zu berücksichtigen, dass diese Spannungen unter Umständen noch eine weitere Vergrösserung erleiden können, einerseits durch den Druck des Windes gegen die Seitenfläche der Brücke, andererseits durch den Einfluss der Dehnung der Spannketten. Die von diesen beiden Ursachen hervorgebrachten Wirkungen werden in § 62 und § 63 noch näher bestimmt werden.

§ 60.

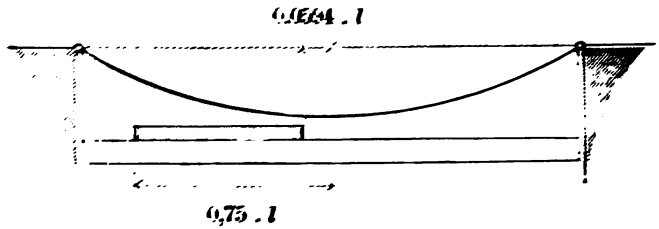
Berechnung der von der mobilen Last hervorgebrachten Abscheerungskraft.

Die Tabelle am Ende des § 57 zeigt hinsichtlich der verticalen Abscheerungskräfte, dass zu jedem Werthe von x nur **ein** Nullpunkt gehört, d. h. es giebt allemal nur **einen** Punkt, dessen Belastung an jener Stelle die Verticalkraft Null hervorbringt. Dieser Nullpunkt bildet die **eine** Belastungsscheide; es giebt jedoch noch eine **zweite**, und diese zweite wird allemal durch jene Stelle, für welche die Verticalkraft bestimmt werden soll, **selbst** gebildet.

So z. B. würde für die Stelle im Abstande $x = 0{,}75 \cdot l$ links von der Mitte bei dem in Fig. **487** dargestellten Belastungszustande die Verticalkraft V_m ihr Maximum erreichen. Für

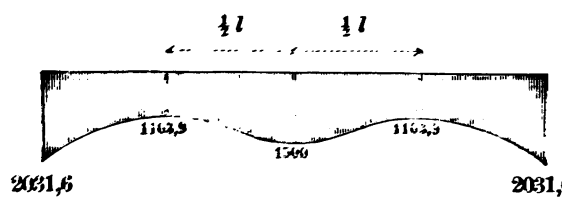
diesen Belastungszustand erhält man nach Gleichung 183 den Werth: $n = 0{,}3688$ und nach Gleichung 184 den Werth: $V_m = D - n\,m\,x = 1250{,}8$ Kil. Wenn man auf gleiche Weise

Fig. 487.



für die übrigen Punkte die Werthe von V_m berechnet und das Gesetz, nach welchem V_m mit x sich ändert, graphisch darstellt, so erhält man eine Kurve von der in Fig. 488 dargestellten Form.

Fig. 488.



Diese Kurve zeigt, dass es für die von der mobilen Last hervorgebrachten verticalen Abscheerungskräfte V_m auf jeder Brückenhälfte 2 Maxima und 1 Minimum giebt. Das grössere Maximum beträgt 2031,6 Kil. und fällt auf den Endpunkt; das kleinere Maximum beträgt 1500 Kil. und fällt in die Mitte; das Minimum beträgt 1103,9 Kil. und fällt in den Abstand $\frac{1}{2}\,l$ von der Mitte.

§ 61.

Berechnung der Maximalspannungen in den Gitterstäben.

Von der permanenten Belastung übernimmt (nach Gleichung 174) der Gitterbalken auf seinen Antheil 42,13 Kil. pro Meter. Die von der permanenten Last hervorgebrachte Verticalkraft V_p ist in der Mitte Null und wächst nach den Enden hin, proportional dem Abstande von der Mitte, bis zur Grösse $30 \,.\, 42{,}13 = 1263{,}9$ Kil. Es ist also im Abstande x von der Mitte:

$$213)\quad V_p = 1263{,}9 \,.\, \frac{x}{l}.$$

Die Temperaturbelastung für den Gitterbalken beträgt (nach Gleichung 165) 75 Kil. pro Meter. Die von dieser Belastung hervorgebrachte Verticalkraft V_t ändert sich nach demselben Gesetze und beträgt an den Endpunkten $30 \cdot 75 = 2250$ Kil.; also ist:

$$214) \quad V_t = 2250 \cdot \frac{x}{l}.$$

Hiernach ergeben sich die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Zahlenwerthe.

Werthe von	Verticale Abscheerungskräfte, hervorgebracht durch			
	mobile Last	permanente Last	Temperat.-Aend.	alle 3 zusammen
$\frac{x}{l}$	V_m	V_p	V_t	$V_m + V_p + V_t$
0	1500	0	0	1500
0,25	1419,5	316,0	562,5	2298,0
0,5	1103,9	631,9	1125,0	2860,8
0,75	1250,8	947,9	1687,5	3886,2
1	2031,6	1263,9	2250	5545,5

Wenn also die Gitterwände durch Verticalständer in quadratische Felder eingetheilt sind, und in jedem Felde zwei Diagonalstangen sich kreuzen, welche nur Zugspannungen aufzunehmen fähig sind, so erhalten in jeder von beiden Tragwänden die Verticalständer Druckspannungen, welche an den Enden $\frac{5545,5}{2} = 2772,75$ Kil. betragen und von da nach der Mitte hin bis auf $\frac{1500}{2} = 750$ Kil. abnehmen. Die Spannungen der Diagonalen aber betragen an den Enden $\frac{5545,5}{\sqrt{2}} = 3921,3$ Kil. und nehmen nach der Mitte hin bis auf $\frac{1500}{\sqrt{2}} = 1060,7$ Kil. ab.

§ 62.

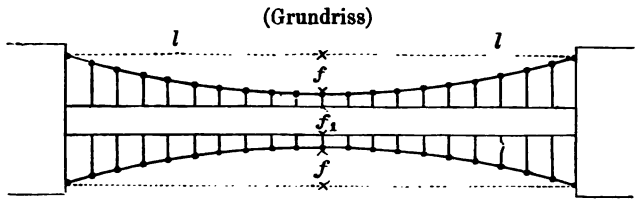
Berechnung der Spannungen in den Windketten und Windstreben.

Die vortheilhafteste Pfeilhöhe der Windketten kann man nach Gleichung 155) berechnen, indem man darin f statt h (s.

Fig. **489**), und indem man statt h_1 die **Breite** des Gitterbalkens $f_1 = 2{,}25^m$ setzt, also aus der Gleichung:

$$215)\quad \frac{f}{f_1} = \frac{\frac{3}{4}(\delta + \Delta)}{\frac{3}{8}\delta_1}.$$

Fig. 489.



Hierin ist für δ das zulässige Verlängerungsverhältniss der Windketten zu setzen, für Δ das Temperatur-Ausdehnungsverhältniss derselben und für δ_1 das zulässige Verlängerungsverhältniss der Gurtungen des Gitterbalkens — und zwar unter Abrechnung des bereits durch die vertical wirkenden Belastungen hervorgebrachten Werthes. Setzt man $f_1 = 2{,}25^m$, so ergeben sich aus obiger Gleichung die in nachfolgender Tabelle zusammengestellten Werthe.

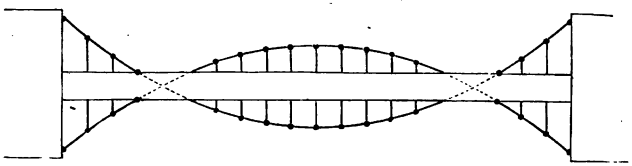
δ_1	δ	Δ	f
$\frac{6}{20000}$	$\frac{6}{20000}$	$\frac{1}{4000}$	$3{,}7125^m$
$\frac{6}{20000}$	$\frac{6}{20000}$	$\frac{1}{2000}$	$5{,}4^m$
$\frac{6}{20000}$	$\frac{8}{20000}$	$\frac{1}{4000}$	$4{,}3875^m$
$\frac{6}{20000}$	$\frac{9}{20000}$	$\frac{1}{4000}$	$4{,}725^m$
$\frac{6}{20000}$	$\frac{9}{20000}$	$\frac{1}{2000}$	$6{,}4125^m$
$\frac{5}{20000}$	$\frac{10}{20000}$	$\frac{1}{4000}$	$6{,}075^m$
$\frac{5}{20000}$	$\frac{10}{20000}$	$\frac{1}{2000}$	$8{,}1^m$

Bei der Auswahl des passendsten Werthes für f wird es darauf ankommen, wie weit man das Zusammentreffen aller ungünstigen Umstände als möglich oder wahrscheinlich betrachten will. Wollte man durch die Annahme dieses allerungünstigsten Falles bei der Wahl sich leiten lassen, so müsste man einen der letzteren grösseren Werthe für f wählen.

Wenn man indessen bedenkt, das nicht leicht das Maximum der Temperatur-Erhöhung mit einem Orkane zusammentreffen

wird, und dass selbst der Werth $\Delta = \frac{1}{4000}$ (entsprechend einer Temperatur-Erhöhung um 20,5° Celsius schon reichlich hoch gegriffen ist, so erscheint die Pfeilhöhe $f = 4^m$ für die Windketten als zur Noth genügend, wenn auch zugegeben werden muss, dass im Interesse der Widerstandsfähigkeit der Brücke eine grössere Pfeilhöhe wünschenswerth sein würde — falls die Breite der Landpfeiler dies zulassen sollte. Im Uebrigen ist hinsichtlich des letzterwähnten Punktes zu berücksichtigen, dass die beiden Windketten einander beliebig genähert werden können — im Nothfalle sogar bis über die Mitte hinaus, in welchem Falle die Brücke im Grundriss gesehen die in Fig. **490** dargestellte Form annehmen

Fig. 490.



würde — ohne dass dadurch in der Vertheilung des Winddrucks auf Gitterbalken und Windkette Etwas geändert wird.

Diese Vertheilung des Winddrucks kann man nunmehr nach Gleichung 171) berechnen, indem man darin f statt h und f_1 statt h_1 setzt, ferner φ als Querschnitt der Windkette statt F und $\frac{1}{2} F_1$ statt F_1 — letzteres aus dem Grunde, weil nur die unteren beiden Gurtungen durch die Windstreben zu einer horizontalen Tragwand verbunden sind, welche den Horizontalkräften einen Widerstand entgegensetzt.

Man erhält demnach für n die Gleichung:

$$216) \quad n = \frac{1}{1 + \frac{9}{40} \cdot \frac{E_1}{E} \cdot \frac{F_1}{\varphi} \cdot \frac{f_1^2}{f^2}}.$$

Setzt man $E = E_1$, $F_1 = 15000\ \square^{mm}$, $\varphi = 1250\ \square^{mm}$, $f = 4000^{mm}$, $f_1 = 2250^{mm}$, so erhält man für n den Werth:

$$217) \quad n = 0{,}5393.$$

Wenn also der Winddruck $w = 0{,}2$ Kil. pro Millimeter der Brückenlänge gesetzt wird, so ergiebt sich nach Gleichung 175) für die Spannung der Windkette in der Mitte der Werth:

$$218) \quad S = \frac{n w l^2}{2 \varphi f} = 9{,}7 \text{ Kil. pro } \square^{mm},$$

und die in den unteren Gurtungen des Gitterbalkens durch Winddruck hervorgebrachte Spannung hat nach Gleichung 176) die Grösse:

$$219) \quad S_1 = \frac{(1-n)\,w\,l^2}{\frac{1}{2}F_1 f_1} = 4{,}9 \text{ Kil. pro } \square^{mm}.$$

Es würde demnach bei unverändert bleibender Temperatur der Winddruck für die Windkette die Horizontal-Belastung:

$$220) \quad n \,.\, w = 0{,}10786 \text{ Kil.}$$

und für den Gitterbalken die Horizontal-Belastung:

$$221) \quad (1-n)\,w = 0{,}09214 \text{ Kil.}$$

pro Millimeter der Brückenlänge hervorbringen.

Zu diesen durch den Winddruck hervorgebrachten Horizontal-Belastungen würden bei etwa gleichzeitig stattfindender Temperatur-Aenderung von 41° Celsius noch die Temperatur-Belastungen hinzukommeu, welche auf dieselbe Weise wie oben (nach Gleichung 165) zu berechnen sind. Man findet, dass für diesen Fall:

$$222) \quad k = 0{,}0512 \text{ Kil.}$$

wird, d. h. bei einer Temperatur-**Erhöhung** von 41° (Celsius) würde der Gitterbalken der Windkette, und bei einer Temperatur-**Erniedrigung** von 41° würde die Windkette dem Gitterbalken 51,2 Kil. pro Meter von seiner Horizontal-Belastung abnehmen. Diesen Belastungsveränderungen entsprechen die Spannungsänderungen:

$$223) \quad S' = 4{,}608 \text{ Kil. pro } \square^{mm} \text{ für die Windkette,}$$

$$224) \quad S'_1 = 2{,}73 \text{ Kil. pro } \square^{mm} \text{ für den Gitterbalken.}$$

Das Maximum der durch Winddruck bei gleichzeitiger Temperatur-Erhöhung erzeugten Horizontal-Belastung des Gitterbalkens beträgt

$$225) \quad (1-n)\,w + k = 0{,}14334 \text{ Kil. pro Millimeter.}$$

Also ist das Maximum der dadurch hervorgebrachten horizontalen Abscheerungskraft für dessen horizontale Tragwand:

$$226) \quad [(1-n)\,w + k]\,l = 4300 \text{ Kil.}$$

Nach der Tabelle des § 61 beträgt für jede von den beiden **verticalen** Tragwänden das Maximum der verticalen Abscheerungskraft $\frac{5545{,}5}{2} = 2773$ Kil. Es würden also bei gleicher Anordnung der Gitterstäbe in der durch die Windstreben gebildeten horizontalen Gitterwand die Stäbe in dem Verhältniss

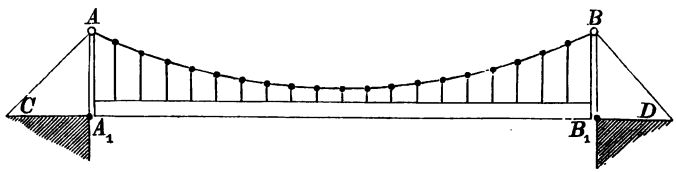
4300 : 2773 stärker gespannt werden, und hiernach die Querschnitte derselben zu wählen sein.

§ 63.

Einfluss der Dehnung der Spannketten.

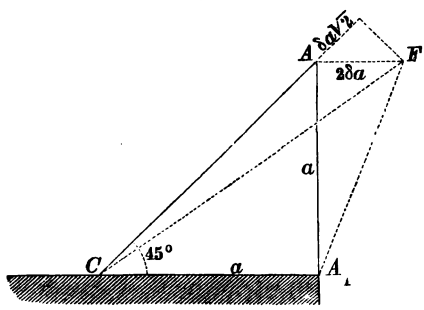
Bei der Berechnung der Spannungen in den Hauptketten und in den Tragwänden des Gitterbalkens wurden die Aufhängepunkte A und B der Kette vorläufig als absolut feste Punkte betrachtet (s. Fig. **491**). Wenn die Aufhängepunkte statt dessen durch die

Fig. 491.



oberen Endpunkte der verticalen Stangen AA_1 und BB_1 gebildet werden, welche um ihre unteren End- und Stützpunkte drehbar, durch die Spannketten AC und BD in ihrer aufrechten Lage erhalten werden, so wird eine Dehnung dieser Spannketten zur Folge haben, dass die Punkte A und B eine Bewegung nach der Mitte hin ausführen, und der Scheitelpunkt der Kette sich senkt. Diese Senkung bedingt eine fernere Veränderung in der Lastvertheilung, welche auf folgende Weise berechnet werden kann.

Fig. 492.



Für die Horizontalverschiebung des Aufhängepunktes A ergiebt sich aus Fig. **492** bei dem angenommenen Neigungswinkel von 45^0 und dem Verlängerungsverhältniss δ die Grösse $AF = 2\delta a$. Dieser Verschiebung entspricht (nach § 45) die Senkung des Kettenscheitelpunktes:

$$227) \quad s = \tfrac{3}{4}(2\delta a)\frac{l}{h}.$$

Wenn mit Δ dasjenige Verlängerungsverhältniss der Hauptkette bezeichnet wird, welchem die **gleiche** Senkung des Kettenscheitelpunktes entsprechen würde, so ist:

228) $s = \frac{3}{4} \Delta \frac{l^2}{h}$.

Die Gleichsetzung dieser beiden Werthe für s führt zu der Gleichung:

229) $\frac{\Delta}{\delta} = 2 \frac{a}{l}$.

Setzt man hierin $a = 4^m$, $l = 30^m$, so wird:

230) $\frac{\Delta}{\delta} = \frac{4}{15}$.

Es ist also nur nöthig, die früher bereits gefundene, durch Verlängerung der Hauptkette entstehende Mehrbelastung des Gitterbalkens mit der Zahl $1 + \frac{4}{15}$ zu multipliciren, um hiermit zugleich dem Einflusse einer gleichzeitig stattfindenden ebenso grossen Dehnung der Spannketten Rechnung zu tragen. Diese Regel gilt sowohl für positive als für negative Werthe des Verlängerungsverhältnisses δ.

Aus Gleichung 165) ergab sich eine Belastung von 75 Kil. pro Meter als die einer Temperatur-Erhöhung von 41° (Celsius) entsprechende Temperatur-Belastung des Gitterbalkens. Durch die gleichzeitig stattfindende Temperatur-Ausdehnung der Spannketten wird diese Mehrbelastung um $\frac{4}{15} . 75 = 20$ Kil., also auf die Grösse $(1 + \frac{4}{15}) . 75 = 95$ Kil. pro Meter erhöht. Die entsprechende Temperatur-Spannung in den Gurtungen des Gitterbalkens betrug in der Mitte 3 Kil. Dieselbe wird um $\frac{4}{15} . 3 = 0{,}8$ Kil. vergrössert, nimmt also den Werth an:

231) $S'_t = (1 + \frac{4}{15}) . 3 = 3{,}8$ Kil.

Die von der Temperatur-Belastung an den Enden des Gitterbalkens hervorgebrachte verticale Abscheerungskraft betrug 2250 Kil. Dieselbe wird um $\frac{4}{15} . 2250 = 600$ Kil. vergrössert, nimmt also den Werth an:

232) $V'_t = (1 + \frac{4}{15}) . 2250 = 2850$ Kil.

Die Spannung der Spannketten ist bei dem angenommenen Neigungswinkel von 45° stets $\sqrt{2}$ mal so gross als die Horizontal-Spannung der Hauptkette. Wäre also der Querschnitt der Spannkette ebenfalls $\sqrt{2}$ mal so gross als der Querschnitt der Hauptkette im Scheitelpunkte, so würde auch die Spannung pro Flächeneinheit — folglich auch das Elasticitäts-Ausdehnungs-Verhältniss in beiden stets dasselbe sein. Es würde in diesem Falle z. B. bei einer Spannung $S = 10$ Kil. pro Quadratmillimeter — entsprechend

einem Verlängerungsverhältniss $\frac{S}{E} = \frac{10}{20000}$ von derselben Grösse wie das oben angenommene Temperatur-Ausdehnungs-Verhältniss — die Ausdehnung der Spannketten eine weitere Vergrösserung der Spannungen in den Gurtungen des Gitterbalkens um 0,8 Kil. zur Folge haben; d. h. es würde der Einfluss einer solchen Elasticitäts-Ausdehnung der Spannketten einer abermaligen Vergrösserung der Temperatur-Belastung um 20 Kil. pro Meter gleich kommen.

Jedoch findet zwischen den Wirkungen der **Temperatur**-Ausdehnung der Spannketten und denen der **Elasticitäts**-Ausdehnung derselben der wesentliche Unterschied statt, dass das Maximum der von ersterer herrührenden Mehrbelastung — sowohl in positivem als in negativem Sinne genommen — mit jedem beliebigen Belastungszustande der Brücke zusammentreffen kann, während die Elasticitäts-Ausdehnung erstlich stets nur in positivem Sinne vorkommt und ferner das Maximum der durch dieselbe erzeugten Mehrbelastung des Gitterbalbens stets nur mit dem **Maximum** der Kettenspannung zusammentrifft — und dieses tritt gerade bei dem **Minimum** der Temperatur ein. Es wird daher in Wirklichkeit die wegen Elasticitäts-Ausdehnung der Spannketten in Rechnung zu bringende Mehrbelastung des Gitterbalkens weniger als 20 Kil. pro Meter betragen und der genauere Werth derselben auf folgende Weise zu berechnen sein.

Da die Elasticitäts-Ausdehnung der Spannketten — wie oben gezeigt wurde — denselben Einfluss hat, wie wenn die Ausdehnung der Hauptkette im Verhältniss 1 zu $1 + \frac{4}{15}$ **vergrössert**, oder wie wenn deren Elasticitäts-Modulus im Verhältniss $1 + \frac{4}{15}$ zu **1 verkleinert** würde, so findet man die unter Mitwirkung jener Spannketten-Verlängerung stattfindende Lastvertheilung, indem man überall in den betreffenden Gleichungen die Zahl E durch die Zahl $\frac{15}{19} E$ ersetzt. Man erhält dann nach Gleichung 171) für den Lastverheilungs-Coefficienten der permanenten Last den Werth:

$$233) \quad n_1 = 0{,}86184 \quad (\text{statt } n = 0{,}887656).$$

Es wird also der von dem Gitterbalken übernommene Theil der permanenten Last im Verhältniss:

$$234) \quad \frac{1 - n_1}{1 - n} = \frac{0{,}13816}{0{,}11234} = 1{,}23,$$

also um 23 Procent vergrössert, und in demselben Verhältniss wachsen die dadurch hervorgebrachten Spannungen in den Gurtungen, sowie die verticalen Abscheerungskräfte. Die Spannung S_p

in den Gurtungen betrug in der Mitte 1,685 Kil.; dieselbe nimmt nun den Werth an:

235) $S'_p = 1{,}685 \,.\, 1{,}23 = 2{,}07$ Kil.

Die verticale Abscheerungskraft V_p betrug an den Enden 1263,9 Kil. und erhält nunmehr die Grösse:

236) $V'_p = 1263{,}9 \,.\, 1{,}23 = 1554{,}3$ Kil.

Die Correction der Werthe für die von der mobilen Belastung hervorgebrachten Spannungen ist ebenfalls in der Weise auszuführen, dass man in den betreffenden Gleichungen überall die Zahl E durch die Zahl $\frac{1}{1}\frac{5}{9} E$ ersetzt, wobei zu berücksichtigen ist, dass auch die ungünstigsten Belastungszustände nun nicht mehr dieselben bleiben. Statt des in Fig. **481** dargestellten (dem Werthe $u = 0{,}5715 \,.\, l$ entsprechenden) Belastungszustandes ergiebt sich nun der dem Werthe $u = 0{,}685 \,.\, l$ entsprechende Belastungszustand als derjenige, bei welchem die Spannung S_m in der Mitte am grössten wird. Man findet für diesen Belastungszustand $n_1 = 0{,}7609$ und:

237) $S'_m = 1{,}12$ Kil. (statt $S_m = 0{,}95$ Kil.).

Ebenso würde man für $x = \frac{1}{2} l$ die zugehörigen Werthe $n_1 = 0{,}4082$ und $S'_m = 1{,}445$ Kil. finden.) Das Maximum der verticalen Abscheerungskraft V_m betrug (nach der Tabelle des § 61) 2031,6 Kil. und ergab sich für den dem Werthe $v = -0{,}2616 \,.\, l$ entsprechenden Belastungszustand. Statt dessen erhält man nun die Werthe $v = -0{,}245 \,.\, l$ und:

238) $V'_m = 2373$ Kil.

§ 64.

Recapitulation der Rechnungs-Resultate.

Für die Belastungen, Querschnitte und sonstigen Dimensionen wurden die nachfolgend zusammengestellten Zahlenwerthe angenommen:

$p = 375$ Kil. pro Meter (permanente Last),
$m = 200$ „ „ „ (mobile Last),
$w = 200$ „ „ „ (Winddruck),
$F = 7500$ □^{mm} (Querschnittssumme der Hauptketten),
$F.\sqrt{2} = 10600$ „ (Querschnittssumme der Spannketten),
$\varphi = 1250$ „ (Querschnitt jeder der beiden Windketten),

$F_1 = 15000$ □^{mm} (Querschnittssumme der 4 Gurtungen des Gitterbalkens),
$h = 4^m$ (Pfeilhöhe der Hauptketten),
$h_1 = 1{,}5^m$ (Höhe des Gitterbalkens),
$f = 4^m$ (Pfeilhöhe der Windketten),
$f_1 = 2{,}25^m$ (Breite des Gitterbalkens),
$2\,l = 60^m$ (Spannweite der Brücke).

Die Zugspannung der unteren Gurtungen des Gitterbalkens in der Mitte der Brücke wird am grössten bei ungünstigstem Belastungszustande, höchster Temperatur, stärkstem Winddruck, und zwar an der dem Winde abgewendeten Seite. Dieses Maximum setzt sich (nach den Gleichungen 235, 237, 231, 219, 224) aus den folgenden einzelnen Theilen zusammen:

$S'_p = 2{,}07$ Kil. pro □^{mm} (permanente Last),
$S'_m = 1{,}12$ „ „ „ (mobile Last),
$S'_t = 3{,}8$ „ „ „ (Temperatur-Belastung),
$S'_w = 4{,}9 + 2{,}73$ „ (Winddruck bei höchster Temperatur).

Durch Addition dieser Zahlen erhält man für dieses Spannungs-Maximum den Werth:

239) $S_{(max)} = 14{,}62$ Kil. pro □^{mm}.

Die gleichzeitig in den oberen Gurtungen in der Mitte der Brücke stattfindende Druckspannung setzt sich aus den ersteren drei Zahlenwerthen zusammen und beträgt 7 Kil. pro □^{mm}.

Das Maximum der verticalen Abscheerungskraft an den Enden des Gitterbalkens setzt sich (nach den Gleichungen 236, 238, 232) zusammen aus folgenden Theilen:

$V'_p = 1554$ Kil. (permanente Last),
$V'_m = 2373$ „ (mobile Last),
$V'_t = 2850$ „ (Temperatur-Belastung).

Durch Addition dieser 3 Zahlenwerthe erhält man für das Maximum der von den Gitterstäben aufzunehmenden Verticalkraft den Werth:

240) $V_{(max)} = 6777$ Kil.

Ebensogross ist auch das Maximum der Spannungssumme für die Hängestangen (AA_1 und BB_1 in Fig. **463**), an welchen die Enden des Gitterbalkens aufgehängt sind.

Bei voller Belastung würde die von der mobilen Last allein an den Enden des Gitterbalkens hergebrachte Verticalkraft $\frac{200}{375} \cdot 1554 = 829$ Kil. betragen. Durch Subtraction der Zahl V'_m

von diesem Werthe erhält man 829 — 2373 = — 1544 Kil. als Minimum der von der mobilen Last allein hervorgebrachten Verticalkraft. Man erhält also für das Minimum der totalen Verticalkraft an den Enden des Gitterbalkens den Werth:

$$241) \quad V_{(\min)} = + 1554 - 1544 - 2850 = - 2840 \text{ Kil.}$$

Es müssen also die betreffenden Hängestangen stark genug sein, um auch einen **Druck** von 2840 Kil. gelegentlich aufnehmen zu können.

Die Spannung der Hauptketten erreicht ihren grössten Werth bei voller Belastung der Brücke und niedrigster Temperatur. Die Totalbelastung der vollbelasteten Brücke beträgt 375 + 200 = 575 Kil. pro Meter, wovon die Kette (nach Gleichung 233) den Theil 0,862 . 575 = 495,56 Kil. pro Meter zu tragen hat. Hierzu kommt noch die Temperatur-Belastung (Kälte-Belastung), für welche im vorigen Paragraphen die Grösse 95 Kil. pro Meter gefunden wurde. Die Kette hat also im ungünstigsten Falle die Belastung 590,56 Kil. pro Meter ihrer Horizontal-Projection zu tragen. Dieser Belastung entspricht (nach Gleichung 166) die Spannung:

$$242) \quad S = \frac{0{,}59056 \,.\, 30000^2}{2 \,.\, 4000 \,.\, 7500} = 8{,}86 \text{ Kil. pro } \square^{mm}$$

für den Scheitelpunkt der Kette. Nach den Aufhängepunkten hin nimmt — wenn der Querschnitt überall gleich gross ist — die Spannung zu bis zur Grösse:

$$243) \quad 8{,}86 \,.\, \sqrt{1 + \left(\tfrac{8}{30}\right)^2} = 9{,}13 \text{ Kil. pro } \square^{mm}.$$

Die Spannketten erhalten ebenfalls eine Spannung von 8,86 Kil. pro $\square^{mm}$.

Wenn das Eigengewicht der Kette zu 4500 Kil. angenommen wird, so haben die Hängestangen die Maximal-Belastung 590,56 . 60 — 4500 = 30934 Kil. zu tragen, erhalten also eine jede die Spannung: $\frac{30934}{N}$, wenn ihre Anzahl = N ist.

Die Windketten würden bei stärkstem Winde und gleichzeitiger Temperatur-Erniedrigung um 41° Celsius (nach den Gleichungen 218) und 223) in der Mitte die Spannung erhalten:

$$9{,}7 + 4{,}6 = 14{,}3 \text{ Kil. pro } \square^{mm}.$$

Für die von den Windstreben aufzunehmende grösste horizontale Abscheerungskraft wurde (in Gleichung 226) die Grösse 4300 Kil. gefunden.

Die horizontalen Stangen, welche den Gitterbalken mit einer der Windketten verbinden, erhalten (nach den Gleichungen 220) und 222) eine jede die Maximal-Spannung

$$\frac{(107{,}86 + 51{,}2) \cdot 60}{N_1} = \frac{9540}{N_1}$$

wenn die Anzahl derselben $= N_1$ ist.

§ 65.

Vortheilhafteste Aufhängungsweise für den Gitterbalken.

Bei der Berechnung des Lastvertheilungs-Coefficienten n für die permanente Last wurde die Wirkung derselben auf eine Weise behandelt, welche nur bei einer besonderen Art der Aufstellung der Brücke gerechtfertigt sein würde. Es wurde nämlich angenommen, dass die leere Brücke in entlastetem Zustande — d. h. auch von der Wirkung ihres Eigengewichtes gänzlich befreit — in vollkommen spannungslosem Zustande sich befunden hatte, und dass das Eigengewicht wie eine neu hinzukommende fremde Last erst nachher seine Wirkung auszuüben begann. Da in Wirklichkeit aber die Wirkung des Eigengewichts von Anfang an schon vorhanden war, so wird die gemachte Voraussetzung nur dann zutreffen, wenn die Aufstellung zufällig auf eine solche besondere Weise ausgeführt wurde, dass die Höhen-Differenz zwischen dem Mittelpunkte der Brückenbahn und deren beiden Endpunkten genau dieselbe Grösse erhielt, wie sie aus jener Voraussetzung sich ergeben würde.

Indessen auch dann, wenn diese Bedingung nicht erfüllt ist, behalten die oben gefundenen Resultate ihre Gültigkeit, sobald man nur eine etwaige Abweichung von der genannten Aufstellungsweise als eine zu den bisher schon untersuchten Ursachen von Spannungen neu hinzukommende Spannungsursache mit in Rechnung bringt. Es würde also noch zu untersuchen sein, welche Aenderungen die bei einem gegebenen Temperatur- und Belastungs-Zustande bereits vorhandenen Spannungen erleiden würden durch das Anziehen der Schrauben an den Hängestangen, welche den Gitterbalken mit der Kette verbinden. Mit dieser Untersuchung lässt sich sodann noch eine zweite verbinden, die nämlich: auf welche Weise bei der Aufstellung jenes Anziehen der Schrauben erfolgen müsse, damit das beim Zusammentreffen aller ungünstigen

Umstände eintretende Maximum der Spannungen möglichst klein ausfalle.

Für die von der permanenten Last allein hervorgebrachte Senkung des Mittelpunktes der Brückenbahn erhält man nach Gleichung 169), wenn man darin, um die Dehnung der Spannketten zu berücksichtigen, die Zahl n durch die Zahl n_1 (Gleichung 233) ersetzt, den Werth:

$$244)\quad s = \frac{5}{6} \cdot \frac{0{,}13816 \,.\, 0{,}875 \,.\, 30000^4}{20000 \,.\, 15000 \,.\, 1500^2} = 51{,}81 \text{ Millim.},$$

und für die einem solchen Biegungszustande entsprechende Spannung in den Gurtungen wurde der Werth $S'_p = 2{,}07$ Kil. pro $\square^{mm}$ gefunden (Gleichung 235). Also nur dann, wenn der — im spannungslosen Zustande geradlinig vorausgesetzte — Gitterbalken diese Durchbiegung nach der Aufstellung wirklich zeigte, würden die oben gefundenen Spannungen die wirklich eintretenden sein. Angenommen aber z. B., man hätte hinterher durch Anziehen der Schrauben an den Hängestangen bewirkt, dass der Gitterbalken seine ursprüngliche, dem spannungslosen Zustande entsprechende geradlinige Form wieder annahm, so würde damit der von der permanenten Last zu der Totalspannung (Gleichung 239) gelieferte Beitrag von 2,07 Kil. ganz in Wegfall gebracht und die Maximal-Spannung von 14,62 auf 12,55 Kil. reducirt. Zugleich würde dadurch bewirkt, dass der bisher von dem Gitterbalken getragene Theil der permanenten Last im Betrage von 51,81 Kil. pro Meter nunmehr von der Kette mit übernommen wird.

Wäre man aber mit dem Anziehen der Schrauben noch weiter gegangen — hätte man dasselbe z. B. soweit fortgesetzt, dass eine Durchbiegung nach **oben** hin eintrat von derselben Grösse $s = 51{,}81$ Millim., so würde eine weitere Abnahme jener Maximalspannung um 2,07 Kil., also eine Reduction derselben bis auf 10,46 Kil. erfolgen, während die Mehrbelastung der Kette auf die Grösse: $2 \,.\, 51{,}81 = 103{,}62$ Kil. pro Meter der Horizontal-Projection gesteigert würde.

Um zu erfahren, wie weit man mit einer solchen, künstlich hervorzubringenden Veränderung in der Lastvertheilung vorgehen darf, hat man zunächst zu untersuchen, wie gross bei der ursprünglichen vorausgesetzten Aufstellungsweise das einer Durchbiegung des Gitterbalkens nach oben hin entsprechende **negative** Biegungsmoment im ungünstigsten Falle werden konnte — und

zwar in der Mitte des Gitterbalkens. Denn die Tabelle des § 59 zeigt, dass es — obwohl im Abstande $x = \frac{1}{2} l$ von der Mitte die mobile Last ihre Wirkung am stärksten äussert, doch wegen überwiegenden Einflusses der übrigen Biegungsursachen ausreicht, hierbei ausschliesslich die Biegungsspannungen in der Mitte zu berücksichtigen.

Für die bei voller Belastung der Brücke von der mobilen Last **allein** hervorgebrachte Spannung in den unteren Gurtungen erhält man nach Gleichung 235) den Werth:

$$245) \quad \mathfrak{S} = \tfrac{200}{375} \cdot 2{,}07 = 1{,}105 \text{ Kil.}$$

Wenn man hiervon den in Gleichung 237) gefundenen Werth $S'_m = 1{,}12$ Kil. subtrahirt, so erhält man:

$$246) \quad \mathfrak{S}_{(\min)} = -0{,}015 \text{ Kil.}$$

als kleinste **Zug**spannung oder grösste **Druck**spannung, welche durch die mobile Last allein an dieser Stelle hervorgebracht werden kann. (Im Abstande $x = \frac{1}{2} l$ würde man $\mathfrak{S}_{(\min)} = -0{,}616$ Kil. finden.) Zu dieser negativen Spannung kommt noch die dem Temperatur-Minimum entsprechende gleichfalls negative Temperatur-Spannung von — 3,8 Kil., sowie die vom Winddruck bei niedrigster Temperatur hervorgebrachte Spannung — (4,9 — 2,73) = — 2,17 Kil. Man erhält also mit Hinzurechnung der positiven Spannung $S'_p = +2{,}07$ Kil. für die grösste negative Spannung, welche in der unteren Gurtung bei der früher angenommenen Aufstellungsweise eintreten konnte, den Werth:

$$247) \quad S_{(\min)} = +2{,}07 - 0{,}015 - 3{,}8 - 2{,}17 = -3{,}915 \text{ Kil.}$$

Es erweist sich hiernach in der That als zweckmässig, die erwähnte Veränderung in der Lastvertheilung wirklich auszuführen, und zwar gerade in der Weise, wie sie oben als zweites Beispiel gewählt wurde: nämlich die Mitte des Gitterbalkens bis zur Höhe von 51,81 Millimetern über die natürliche, dem spannungslosen Zustande entsprechende Lage hinaufzuschrauben. Denn während bei der ursprünglich vorausgesetzten Aufstellungsweise die Spannung in der Mitte der unteren Gurtung zwischen den Extremen + 14,62 Kil. und — 3,915 Kil. schwanken würde, erreicht man durch die erwähnte Veränderung, dass nunmehr diese Spannung zwischen den Grenzen + 10,48 Kil. und — 8,055 Kil. bleibt, während die Spannung in der Kette dabei nur auf + 10,41 Kil. in der Mitte, und auf + 10,73 Kil. in der Nähe der

Aufhängepunkte gesteigert wird, entsprechend der Maximal-Belastung 590,56 + 103,62 = 694,18 Kil. pro Meter der Horizontal-Projection. Die Maximal-Belastung der Hängestangen würde dadurch auf 30934 + 60 . 103,62 = 37151 Kil., die Spannung jeder einzelnen auf $\frac{37151}{N}$ vergrössert.

Die an den Enden des Gitterbalkens wirkende verticale Abscheerungskraft wird um die Grösse 30 . 103,62 = 3109 Kil, vermindert. Man erhält also nach den Gleichungen 240) und 241) die Werthe:

$$248) \quad V_{max} = +6777 - 3109 = +3668 \text{ Kil.}$$
$$249) \quad V_{min} = -2840 - 3109 = -5949 \text{ Kil.}$$

Es müssten daher die Verticalstangen (AA_1 und BB_1 in Fig. **463**), an welchen die Enden des Gitterbalkens aufgehängt sind, stark genug sein, um gelegentlich eine Druckspannung von 5949 Kil. aufnehmen zu können.

Da die Durchbiegung von 51,81 Millimetern einer Belastung von 51,81 Kil. pro Meter für den Gitterbalken allein, oder einer Belastung der Brücke mit 375 Kil. pro Meter entspricht, so würde bei der hier empfohlenen Aufstellungsweise die Hinzufügung einer fremden Belastung von 375 Kil. pro Meter jene Durchbiegung wieder zum Verschwinden bringen. Man kann daher der Vorschrift für die Aufstellung auch die folgende Form geben: der Gitterbalken soll so aufgehängt werden, dass derselbe beim Belasten der Brücke mit einer fremden Belastung von 375 Kil. pro Meter seine natürliche Form annimmt — d. h. diejenige Form, welche derselbe z. B. annehmen würde, wenn man denselben auf die Seite legte auf horizontaler Ebene — und zwar bei einer Temperatur, welche das arithmetische Mittel bildet von höchster und niedrigster Temperatur.

Diese fremde Belastung kann auch durch eine Temperatur-Belastung dargestellt werden. Einer Temperatur-Erhöhung von 41° (Celsius) entsprach eine Belastung von 95 Kil. pro Meter für den Gitterbalken; daraus ergiebt sich für diejenige Temperatur-Erhöhung, bei welcher der Gitterbalken mit 51,81 Kil. pro Meter belastet wird, die Grösse:

$$250) \quad t = 41 \,.\, \frac{51{,}81}{95} = 21{,}24^0 \text{ (Celsius).}$$

Man kann daher denselben Zweck auch durch eine solche Aufstellungsweise erreichen, bei welcher der unbelastete Gitter-

balken seine natürliche Form annimmt, wenn die Temperatur um 21,24° (Celsius) über die mittlere Temperatur sich erhebt.

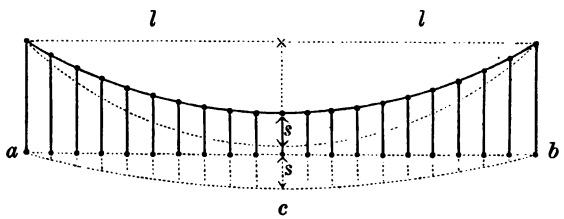
§ 66.

Rechtfertigung der angewendeten Methode.

Gegen die angewendete Methode lassen sich noch einige Einwendungen erheben. Bei der Berechnung des Lastvertheilungs-Coefficienten n wurden verschiedene Grössen vernachlässigt, und Annahmen gemacht, welche nicht in aller Strenge zutreffend erscheinen. In Folge dessen sind die gewonnenen Resultate noch mit einigen Fehlern und Ungenauigkeiten behaftet. Es lässt sich indessen nachweisen: einerseits, dass die begangenen Fehler überhaupt klein sind, andererseits, dass dieselben einander zum Theil compensiren, in der Weise, dass ihr Einfluss auf das Resultat ohne alle praktische Bedeutung ist. Es reicht hin, diesen Beweis zu führen unter Voraussetzung des einfachsten, in Fig. **463** dargestellten Falles, in welchem die Aufhängepunkte der Kette als feste Punkte behandelt wurden; auch ist es zulässig, die Differenz zwischen dem in Gleichung 172) gefundenen ungenauen Werthe des Lastvertheilungs-Coefficienten n und dem von Fehlern und Ungenauigkeiten befreiten genaueren Werthe dieses Coefficienten als Maassstab für die Beurtheilung des Einflusses der begangenen Fehler anzunehmen.

Die Berechnung der Lastvertheilung geschah in der Weise, dass die Senkungen in der Mitte einander gleich gesetzt wurden, d. h. diejenigen Senkungen, welche jedes der beiden Systeme — Kette und Gitterbalken — für sich allein unter Einwirkung des von demselben übernommenen Lastantheils in der Mitte erleiden würde. Wenn man indessen bedenkt, dass die Linie, welche die unteren Endpunkte der verticalen Hängestangen nach eingetretener

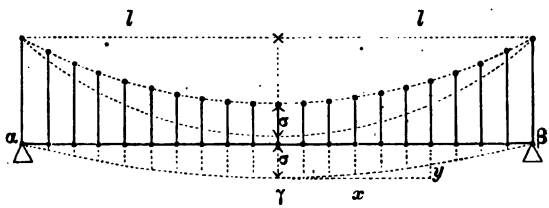
Fig. 493.



Verlängerung der Kette bilden würden, falls der Gitterbalken **nicht** vorhanden wäre, eine Parabel ist (Fig. **493**), während die Linie,

welche dieselben Punkte bilden würden, wenn ausschliesslich der Gitterbalken vorhanden wäre, eine **elastische Linie** ist (Fig. **494**),

Fig. 494.



dass also diese zwei Curven einander nicht decken können, so erscheint es richtiger — anstatt die Ordinaten s und σ der **Scheitelpunkte** beider Curven einander gleich zu setzen — vielmehr die **mittlere** oder **durchschnittliche** Grösse der längs der ganzen Spannweite zu errichtenden Ordinaten für beide Curven einander gleich zu setzen und hiernach die Lastvertheilung zu berechnen.

Die mittlere oder durchschnittliche Grösse der Ordinaten einer solchen Curve ist zu definiren als die Höhe eines Rechtecks von gleichem Flächeninhalt und gleicher Breite mit der von der betreffenden Curve begrenzten Fläche. Da in beiden Figuren die Breite des Rechtecks dieselbe ist, nämlich $= 2\,l$, so kann man statt dieser mittleren Höhen auch die beiden Flächeninhalte selbst einander gleich setzen. Die Parabelfläche $a\,b\,c$ (Fig. **493**) hat den Inhalt:

$$251)\quad J = \tfrac{2}{3} \,.\, s \,.\, 2\,l.$$

Nach Substitution des in Gleichung 168) für s gefundenen Werthes nimmt diese Gleichung die Form an:

$$252)\quad J = \frac{n\,p\,l^4}{2\,E\,F\,h^2}.$$

Die Pfeilhöhe der elastischen Linie $\alpha\,\gamma\,\beta$ (Fig. **494**) hat nach Gleichung 169) die Grösse:

$$253)\quad \sigma = \tfrac{5}{6}\,\frac{(1-n)\,p\,l^4}{E_1\,F_1\,h_1^2},$$

und die Ordinate im Abstande x von der Mitte ist (nach der Theorie der elastischen Linie):

$$254)\quad y = \frac{(1-n)\,p}{E_1\,F_1\,h_1^2}\left(l^2\,x^2 - \frac{x^4}{6}\right).$$

Man erhält also für den Flächeninhalt der Fläche $\alpha\,\beta\,\gamma$ die Gleichung:

$$255)\quad J = 2\int_{x=0}^{x=l} (\sigma - y)\,dx = \tfrac{16}{15}\,\frac{(1-n)\,p\,l^5}{E_1\,F_1\,h_1^2}.$$

Die Gleichsetzung der beiden für J gefundenen Werthe führt zu der Gleichung:

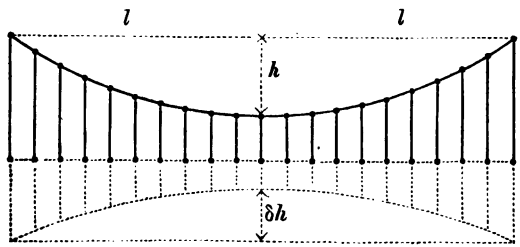
$$256)\quad n = \frac{1}{1 + \frac{15}{32}\cdot\frac{E_1}{E}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{h_1^2}{h^2}}.$$

Wenn man nach dieser Gleichung — anstatt nach Gleichung 171) — den Werth von n berechnet, so erhält man $n = 0{,}883\,52$ (statt $0{,}887\,656$), und $1 - n = 0{,}116\,48$ (statt $0{,}112\,344$). Es führt also diese Correction zu einem etwas **kleineren** Werthe für n; indessen beträgt der begangene Fehler selbst für die Werthe von $1 - n$ nur circa 3,7 Procent.

Die Bedenken gegen die früher angewendete Methode verschwinden aber vollends, wenn man berücksichtigt, dass gleichzeitig noch ein anderer Fehler begangen wurde, durch welchen der erstere zum Theil wieder aufgehoben wird, insofern die Correction dieses zweiten Fehlers für sich allein zu einem **grösseren** Werthe für die Zahl n führen würde.

Dieser zweite Fehler bestand darin, dass die Längen-Aenderungen der verticalen Hängestangen unberücksichtigt geblieben sind. Wenn diese Hängestangen sämmtlich in dem Verhältniss δ sich verlängerten, während die Kette ihre ursprüngliche Länge beibehält (Fig. **495**), so würden die unteren Endpunkte der Hänge-

Fig. 495.



stangen eine Parabel bilden von der Pfeilhöhe $\delta \,.\, h$. Da diese Parabel ihre convexe Seite nach oben wendet, so würde man diese Pfeilhöhe $\delta \,.\, h$ in Abrechnung zu bringen haben von derjenigen Senkung s, welche durch die Verlängerung der Kette entsteht. Man erhält also unter der Voraussetzung, dass die Kette ebenfalls im Verhältniss δ sich verlängert, für die wirkliche Senkung der Fahrbahnlinie in der Mitte den Werth:

$$257)\quad s - \delta h = \tfrac{3}{4}\delta \frac{l^2}{h} - \delta h,$$

oder nach Wiederherstellung des früher unterdrückten Gliedes $\frac{2}{3}\frac{h^2}{l^2}$ (in Gleichung 147) den Werth:

$$258)\quad s - \delta h = \tfrac{3}{4}\delta \frac{l^2}{h}\left(1 + \tfrac{2}{3}\frac{h^2}{l^2}\right) - \delta h.$$

Diese Gleichung nimmt nach Substitution des Werthes $\delta = \frac{H}{FE} = \frac{npl^2}{2EFh}$ die Form an:

$$259)\quad s - \delta h = \tfrac{3}{8}\frac{npl^4}{EFh^2}\left(1 - \tfrac{2}{3}\frac{h^2}{l^2}\right),$$

und wenn man diesen Werth an die Stelle des in Gleichung 168) gefundenen Werthes von s setzt, so erhält man aus Gleichung 170) für den Lastvertheilungs-Coefficienten n den Werth:

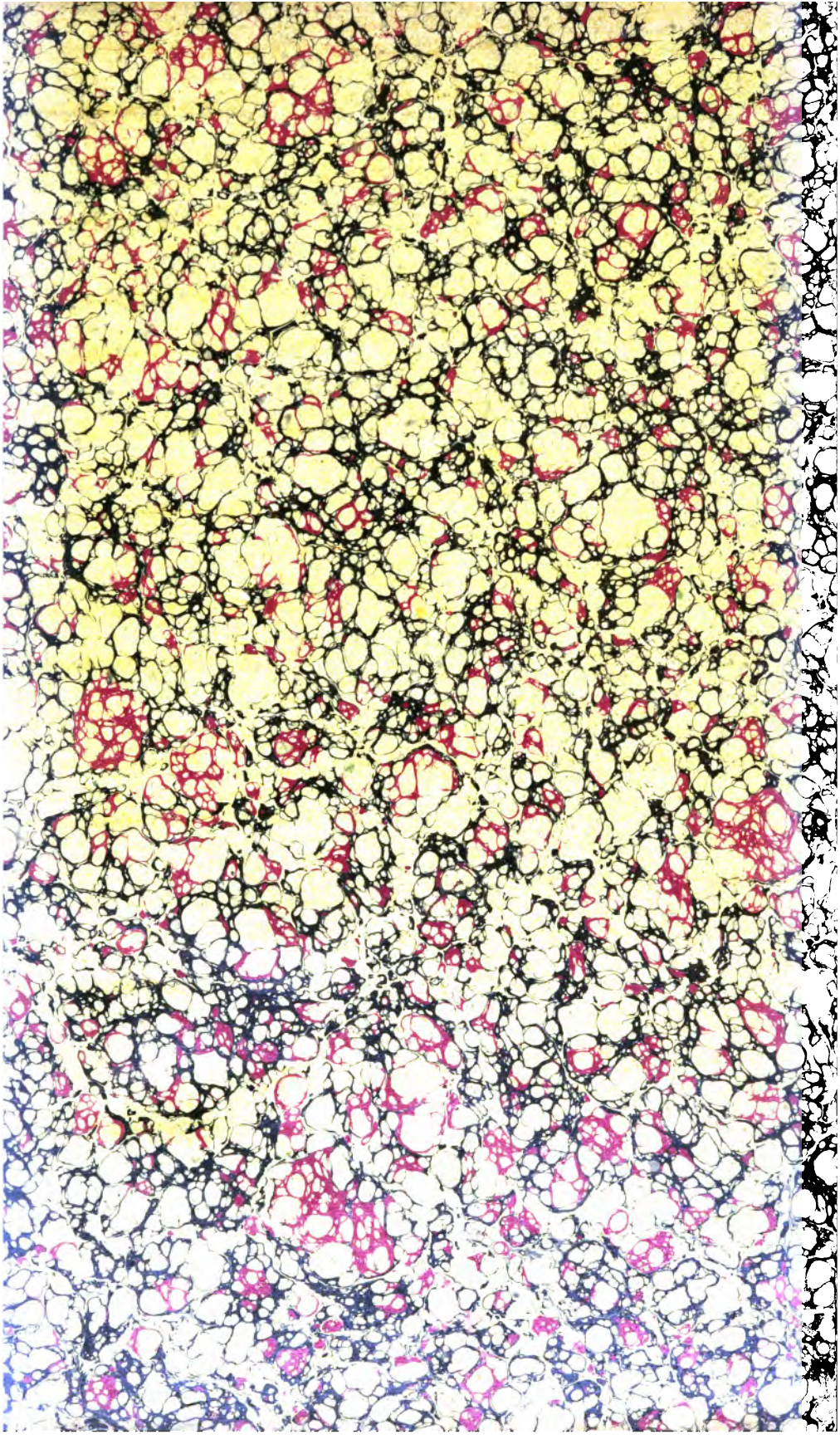
$$260)\quad n = \frac{1}{1 + \frac{9}{20}\cdot\frac{E_1}{E}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{h_1^2}{h^2}\cdot\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{h^2}{l^2}\right)}.$$

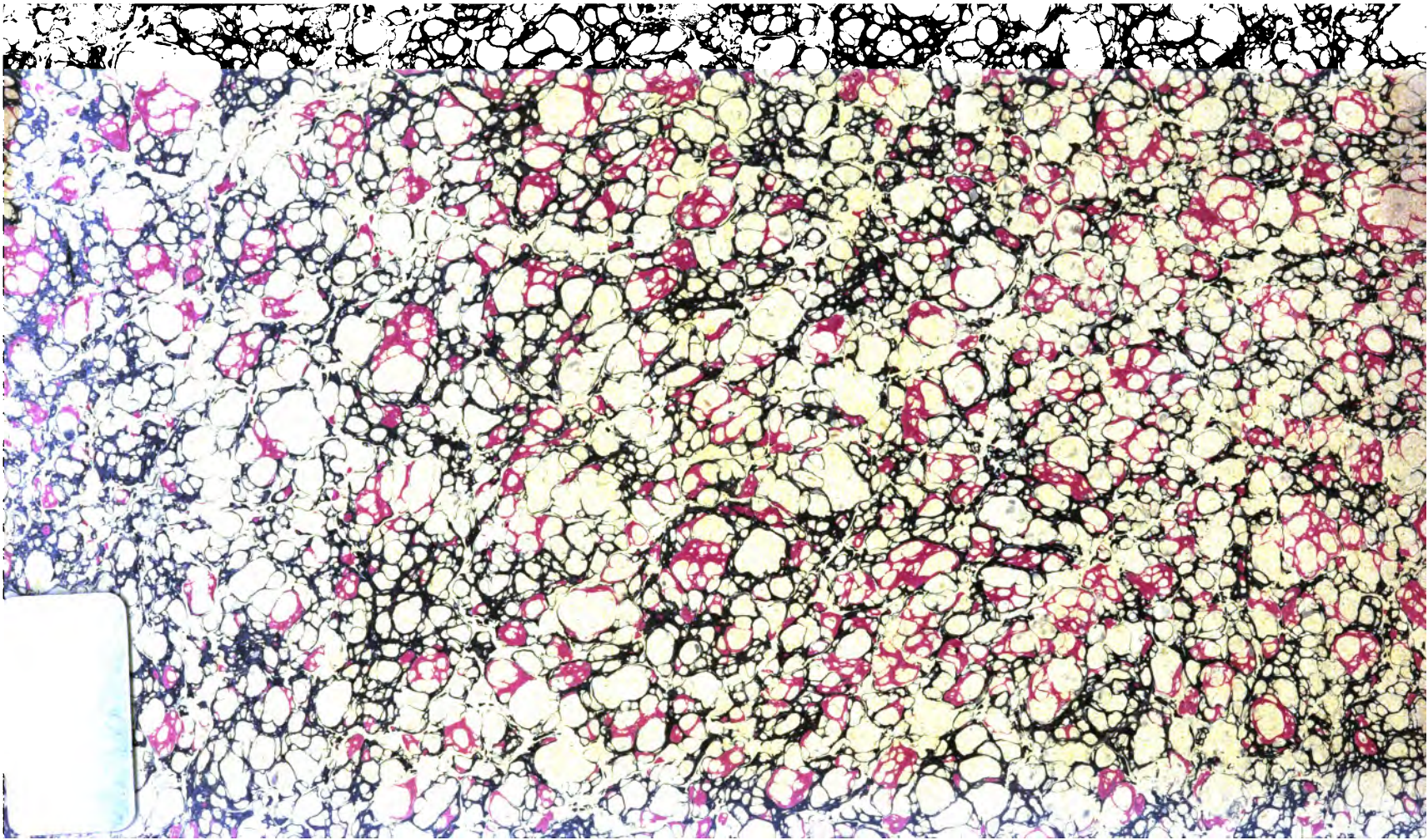
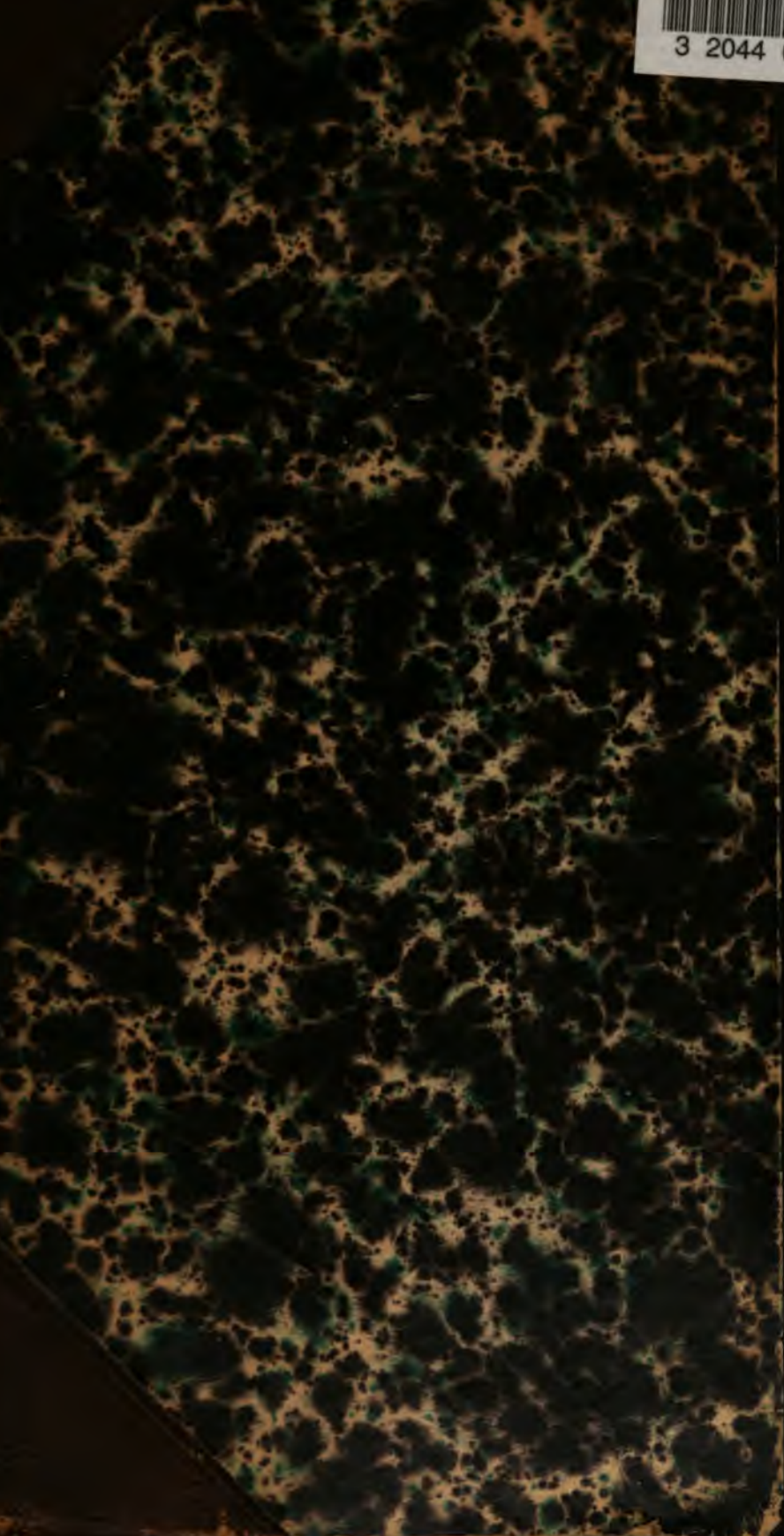
Diese Gleichung liefert für n einen **grösseren** Werth als Gleichung 171), nämlich den Werth $n = 0{,}888\,84$ (statt 0,887 656). Es wurde also durch den zweiten Fehler der erstere wenigstens zum Theil wieder aufgehoben.

Wenn man endlich **beide** Correctionen zugleich ausführt, so erhält man für den Lastvertheilungs-Coefficienten n die genauere Gleichung:

$$261)\quad n = \frac{1}{1 + \frac{15}{32}\cdot\frac{E_1}{E}\cdot\frac{F_1}{F}\cdot\frac{h_1^2}{h^2}\cdot\left(1 - \frac{2}{3}\cdot\frac{h^2}{l^2}\right)},$$

welche den Werth liefert $n = 0{,}884\,74$ (statt 0,887 656) und zeigt, dass die früher gefundenen Werthe für n nur um circa $\frac{1}{3}$ Procent — und selbst diejenigen der Zahl $1 - n$ nur um circa 2,6 Procent — von den genaueren Werthen abweichen. Es erscheint hiernach die oben angewendete einfachere Methode hinreichend gerechtfertigt.





3 2044 091 940 676